АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

КЛАССИКИ НАУКИ

Г. ГЕРЦ

ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ, ИЗЛОЖЕННЫЕ В НОВОЙ СВЯЗИ

ИЗДАНИЕ ПОДГОТОВИЛИ
А.Т. ГРИГОРЬЯН, Л.С. ПОЛАК

ОБЩАЯ РЕДАКЦИЯ
И. И. АРТОБОЛЕВСКОГО

ПЕРЕВОД
В. Ф. КОТОВА
И А. В. СУЛИМО-САМУЙЛО

$$\delta\int\sqrt{\sum a_{ij}\,dq_i\,dq_j}=0$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · 1959

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Основана академиком *С. И. Вавиловым*

ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ, ИЗЛОЖЕННЫЕ В НОВОЙ СВЯЗИ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА *

Все физики согласны с тем, что задача физики состоит в приведении явлений природы к простым законам механики. Однако в вопросе о том, какими являются эти простые законы, мнения расходятся. Большинство понимает под этими законами просто ньютоновы законы движения. На самом же деле последние получают свой внутренний смысл и физическое значение только благодаря невысказанной явно мысли, что силы, о которых говорят эти законы, имеют простую природу и простые свойства. При этом, однако не установлено, что является простым и допустимым и что не является таковым; именно в этом пункте и начинаются разногласия. По этой причине и возникают расхождения в вопросе о том, соответствуют ли положениям обычной механики те или другие концепции или нет. Правда, эта неопределенность обнаруживается только при возникновении существенно новых задач, но здесь она становится первым препятствием к исследованию. Например, еще преждевременна попытка свести к законам механики уравнения движения эфира, поскольку еще нет единого мнения о том, что обозначается этим названием.

Задача, к решению которой стремится предлагаемое исследование, состоит в том, чтобы восполнить имеющиеся здесь пробелы и указать совершенно определенную формулировку законов механики, которая была бы совместима с уровнем современных знаний

* Цифры в квадратных скобках обозначают примечания к книге Г. Герца, составленные Л. С. Полаком (см. стр. 357—373). — *Прим. ред.*

и была бы не слишком узкой и не слишком широкой по отношению к их объему. Эта формулировка не должна быть слишком узкой, т. е. не должно существовать никакого естественного движения, которое не подчинялось бы ее требованиям; в то же время она не должна быть слишком широкой, т. е. она не должна разрешать никаких движений, наличие которых исключено уже современным уровнем наших знаний. Является ли формулировка законов механики, которую я даю в качестве решения поставленной задачи, единственно возможной или существуют и другие возможные формулировки, этот вопрос остается открытым. Однако тот факт, что данная формулировка во всех отношениях возможна, я доказываю тем, что вывожу на ее основе все содержание обычной механики, поскольку последняя ограничивается действительными силами и связями природы, а не рассматривается просто как арена математических упражнений.

В результате этой работы из теоретического трактата получилась книга, которая содержит полный обзор всех более или менее важных общих положений динамики и может даже считаться систематическим курсом этой науки. Конечно, она не пригодна в качестве начального введения в динамику, но она может быть полезным руководством для тех, кто уже знает механику в обычном ее изложении. Этот труд, как мы надеемся, может продемонстрировать нашу концепцию, исходя из которой более четко выявится физическое значение механических принципов, их внутренние отношения и то, как далеко простирается область их применения; на основе этого выяснится понятие силы, так же как и остальные основные понятия механики.

Задача, поставленная в настоящем исследовании, уже рассмотрена в скрытом виде и нашла одно из возможных решений в работе Гельмгольца [2] о принципе наименьшего действия и в связанной с ней работе о циклических системах [1]. В первой работе формулируется и доказывается тезис, что механика может охватить все процессы природы и в том случае, когда в качестве всеобщих рассматриваются не Ньютоновы основания механики, а за исходные принципы принимают особые предпосылки, лежащие в основе принципа Гамильтона. Во второй из названных работ впервые разъясняется смысл и значение скрытых движений. Мое собственное исследование подверглось со стороны этих работ сильному влиянию как в общем, так и в деталях и находится в зависимости от них. Раздел о циклических системах почти полностью заимствован из них. Если не считать формы, то отклонение в моем изложении касается главным образом двух пунктов: во-первых, я с самого начала стремлюсь освободить элементы механики от того, что Гельмгольц исключает из механики в результате последующих ограничений; во-вторых, я исключаю из механики в определенном смысле слова меньше, не опираясь при этом ни на принцип Гамильтона, ни на другой интегральный принцип. Причина этого и проистекающие отсюда следствия станут ясными из самой работы. Ход мысли, аналогичный изложенным идеям Гельмгольца, развивается в замечательном трактате Дж. Дж. Томсона [3] о физических применениях динамики [2]. Автор развивает здесь следствия динамики, которые наряду с Ньютоновскими законами движения имеют в своей основе новые, не выраженные четко предпосылки. Я мог бы примкнуть и к этому трактату; фактически же мое собственное исследование уже значительно продвинулось, прежде чем я познакомился с этим трактатом. То же самое я могу сказать и о родственных в математическом отношении, но более старых работах Бельтрами [3] [4] и Липшица [4] [5], которые тем не менее явились для меня сильным побуждающим толчком, точно

[1] H. von Helmholtz. Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung. Journ. für die reine und angewandte Mathematik, 100, 1887, S. 137—166, 213—222; Prinzipien der Statik monocyklischer Systeme, ibid. 97, 1884, S. 111—140, 317—336.

[2] J. J. Thomson. On some Applications of Dynamical Principles to Physical Phenomena. Philosophical Transactions, 176, II., 1885, p. 307—342.

[3] Beltrami. Sulla teoria generale dei parametri differenziali. Mem. della Reale Accad. di Bologna, 25 Febbrajo 1869.

[4] R. Lipschitz. Untersuchungen eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Jour. für die reine und angewandte Mathematik, 74, 1872, S. 116—149; Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges, ibid. 82, 1877, S. 316—342.

так же как и изложение Дарбу [5], [6] в котором он снабдил эти работы собственными добавлениями. Некоторые математические трактаты, которые я мог бы и должен был учесть, возможно ускользнули от моего внимания. В общем я очень обязан прекрасной книге о развитии механики Маха [6] [7]. Само собой разумеется, что я воспользовался наиболее известными учебниками по общей механике и прежде всего обширным изложением динамики в учебнике Томсона [8] и Тэта [7] [9]. Ценной для меня была также тетрадь лекций по аналитической динамике Борхардта, которые я записал зимой 1878/79 г. Здесь я назвал использованные мною источники; в тексте я буду цитировать лишь отдельные источники, касающиеся рассматриваемого предмета. Что касается деталей, то здесь я не могу указать ничего, что не было бы заимствовано из других книг. То, что, как я надеюсь, является новым и чему я единственно придаю значение, — это систематизация и обобщение всего материала, следовательно, логическая или, если хотите, философская сторона предмета. Достигла ли моя работа цели или претерпела неудачу, это зависит от того, что она дала и в этом отношении.

---

[5] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces, livre V., chapitres VI, VII, VIII. Paris, 1889.

[6] E. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig, 1883 (имеется английский перевод T. J. M'Cormack. Sci. Mechanics, Chicago, 1893).

[7] Thomson a. Tait. Natural Philosophy.

ВВЕДЕНИЕ

Ближайшая и в определенном смысле важнейшая задача нашего сознательного познания природы заключается в том, чтобы найти возможность предвидеть будущий опыт и в соответствии с этим регулировать наши действия в настоящем. Основой для решения этой задачи познания при всех обстоятельствах служит предшествующий опыт, полученный или из случайных наблюдений или из специальных экспериментов.

Метод, которым мы всегда пользуемся при выводе будущего из прошедшего, чтобы достигнуть этого предвидения, состоит в следующем: мы создаем себе внутренние образы или символы внешних предметов, причем мы создаем их такими, чтобы логически необходимые следствия этих представлений в свою очередь были образами естественно необходимых следствий отображенных предметов. Чтобы это требование вообще было выполнимым, должно существовать некоторое соответствие между природой и нашим умом. Опыт учит нас, что это требование выполнимо и что такое соответствие существует в действительности. Если нам удалось создать из накопленного до сих пор опыта представление требуемого характера, то мы можем в короткое время вывести из них, как из моделей, следствия, которые сами по себе проявились бы во внешнем мире только через продолжительное время или же были результатом нашего вмешательства; следовательно, мы имеем возможность предвидеть факты и координировать принятые нами решения со сложившимися представлениями. Образы, о которых мы говорим, являются нашими представлениями о вещах; они находятся с вещами лишь в одном существенном соответствии, которое состоит в выполнении упомянутого выше требования. Однако отнюдь не необходимо, чтобы они, кроме того, были в каком-либо другом соответствии с вещами. Фактически мы не знаем и не имеем способа узнать, совпадают ли наши представления о вещах с этими вещами в чем-либо другом, кроме упомянутого выше одного основного соотношения.

Образы предметов, создаваемые нами, еще не определены однозначно требованием, чтобы следствия образов были в свою очередь образами следствий. Возможны различные образы одних и тех же предметов и эти образы могут отличаться в различных отношениях. Недопустимыми образами мы должны были бы признать заранее такие, которые уже в себе содержат противоречие законам нашего мышления и, следовательно, прежде всего мы требуем, чтобы все наши образы были логически допустимы, или просто допустимы. Мы называем допустимые образы неправильными в том случае, если их существенные соотношения противоречат отношениям внешних вещей, т. е. они не удовлетворяют нашему первому основному требованию. Поэтому мы требуем, во-вторых, чтобы наши образы были правильными. Но два допустимых и правильных образа одних и тех же внешних предметов могут еще отличаться один от другого с точки зрения целесообразности. Из двух образов одного и того же предмета тот образ будет более целесообразным, который в большей степени отображает существенные отношения предмета, чем тот, который, как нам хочется особо подчеркнуть, является более ясным. Из двух образов более целесообразным при одинаковой ясности будет тот образ, который, наряду с существенными чертами, содержит меньше излишних или пустых отношений, который, следовательно, является более простым. Пустых отношений нельзя избежать полностью, ибо они привносятся в образы уже потому, что это только образы, и к тому же образы нашего ума и, следовательно, должны определяться также свойствами его способа отображения.

До сих пор мы перечисляли требования, которые мы ставим перед самими образами. Совсем другие, однако, те требования, которые мы ставим перед научным описанием таких образов. Мы требуем от

последнего, чтобы оно ясно показало, какие свойства приписываются образам ради их допустимости, какие ради их правильности и какие ради их целесообразности. Только так мы получаем возможность изменять наши образы и улучшать их. То, что приписывалось образам ради их целесообразности, содержится в обозначениях, определениях, сокращениях, одним словом, во всем том, что мы можем произвольно добавлять и отбрасывать. То, что приписывается образам ради их правильности, содержится в данных опыта, на основе которых построены образы. То, что приписывается образам ради их допустимости, дано свойствами нашего ума. Является ли образ допустимым или нет, можно решить однозначно в положительном или отрицательном смысле, и при этом наше решение сохраняет силу навсегда. Является ли картина правильной или нет, можно тоже решить однозначно в положительном или отрицательном смысле, но только по состоянию нашего теперешнего опыта и при допущении оговорки, касающейся более позднего и более зрелого опыта. Является ли образ целесообразным или нет, по этому вопросу не существует однозначного решения; здесь могут существовать различные мнения. Один образ может иметь преимущества в одном, другой — в другом отношении, и только в результате постепенной проверки многих образов с течением времени выясняются, наконец, наиболее целесообразные.

Здесь изложены точки зрения, исходя из которых, на мой взгляд, можно судить о ценности физических теорий и о ценности их изложения. Во всяком случае, мы будем рассматривать прежние изложения принципов механики, основываясь именно на этих точках зрения. При этом прежде всего необходимо с определенностью выяснить, что мы понимаем под термином «принцип».

Первоначально в механике понимали под «принципом» в строгом смысле каждое высказывание, которое нельзя было в свою очередь привести к другим положениям самой же механики, но которое можно было рассматривать как непосредственный результат, вытекающий из других источников познания. В ходе исторического развития нельзя было избежать тех положений, которые, при наличии особых предпосылок в свое время справедливо были названы принципами, позже, хотя и неправильно, сохранили это название. Со времени Лагранжа часто указывали, что принципы центра тяжести и площадей в сущности являются только теоремами общего содержания. Однако одинаково справедливо можно отметить, что также и остальные так называемые принципы не могут носить это название независимо друг от друга и что каждый из них должен снизойти до ранга следствия или теоремы, как только изложение механики будет обосновываться одним или несколькими из них. В соответствии с этим понятие принципа механики не является строго устойчивым. Поэтому мы сохраним за упомянутыми положениями в нашем изложении их прежнее название; однако когда мы просто и в общем говорим о принципах механики, то мы не будем понимать под ними этих отдельных конкретных положений, а лишь любые произвольно выбранные из них или аналогичные им положения, удовлетворяющие условию, что вся механика может быть выведена из них чисто дедуктивно без дальнейшей ссылки на опыт. При таком методе обозначения основные принципы механики вместе со связывающими их принципами дадут простейшую картину, которую может создать физика о вещах чувственного мира и происходящих в нем процессах. И так как мы можем дать различные изложения принципов механики при различном выборе положений, лежащих в ее основе, то мы получаем различные картины вещей. Эти картины мы можем проверять и сравнивать в отношении их допустимости, правильности и целесообразности.

1

Первую картину дает нам обычное изложение механики. Мы понимаем под ним изложение почти всех учебников, которые трактуют механику в целом, почти всех лекций, охватывающих содержание этой науки, различное в деталях, но совпадающее в основном. Это изложение представляет собой широкую столбовую дорогу, по которой толпы учеников приходят к познанию механики; оно развертывается в точном соответствии с историческим развитием и последовательностью открытий; его главные вехи обозначены именами Архимеда, Галилея, Ньютона, Лагранжа. В основу этого изложения кладутся понятия пространства, времени, силы и массы. Здесь сила вводится как причина движения [10], существующая до движения и независимо от него. Вначале рассматриваются только пространство и сила, и их взаимоотношения трактуются в статике. Чистое учение о движении, или кинематика, ограничивается установлением связи между понятиями пространства и времени. Представление Галилея об инерции устанавливает связь между пространством, временем и массой. В законах движения Ньютона впервые появляются все четыре основные понятия во взаимной связи между собой. Эти законы создают основу дальнейшего развития, но они все же не дают еще общего выражения влияния неподвижных пространственных связей. Решая эту задачу, д'Аламбер [11], с помощью принципа, носящего его имя, распространяет общий результат статики на случай движения и этим самым замыкает круг независимых основных положений, не выводимых один из другого. Все же остальное является результатом дедукции. Действительно, перечисленные понятия и законы не только необходимы, но и достаточны, чтобы вывести из них с логической необходимостью все содержание механики и представить все остальные так называемые принципы как теоремы и следствия, вытекающие из общих предпосылок. Перечисленные понятия и законы дают нам, следовательно, первую систему принципов механики в нашей терминологии, а вместе с этим и первую общую картину естественных движений в мире тел.

Вначале представляется мало вероятным, что можно даже сомневаться в логической допустимости этой картины. Кажется почти невозможной сама мысль искать логические несовершенства в системе, которая разрабатывалась лучшими умами. Но прежде чем отказаться от дальнейшего исследования, следует спросить, все ли, в том числе и лучшие умы, были удовлетворены этой системой. Во всяком случае, уже с самого начала неизбежно должно показаться странным, как легко связать с основными законами соображения, которые полностью соответствуют обычному способу рассуждений в механике, но которые, несомненно, приводят в смущение здравый смысл.

Покажем это вначале на примере. Мы вращаем по окружности камень, привязанный к веревке, при этом мы сознательно прилагаем к камню силу; эта сила постоянно отклоняет камень от прямого пути и, изменяя эту силу, массу камня и длину веревки, мы находим, что движение камня все время происходит фактически в соответствии со вторым законом Ньютона [12]. Однако третий закон требует силы, противодействующей той силе, которая производится нашей рукой и прилагается к камню. На вопрос об этой противодействующей силе мы получаем трафаретный ответ: камень действует обратно на руку вследствие центробежной силы, и эта центробежная сила в точности равна и прямо противоположна силе, с которой наша рука действует на камень. Но допустимы ли такой способ и выражения? Является ли то, что мы называем здесь центробежной, или центростремительной, силой, чем-либо иным, а не инерцией камня? Можем ли мы, не нанося ущерба ясности наших концепций, вводить действие инерции дважды в наше исчисление, а именно, один раз — как массу, а другой раз — как силу? [13]. В наших законах движения сила была причиной движения, существующей до движения. Можем ли мы теперь, не запутывая наши понятия, говорить о силах, которые возникают в результате движения и являются следствием движения? Можем ли мы обойтись ссылкой на то, что мы, якобы, уже сделали в наших законах некоторые высказывания об этом новом виде сил, что термин «сила» может содержать в себе также и свойство сил? Очевидно на все эти вопросы следует дать отрицательный ответ; нам ничего больше не остается, как сказать: обозначение центробежной силы термином «сила» нельзя считать подходящим. Этот термин следует принимать, подобно термину «живая сила», как исторический пережиток, и сохранение его можно скорее извинить соображениями полезности, а не оправдать. Но как же быть тогда с третьим законом, согласно которому требуется сила, прилагаемая мертвым камнем к руке, и который может быть удовлетворен только наличием действительно существующей силы, а не одним лишь голым термином [14].

Я не думаю, чтобы эти трудности были созданы искусственно или преднамеренно; они напрашиваются сами по себе. Разве нельзя проследить их возникновение вплоть до основных законов? Сила, о которой речь идет в определении и в обоих основных законах, действует на тело в однозначно определенном направлении. Смысл третьего закона сводится к тому, что силы, всегда связывающие два тела, могут быть направлены как от первого ко второму, так и от второго к первому [15]. Представление силы, которое формулируется в этом законе, и представления, даваемые остальными двумя законами, кажутся мне несколько различными. Однако это незначительное различие, возможно, достаточно, чтобы обусловить то логическое несоответствие, последствия которого нашли выражение в нашем примере.

Нет необходимости заниматься здесь исследованием дальнейших примеров. Мы можем сослаться на наши общие восприятия для оправдания наших сомнений. По моему мнению, прежде всего надо указать на то, что как раз введение в механику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, конечно, не без некоторого смущения, извинения, и не испытывая желания побыстрее перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя.

Мне кажется, что сам Ньютон испытывал некоторое смущение, когда он с известной натяжкой определял массу как произведение объема на плотность. По-видимому, Томсон и Тэт вполне это понимали, указав, что это определение в большей степени представляет собой, собственно, определение плотности, а не массы, хотя они все же удовлетворились им как единственным определением массы. Также и Лагранж, мне кажется, чувствовал смущение и во что бы то ни стало хотел продвинуться дальше, когда он во вводной части своей механики указал, что сила является причиной, которая сообщает «или стремится сообщить» движение какому-либо телу; конечно, он не мог при этом не почувствовать некоторой логической шероховатости такого искусственного определения. Второй довод я усматриваю в том, что для элементарных положений статики, для правила параллелограмма сил, для правила виртуальных скоростей и т. д., мы имеем уже много доказательств, которые даны выдающимися математиками и претендуют на строгость, однако, по мнению других выдающихся математиков, упомянутые доказательства далеко не удовлетворяют этому требованию. В такой логически совершенной науке, как чистая математика, разногласие в такого рода вопросе просто немыслимо. Чрезвычайно вескими мне представляются также следующие чересчур часто повторяемые утверждения: сущность силы остается еще загадочной, главная задача физики — исследовать силы, и другие аналогичные высказывания.

Подобные вопросы ставятся и перед специалистами по электричеству о сущности электричества. Но почему же тогда не задают вопроса в этом же смысле о сущности золота или о сущности скорости? Разве сущность золота нам лучше известна, чем сущность электричества, или же сущность скорости лучше известна, чем сущность силы? Можем ли мы исчерпывающе воспроизвести сущность какой-либо вещи с помощью наших представлений, с помощью наших слов? Конечно, нет. Мне кажется, разница заключается здесь в следующем: с терминами «скорость» и «золото» мы связываем в нашем представлении множество других терминов и между всеми этими соотношениями не обнаруживается никаких противоречий. Это нас удовлетворяет, и мы не задаем больше никаких вопросов. Однако с терминами «сила» и «электричество» связывалось большее число соотношений, чем те, которые полностью совмещались бы друг с другом. Мы это смутно чувствуем, требуем объяснений и свои неясные желания выражаем в неясном вопросе о сущности силы и электричества. Но мы, по-видимому, заблуждаемся в отношении ответа на этот вопрос. Он может быть разрешен не познанием новых и более многочисленных соотношений и связей, а устранением противоречий между уже соответствующими связями, а может быть, следовательно, и уменьшением таковых. Если эти досадные противоречия устранены, то этим, правда, еще не решен вопрос по существу, но зато наш ум, не терзаемый больше сомнениями, не будет уже в дальнейшем выдвигать этот, ставший тем самым неправомерным, вопрос.

В изложенных рассуждениях мы высказывали в отношении допустимости рассматриваемой картины такие сильные подозрения, что могло бы показаться, что мы преднамеренно оспариваем и отрицаем эту допустимость. Однако наши намерения и наши искренние убеждения не заходят так далеко. Если даже действительно существуют логические неопределенности, которые вызывают у нас сомнения в отношении надежности основ, тем не менее они не явились помехой успехам, которых добилась механика, применяя их на практике. Следовательно, они не могут быть сведены к противоречиям между существенными чертами нашей картины, а также к противоречиям между теми соотношениями механики, которые соответствуют соотношениям между самими вещами. Ясно, таким образом, что эти логические неопределенности ограничиваются несущественными чертами и, следовательно, всем тем, что мы сами произвольно приписывали существенному содержанию, данному нам природой. Однако в этом случае упомянутых затруднений можно избежать. Возможно, наши возражения касаются не содержания набросанной картины, а только формы изложения этого содержания. Конечно, мы не будем слишком строги, утверждая, что это изложение еще не достигло научного завершения, что в нем отсутствует еще четкое разграничение между тем, что в набросанной картине является логической необходимостью, что вытекает из опыта и что произвольно. В этой оценке мы сходимся с выдающимися физиками, которые занимались этими вопросами и высказывались по ним [8], хотя, конечно, нельзя сказать, что между ними было единодушие [9].

Эта оценка находит затем свое подтверждение во все возрастающей тщательности, с которой в новейших учебниках механики производится логическое подразделение элементов [10].

[8] См. Э. Мах. Механика. См. затем в журнале «Nature» 1893 г. дискуссию об основных законах механики, открытую О. Лоджем и продолженную на заседаниях Физического общества в Лондоне.

[9] См. Thomson a. Tait. Natural Philosophy, § 205 и далее.

[10] См. E. Budde [16]. Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Berlin, 1890, S. 11—138.

Изложение вопроса в этой работе одновременно дает ясную картину тех трудностей, с которыми сталкивается свободное от противоречий использование основных элементов.

Вместе с авторами этих учебников и с упомянутыми физиками мы убеждены, что имеющиеся пробелы являются лишь пробелами формы и что неясности и неуверенность могут быть устранены надлежащей систематизацией определений, обозначений и осторожным выбором выражений. В этом смысле мы, как и все другие, признаем допустимость содержания механики. Однако достоинство и значение предмета требует, чтобы его логическая чистота признавалась не только по доброй воле, но чтобы она была также доказана полным и совершенным изложением механики так, чтобы была исключена даже всякая возможность для каких бы то ни было подозрений.

Легче и, по общему мнению, надежнее судить о правильности рассматриваемой нами картины. Эта правильность не встретит возражений, если мы заверим, что она соответствует всему объему накопленного до сих пор опыта, является совершенной и что все характерные черты нашей картины, которые в полном соответствии с тем, на что они вообще претендуют, воспроизводят наблюдаемые взаимоотношения между вещами фактически и правильно соответствуют этим взаимоотношениям. Правда, мы ограничиваем нашу уверенность только лишь содержанием накопленного до сих пор опыта, что же касается будущего опыта, то мы еще будем иметь случай вернуться к вопросу о правильности с этой точки зрения. Безусловно, эта осторожность покажется некоторым не только преувеличенной, но даже бессмысленной; по мнению многих физиков, просто немыслимо, чтобы даже в самых отдаленных данных опыта можно было обнаружить что-либо такое, что было бы в состоянии внести изменения в твердо установленные принципы механики. И тем не менее то, что вытекает из опыта, может быть в свою очередь отвергнуто опытом; по-видимому, слишком благоприятное мнение об основных законах могло сложиться только потому, что в этих законах элементы опыта в некоторой степени скрыты и слились с неизменными, логически необходимыми элементами.

Логическая неопределенность изложения, которую мы только что подвергли критике, имеет также некоторые преимущества; она придает основам иллюзию неизменяемости; возможно, в период

зарождения науки и было разумно вводить это представление и мириться с его существованием в течение некоторого времени. Правильность же картины в отношении всех случаев твердо установилась благодаря тому, что в случае необходимости резервировалось право использова тьопытные данные в качестве определений, и наоборот. Однако в совершенной науке такое искание ощупью, такая иллюзия надежности недопустимы. При зрелом познании в первую очередь должна учитываться логическая чистота; только логически чистые картины должны проверяться в отношении их правильности, только правильные картины — в отношении их целесообразности. В случае крайней необходимости поступают иногда наоборот; изобретаются картины, подходящие для намеченных целей, затем они проверяются в отношении правильности и, наконец, освобождаются от внутренних противоречий.

Если последнее замечание справедливо лишь в некоторой степени, то нам представляется вполне естественным, что рассматриваемая система механики обнаруживает максимальную целесообразность, когда она применяется к простым явлениям, для которых она и была создана, следовательно, прежде всего к действию силы тяжести и к задачам практической механики. Но на этом мы не должны останавливаться; следует помнить, что перед нами стоит задача проанализировать здесь не обычные потребности повседневной жизни и не точку зрения прошедших эпох, а охватить весь объем современного знания физики и, кроме того, дать оценку целесообразности в том особом смысле, который мы точно определили в самом начале. В соответствии с этим мы должны поставить перед собой прежде всего вопрос; вполне ли ясна набросанная картина? Содержит ли она все черты, которые в состоянии различать современное знание в движениях природы? На этот вопрос мы отвечаем решительным «нет». Не все движения, которые допускаются основными законами и которые механика рассматривает как математические задачи для упражнения, встречаются в природе, но, с другой стороны, о естественных движениях, силах, неподвижных соединениях мы можем сказать больше, чем это делают общепринятые основные законы.

Начиная с середины XIX столетия мы твердо убеждены в том, что в природе фактически не существует никаких сил, которые могли бы нарушить принцип сохранения энергии. Значительно более древнего происхождения убеждение, что существуют лишь такие силы, которые могут быть представлены как результат взаимодействий между бесконечно малыми элементами материи. Эти элементарные силы также не свободны. Их общепризнанные свойства состоят в том, что они не зависят от абсолютного значения времени и от абсолютного места в пространстве. Другие их свойства спорные. Выражаются ли элементарные силы только лишь в притяжениях и отталкиваниях по линии соединения действующих масс, обусловлена ли их величина только расстоянием или зависит от абсолютной и относительной скорости и только от нее, должно ли приниматься во внимание ускорение или высшие частные производные пути по времени — все это или принималось, или ставилось под сомнение.

Однако, если даже нет единого мнения по вопросу о всех определенных свойствах, которые должны приписываться элементарным силам, тем не менее все сходятся во мнении, что из имеющихся уже наблюдений может быть выведено большее число свойств, чем то, которое содержится в основных законах. Мы убеждены в том, что элементарные силы, выражаясь неопределенно, должны иметь простой характер. То, что в данном случае имеет значение в отношении сил, можно в одинаковой степени отнести также и к неподвижным связям тел, которые выражаются математически посредством уравнений условий между координатами и действие которых определено принципом д'Аламбера. Математически можно написать любое конечное или дифференциальное уравнение между координатами; при этом можно выдвинуть требование, чтобы это уравнение было удовлетворено. Однако не всегда может быть найдена существующая в природе физическая связь, соответствующая этому уравнению. Нередко мы сталкиваемся с предположением, а иногда даже и с убеждением, что такая связь исключена природой вещей. Но как же тогда можно ограничить допустимые уравнения условий? Где же граница между ними и воображаемыми уравнениями? Часто

удовлетворялись тем, что рассматривали только конечные уравнения условий. Но это ограничение заходит слишком далеко, так как в естественных проблемах неинтегрируемые дифференциальные уравнения могут фактически появляться как уравнения условий.

Одним словом, как в отношении сил, так и в отношении неподвижных связей наша система принципов содержит все существующие в природе движения, но одновременно она содержит также много таких движений, которые не существуют в природе. Система, которая исключала бы эти последние или хотя бы часть из них, лучше отражала бы действительные взаимоотношения вещей и в этом смысле была бы, следовательно, более целесообразной. Но мы должны проверить целесообразность нашей картины еще и в другом направлении. Является ли наша картина простой? Экономна ли она в отношении несущественных черт, т. е. в отношении таких черт, которые приписываются нами, правда, в допустимой форме, но все же произвольно, существенным чертам природы? При ответе на этот вопрос наши сомнения снова сталкиваются с понятием «силы».

Нельзя отрицать, что в очень многих случаях силы, вводимые нашей механикой при рассмотрении физических вопросов, аналогичны работающим на холостом ходу колесам, исключаемым из общей системы повсюду, где требуется описать действительные факты. В простых случаях, на основе которых механика трактовалась первоначально, это, правда, не имеет места. Тяжесть камня, сила руки представляются такими же реальными, такими же допустимыми для непосредственного восприятия, как и вызванные ими движения. Но стоит только перейти к движению звезд, и мы будем наблюдать уже другие соотношения. Здесь силы никогда не были предметом непосредственного опыта; весь наш прежний опыт относится только к кажущемуся месту созвездий. Также и в будущем мы не надеемся воспринимать эти силы, ибо будущий опыт, как мы ожидаем, коснется снова лишь положения светящихся точек на небе, какими нам представляются звезды.

Только при выводе данных будущего из данных прошедшего опыта временно появляются в качестве вспомогательных величин силы тяготения, которые вскоре снова исчезают из рассмотрения.

В общем точно также дело обстоит при рассмотрении молекулярных сил, химических сил, многих электрических и магнитных действий. И если теперь, опираясь на более зрелый опыт, мы вернемся к простым силам, в существовании которых у нас не было никаких сомнений, то мы увидим, что эти силы, воспринимаемые нами с убедительной достоверностью, во всяком случае не были действительными силами. Влечение каждого тела к земле, которое мы, как нам кажется, воспринимаем непосредственно, это влечение, как нам подсказывает более зрелая механика, не отражает действительности; оно является результатом необъятного числа действительных сил, которые притягивают атомы тела к атомам Вселенной, причем общий результат действия этих сил представляется нам в виде отдельной силы. Следовательно, и здесь действительные силы никогда не были предметом прошлого опыта, точно также мы не надеемся встретиться с ними и в будущем опыте. Они незаметно появляются только при выводе данных будущего опыта из прошлого опыта, а затем снова исчезают. Но даже если бы эти силы были введены в природу только нами, мы все же не могли бы считать их введение нецелесообразным. Нам заранее было ясно, что невозможно полностью исключить из наших картин несущественные соотношения. Мы можем лишь требовать максимального ограничения таких соотношений и разумной осмотрительности в их использовании.

Но можно ли утверждать, что физика всегда может экономно идти в этом направлении? Напротив, не была ли она вынуждена чрезмерно заполнить мир самыми разнообразными видами сил: силами, которые сами никогда не появляются, и даже такими силами, которые действуют вообще только в самых исключительных случаях? Мы видим, например, что на столе лежит кусок железа в состоянии покоя. В соответствии с этим мы предполагаем, что не имеется никаких причин движения, никаких сил. Физика, которая построена на основе нашей механики и которая предопределяется этой основой, учит нас другому. Каждый атом железа притягивается к каждому другому атому Вселенной посредством силы тяготения. Однако каждый атом железа, кроме того, магнитен и благодаря этому связывается с каждым другим магнитным атомом Вселенной новыми

силами. Но тела Вселенной в свою очередь наполнены движущимся электричеством, и это электричество порождает новые сложные силы, которые действуют на каждый атом железа. И поскольку частицы железа сами содержат электричество, мы снова должны будем принимать в расчет еще и другие силы, а вместе с ними еще и другие виды молекулярных сил. Некоторые из этих сил весьма значительны; если бы из всех этих сил действовала только одна часть, то железо было бы разорвано на куски. Но в действительности все эти силы так уравновешивают друг друга, что их результирующая равна нулю, и несмотря на тысячи существующих причин движения, оно все же не наступает, и железо остается в состоянии покоя. Если мы изложим эти концепции людям, мыслящим независимо, кто же в них поверит? Кого мы сможем убедить, что мы говорим о действительных вещах, а не о картинах пылкого воображения? Но даже и мы сами невольно призадумаемся, простейшим ли образом мы описали и отобразили покой железа и его частей? Вначале кажется сомнительным, можно ли вообще избежать этого усложнения, но несомненно, что та система механики, которая избегает или исключает его, более проста и в этом смысле более целесообразна, чем рассматриваемая здесь система, которая не только допускает такие представления, но даже навязывает их нам.

Сформулируем еще раз в самой краткой форме те сомнения, с которыми мы сталкиваемся при рассмотрении обычного изложения принципов механики. Что касается формы, то нам казалось, что логическое значение отдельных высказываний установлено недостаточно ясно. Что же касается самого предмета, то нам казалось, что рассматриваемые механикой движения не полностью совпадают с естественными движениями, которые должны рассматриваться. Некоторые свойства естественных движений не учитываются в механике; многие отношения, которые рассматривает механика, в природе, по-видимому, не существуют. Если даже эти доводы будут признаны правильными, мы все же не встанем на ту точку зрения, что обычное изложение механики должно поэтому потерять или потеряет в будущем свою ценность и свое привилегированное положение. Однако эти доводы могут быть достаточным оправданием тому, что мы обратимся к другим изложениям, имеющим некоторые преимущества в отношении указанных недостатков и более подходящих к описываемым явлениям.

2

Вторая картина механических процессов значительно более позднего происхождения, чем первая. Ее развитие из первой картины и параллельно этой картине тесно связано с успехами, достигнутыми физической наукой в последние десятилетия. Еще до середины XIX столетия казалось, что окончательная цель и окончательное объяснение явлений природы, к которому следует стремиться, состоит в приведении этих явлений к бесчисленным силам, действующим на расстоянии между атомами материи. Эта концепция полностью соответствовала системе принципов механики, которую мы назвали первой; они взаимно обусловливали друг друга. Но к концу XIX столетия физика отдала предпочтение другому способу мышления. Под влиянием открытия принципа сохранения энергии физическая наука рассматривает теперь относящиеся к ее области явления как превращения одной формы энергии в другую и считает своей конечной целью сведение явлений к законам превращения энергии.

Такая трактовка может считаться исходной при рассмотрении элементарных процессов самого движения; так стало возникать новое, отличное от первого, изложение механики, в котором понятие силы с самого начала уступает место понятию энергии. Именно эту, возникшую таким образом новую картину элементарных процессов движения мы и называем второй картиной, которой и посвящаем здесь наше внимание. Если при обсуждении первой картины у нас было то преимущество, что, как можно было предполагать, сама картина ясно стояла перед глазами физиков, то о второй картине этого, разумеется, сказать нельзя. Вторая картина, по-видимому, еще никогда не была нарисована во всех ее деталях.

Насколько мне известно, не существует ни одного учебника механики, который в своих исходных положениях был бы построен на основе учения об энергии и в котором понятие энергии было бы

введено раньше, чем понятие силы. Возможно, даже ни одна лекция по механике не была построена по этому плану. Однако возможность такого плана была ясна основателям учения об энергии; часто отмечалось, что таким путем можно было бы избежать понятия силы со всеми его трудностями. В отдельных случаях специальных применений в научной литературе все чаще и чаще излагаются взгляды, целиком примыкающие к этой точке зрения. Поэтому мы можем в общих чертах изложить план, который должен был бы лечь в основу намечаемого построения механики.

Так же как и в первой картине, мы исходим и здесь из четырех независимых одно от другого основных понятий, взаимоотношения между которыми должны образовать содержание механики. Два из них имеют математический характер: это — пространство и время; два других — масса и энергия — вводятся как неразрушимые и неизменные физические сущности. Правда, необходимо четко указать, посредством каких конкретных данных опыта мы в конечном счете собираемся доказать существование массы и энергии. Здесь мы принимаем, что это достижимо и даже уже достигнуто. Само собой разумеется, что количество энергии, связанное с определенными массами, зависит от состояния этих масс. В качестве первого общего факта опыта следует указать, что существующая энергия всегда может быть разделена на две части, из которых первая обусловлена исключительно взаимным положением масс, а вторая зависит от их абсолютной скорости. Первая часть обозначается как потенциальная энергия, вторая — как кинетическая. Форма зависимости кинетической энергии от скорости движущихся тел во всех случаях одинакова и известна; форма зависимости потенциальной энергии от положения тел не может быть указана в общих чертах; она представляет собой скорее специфическую природу и характерную особенность рассматриваемых масс. Задача физики состоит в том, чтобы определить эту форму для окружающих нас тел природы, основываясь на данных прежнего опыта.

До сих пор в наших рассмотрениях связывались в основном только три элемента, а именно: пространство, масса и энергия. Чтобы установить взаимоотношения всех четырех основных понятий, а вместе с этим и развитие явлений во времени, мы воспользуемся одним из интегральных принципов обычной механики, которые формулируются на основе понятия энергии. Какой из принципов мы используем, практически безразлично; можно воспользоваться принципом Гамильтона, что мы имеем полное право сделать. В этом случае мы установили бы, следовательно, в качестве единственного закона механики положение, что каждая система естественных масс двигается так, как будто перед ней стоит задача достигнуть заданных положений в заданный отрезок времени и притом так, чтобы разница между кинетической и потенциальной энергией была в среднем возможно малой на протяжении всего периода времени. Если даже этот закон не является простым по форме, он все же в одном единственном определении однозначно воспроизводит все естественные превращения энергии из одной формы в другую; этим самым он позволяет полностью предвидеть будущее развитие явлений.

С установлением этого нового закона достигается создание необходимых основ механики. Все, что мы можем только добавить к этому закону, — это математические выводы и некоторые упрощения или вспомогательные обозначения, которые, возможно, являются целесообразными, но не обязательными. К этим последним относится и понятие силы, которое в самих основах не фигурировало. Введение понятия силы целесообразно, когда мы рассматриваем не только такие массы, которые связаны с постоянными количествами энергии, но также и такие, которые отдают энергию другим массам или заимствуют ее у них. Однако введение силы производится не на основе новых опытных данных, а с помощью определения, которое может быть сформулировано по-разному. В соответствии с этим и свойства определенных таким образом сил должны устанавливаться не из опыта, а могут быть введены из определения и из основного закона; даже подтверждение этих свойств опытом излишне, так как в этом случае оказалось бы, что имеются сомнения в правильности всей системы. Следовательно, в этой системе понятие силы, как таковой, не может больше создать никаких логических трудностей, а также и при оценке правильности системы не должно приниматься во внимание; это понятие может иметь только влияние на бо́льшую или меньшую целесообразность системы.

Мы должны были бы, следовательно, расположить принципы механики в указанном порядке, чтобы приспособить их к точке зрения учения об энергии. Однако спрашивается, имеет ли созданная таким образом вторая картина какие-либо преимущества перед первой картиной; поэтому мы проследим детальнее ее преимущества и недостатки.

На этот раз в наших интересах исходить в первую очередь из целесообразности, потому что с этой точки зрения всякий успех является наименее сомнительным. Наша вторая картина естественных движений — прежде всего значительно более ясная; она воспроизводит большее число особенностей этих движений, чем первая. Если мы захотим вывести принцип Гамильтона из общих основ механики, мы должны будем добавить к ним некоторые предпосылки о действующих силах и о свойствах возможных неподвижных связей. Эти предпосылки имеют самый общий характер, по тем не менее они обусловливают некоторое количество важных ограничений; выраженных в этом принципе движений. И наоборот, также и из этого принципа может быть выведен ряд отношений, и в особенности взаимоотношений между такими видами возможных сил, которые отсутствуют в принципах первой картины, но которые существуют во второй картине и одновременно, что очень важно, в самой природе. Доказательство, что это именно так, составляет основное содержание и цель работ, которые опубликовал Гельмгольц под заглавием «О физическом значении принципа наименьшего действия». Мы точнее охарактеризуем положение вещей, если скажем, что уже сам факт, который должен быть доказан, является открытием, изложенным в упомянутой работе. В самом деле, понимание того, что из таких общих предпосылок могут быть сделаны такие специальные, важные и удачные выводы, является уже само по себе открытием. На эту работу мы можем, следовательно, ссылаться для иллюстрации нашего утверждения и, поскольку этот труд является в настоящее время выражением величайшего прогресса в физике, мы можем игнорировать вопрос, возможно ли еще ближе подойти к природе вещей, например, в результате ограничения допустимых для потенциальной энергии форм. Мы лучше подчеркнем, что эта вторая картина также и в отношении простоты обходит те опасности, которые так угрожали целесообразности нашей первой картины. Если мы спросим об истинной причине, почему физика в настоящее время предпочитает пользоваться при своих рассмотрениях языком учения об энергии, то мы можем ответить на это так: потому что таким образом она может лучше всего уклониться от рассуждений о вещах, о которых она так мало знает и которые не имеют никакого влияния на сущность рассматриваемых положений.

Мы имели уже случаи заметить, что объяснение явлений на основе силы вынуждает нас постоянно связывать наши рассуждения с рассмотрением отдельных атомов или молекул. В настоящее время мы, во всяком случае, убеждены в том, что весомая материя состоит из атомов; точно так же мы имеем в известных случаях более или менее определенное представление о величине этих атомов и об их движениях. Но форма атомов, их взаимосвязь, их движения — в большинстве случаев все это от нас совершенно скрыто; число атомов во всех случаях необозримо велико. Наше представление об атомах уже само является важным и интересным объектом дальнейшего исследования; но оно ни в коем случае не пригодно для того, чтобы пользоваться им как известной и надежной основой математических теорий. Поэтому такой строгий и глубокий исследователь, каким был Густав Кирхгоф [17], реагировал почти с болезненной раздражительностью, когда он видел, что атомы и их колебания без настоятельной необходимости ставились в центр теоретических рассуждений. Допустим, что произвольно принятые свойства атомов не оказывают влияния на конечный результат. Такое допущение возможно и правильно. Но тем не менее детали самого вывода в значительной степени являются, как можно предположить, ложными и вывод представляет собой только лишь мнимое доказательство. Старая трактовка физики едва ли допускает здесь какой-либо выбор или выход из положения.

Напротив, представления учения об энергии, а вместе с этим и наша вторая картина механики имеют то преимущество, что в предпосылки проблемы включаются только признаки, непосредственно доступные опыту, а также параметры или произвольные координаты рассматриваемых тел; с помощью этих признаков рассмотрения проводятся в конечной и замкнутой форме, а конечный результат этих рассмотрений может быть снова приведен к доступному для наблюдения опыту. Кроме самой энергии в ее немногочисленных формах, в рассмотрение не вводятся никакие вспомогательные конструкции. Наши высказывания могут ограничиться известными уже особенностями рассматриваемых систем тел, без того чтобы мы были поставлены перед необходимостью скрывать наше незнание деталей за произвольными и не имеющими никакого значения гипотезами. Не только конечный результат, но также и все пути к его выводу могут быть правильными и разумными. Вот в чем заключаются преимущества, которые сделали этот метод излюбленным в современной физике и которые свойственны, следовательно, нашей второй картине механики. Пользуясь нашей терминологией, мы характеризуем их как преимущества простоты и, следовательно, целесообразности.

К сожалению, у нас снова возникают сомнения в ценности нашей системы, когда мы ставим вопрос о ее правильности и логической допустимости. Уже сам вопрос о правильности дает повод к оправданным сомнениям. Мы ни в коем случае не можем быть уверены в соответствии рассматриваемой нами системы с природой уже потому, что принцип Гамильтона может быть, как известно, выведен из общепризнанных основ механики Ньютона. Необходимо помнить, что этот вывод может быть сделан только в том случае, если оправдываются известные предпосылки, а также и то, что наша система претендует не только на правильное описание некоторых движений природы, но и утверждает, что она охватывает все движения природы вообще. Таким образом, мы должны исследовать, имеют ли фактически эти особые предпосылки, подобно законам Ньютона, общее значение.

Было бы достаточно единственного примера из природы, который противоречил бы им, чтобы опровергнуть правильность системы как таковой, даже если бы этот пример ни в коей мере не поколебал принципа Гамильтона как общего положения. При этом возникает сомнение не столько в том, охватывает ли наша картина все многообразие сил, сколько в том, охватывает ли она фактически все многообразие жестких связей, которые могут существовать между телами природы.

Применение принципа Гамильтона к какой-либо материальной системе не исключает того, чтобы между выбранными координатами этой системы существовали жесткие связи, но оно требует все же, чтобы эти связи могли быть выражены математически при помощи конечных уравнений между координатами. Появление таких связей, которые могут быть выражены математически только посредством дифференциальных уравнений, недопустимо. Но сама природа, по-видимому, не исключает связей последнего вида, и они появляются, например, тогда, когда трехмерные тела перекатываются без скольжения одно по поверхности другого. Благодаря этой связи, которую мы часто встречаем вокруг нас, положение тел относительно друг друга ограничено только постольку, поскольку они постоянно должны иметь одну общую точку поверхности, но свобода движений тел ограничена еще на одну степень. Следовательно, из этой связи может быть выведено больше уравнений между изменениями координат, чем между самими координатами, и должно существовать по крайней мере одно неинтегрируемое дифференциальное уравнение. К таким случаям принцип Гамильтона неприменим или, выражаясь точнее, математически возможное применение принципа приводит к физически ложным результатам.

Ограничим наши рассуждения простым случаем шара, который, следуя только инерции, катится без скольжения по твердой горизонтальной плоскости; в данном случае можно путем простого рассмотрения, без всяких математических вычислений, охватить не только движения, которые шар действительно может выполнить, но и движения, которые соответствовали бы принципу Гамильтона, согласно которому при постоянной живой силе шар должен достичь заданных положений в кратчайшее время. Можно также без вычисления убедиться в том, что оба вида движений имеют весьма различные особенности. Если мы выберем произвольно начальное и конечное положение шара, то, по-видимому, всегда имеется некоторый переход из одного положения в другое, где время перехода, т. е. интеграл Гамильтона, становится минимумом. В действительности же естественный переход из одного положения в другое невозможен без воздействия сил, если даже выбор начальной скорости совершенно свободен. Но даже в том случае, когда мы выбираем начальное и конечное положение так, что между обоими положениями возможно естественное свободное движение, то оно все же не будет таким движением, которое соответствовало бы минимуму времени. При определенных начальных и конечных положениях разница может быть поразительной. В этом случае шар, который двигается в соответствии с упомянутым принципом, был бы чрезвычайно похож на живое существо, которое целеустремленно двигается к определенному положению, в то время как рядом с ним шар, подчиняющийся закону природы, произвел бы впечатление мертвой, равномерно перекатывающейся массы.

Положение не изменилось бы, если бы мы вместо принципа Гамильтона воспользовались принципом действия или другим интегральным принципом, так как все эти принципы имеют незначительное различие в своем значении, а в рассматриваемом здесь отношении ведут себя совершенно одинаково. Впрочем, путь, который мы можем избрать, чтобы отстоять систему и опровергнуть упрек в ее неправильности, заранее предначертан. Мы должны отрицать, что жесткие связи упомянутого вида действительно со всей строгостью существуют в природе. Мы должны показать, что каждое так называемое качение без скольжения в действительности является качением с незначительным скольжением, т. е. процессом трения. Мы можем сослаться на то, что процессы в трущихся поверхностях относятся вообще к таким процессам, которые не могут быть приведены к ясно понимаемым причинам, но для которых действующие силы определены только эмпирически; поэтому вся проблема относится к таким, при рассмотрении которых в настоящее время еще невозможно обойтись без использования понятия силы и вместе с этим нельзя избежать обычных методов механики.

Эти доводы в защиту отстаиваемых положений не являются, правда, убедительными, ибо качение без скольжения не противоречит ни принципу энергии, ни какому-либо из законов, известных физике; этот процесс осуществляется в чувственном мире с таким большим приближением, что на предпосылке его точного выполнения основаны даже интегрирующие машины. Поэтому мы едва ли вправе исключать существование этого процесса как невозможное, и тем более, исходя из механики еще неизвестных систем, каковыми являются атомы или части эфира. Но если даже мы согласимся, что эти связи осуществляются в природе лишь приближенно, то и тогда недостаточность в этих случаях принципа Гамильтона поставит нас перед трудностями. От каждого основного закона нашей системы механики мы должны требовать, чтобы он, будучи применен к задаче с приблизительно точными условиями, всегда давал бы приблизительно точные результаты, но не совершенно неверные. Наконец, так как все жесткие связи, которые мы заимствуем у природы и вводим в вычисление, только приближенно соответствуют действительным условиям, то мы совершенно не будем уверены в том, к каким из них мы можем вообще применить закон, а к каким — нет. Мы не будем, однако, полностью отвергать доводы в защиту упомянутых положений; мы предупредительно согласимся с тем, что высказанные сомнения касаются только целесообразности системы, но не ее правильности, так что вытекающие отсюда недостатки могут компенсироваться другими преимуществами.

Но настоящие трудности встают перед нами только тогда, когда мы пытаемся упорядочить основные положения системы таким образом, чтобы они со всей строгостью удовлетворяли требованию логической допустимости. Мы можем при введении понятия энергии исходить из понятия сил, затем перейти к функции силы, отсюда — к потенциальной энергии и, наконец, к энергии вообще. Такой порядок соответствовал бы первому изложению механики. Однако понятие энергии можно ввести и другим путем. Не предполагая заранее собственно механических рассуждений, мы сошлемся прежде всего на тот простой непосредственный опыт, при помощи которого нам хотелось бы вообще определить существование запаса энергии и его размеры. Выше мы только приняли, но не доказали, что это возможно.

Многие выдающиеся физики так усиленно пытаются в настоящее время приписать энергии свойства вещества, что принимают, будто любая, даже малейшая часть энергии связана в любой момент с определенным местом в пространстве и при всякой перемене этого места и при всех превращениях энергии в новые формы все же сохраняет свою идентичность. Эти физики должны неизбежно стоять на той точке зрения, что определения требуемого вида могут действительно существовать, и поэтому допустимо принимать их возможность. Если бы, однако, нам самим пришлось установить конкретную форму, которая удовлетворяла бы нас и могла бы рассчитывать на всеобщее признание, то мы оказались бы в затруднительном положении, так как такой способ представления, по-видимому, не привел еще к удовлетворительному и окончательному результату. Особая трудность обусловливается уже тем обстоятельством, что энергия, имеющая, якобы, характер вещества, проявляется в двух совершенно различных формах, которые соответствуют кинетической и потенциальной формам. Кинетическая энергия не нуждается в сущности ни в каком новом основном определении, так как она может быть выведена из понятий скорости и массы; потенциальная же энергия, которая требует самостоятельного определения, не поддается вначале никакому определению, которое приписывало бы ей свойства вещества. Некоторое количество какого-либо вещества представляет собой неизбежно положительную величину; потенциальную же энергию, содержащуюся в какой-либо системе, мы без всяких опасений принимаем и в качестве отрицательной величины. Если какое-либо аналитическое выражение обозначает некоторое количество вещества, то аддитивная постоянная в этом выражении является такой же важной, как и все остальное; в выражении же потенциальной энергии системы аддитивная постоянная не имеет никакого значения. Наконец, содержание вещества в физической системе может зависеть только от состояния самой системы; содержание же потенциальной энергии в данной материи зависит от существования отдаленных масс, которые, возможно, никогда не оказывали влияния на систему. Если Вселенная и вместе с этим количество упомянутых отдаленных масс бесконечно, то существует и бесконечное число многочисленных форм потенциальной энергии в конечных количествах материи. Все это — затруднения, которые следовало бы устранить или обойти при помощи искомого определения энергии. Хотя мы и не собираемся утверждать, что это невозможно, мы все же не имеем возможности считать, что затруднения фактически устранены; самое осторожное — считать пока открытым вопрос о том, может ли рассматриваемая система вообще быть представлена в логически безупречной форме.

Возможно, небесполезно проанализировать здесь также вопрос, справедливо ли другое возражение, которое можно было бы выдвинуть против допустимости рассматриваемой здесь системы. Если картина известных внешних вещей должна быть допустимой в нашем смысле, то ее черты должны не только гармонировать между собой, но не должны также противоречить чертам других картин, твердо установившихся уже в нашем сознании. Затем можно было бы еще утверждать: немыслимо, чтобы принцип Гамильтона или другой принцип аналогичного характера представлял собой фактически основной закон механики и вместе с этим основной закон природы; ибо предпосылкой основного закона являются простота и ясность, в то время как принцип Гамильтона, если его детально проанализировать, представляет собой чрезвычайно сложное высказывание. Он не только ставит происходящее в настоящий момент движение в зависимость от последствий, которые могут выявиться в будущем, предполагая существование у неживой природы намерений, но, что еще хуже, он предполагает существование у природы бессмысленных намерений. Ибо интеграл, минимум которого требует принцип Гамильтона, не имеет простого физического значения; кроме того, представляется непонятной целью природы приведение математического выражения к минимуму или его вариации к нулю.

Обычный ответ, который современная физика всегда готова дать на подобного рода нападки, заключается в том, что предпосылки, на которых основываются эти рассмотрения, имеют метафизическое происхождение, но физика отказалась от них и не считает больше своей обязанностью удовлетворять требования метафизики. Она не придает больше никакого значения соображениям, которые

в свое время высказывались метафизиками в пользу принципов, указывающих на цель в природе; точно также она не может теперь прислушиваться к упрекам метафизического характера по адресу этих принципов. Если бы мы должны были решать вопрос, кто прав, то мы не поступили бы неразумно, если бы примкнули к нападающему, а не к защищаемуся. Никакое сомнение, которое вообще может произвести на нас впечатление, не может быть рассеяно тем, что его назовут метафизическим; каждый пытливый ум имеет, как таковой, потребности, которые естествоиспытатель называет обычно метафизическими.

Кроме того, в нашем случае, как и во всех аналогичных случаях, может быть легко обнаружен здравый и вполне оправданный источник нашей потребности. Мы не можем, правда, a priori требовать от природы простоты, мы не можем также судить о том, что просто в ее смысле. Однако мы можем предписывать правила картинам, которые мы сами создаем себе о природе, как предметам нашего собственного творчества. Теперь мы вправе утверждать, что, если наши картины хорошо приспособлены к вещам, действительные отношения между вещами должны выражаться простыми отношениями между образами. Если же действительные отношения между вещами могут быть выражены только при помощи сложных и даже непонятных для неподготовленного ума отношений между образами, то мы говорим, что эти картины недостаточно приспособлены к вещам. Наше требование простоты касается, следовательно, не природы, а картин, которые мы создаем себе о ней. Возражение против сложной формулировки основного закона выражает только убеждение, что он может быть сформулирован в более простой форме надлежащим выбором основных представлений, если содержание высказывания правильно и достаточно широко. Другим выражением этого же убеждения являются пробуждающиеся вновь желания найти путь от внешнего понимания такого закона к его более глубокому и существенному смыслу, в существовании которого мы убеждены. Если эта концепция правильна, то изложенное возражение порождает действительно справедливые сомнения в отношении системы; но оно касается тогда не столько ее допустимости, сколько ее целесообразности, и должно было бы приниматься во внимание при оценке этой последней. Тем не менее нет необходимости возвращаться еще раз к ее обсуждению.

Если мы обобщим еще раз то, что смогли сказать о преимуществах второй картины, то все же не почувствуем полного удовлетворения. Хотя все направление современной физики толкает нас на то, чтобы выдвинуть на передний план понятие энергии и использовать его также в механике как краеугольный камень созданной нами системы, тем не менее остается более чем сомнительным, можем ли мы при этом избежать трудностей и шероховатостей, с которыми мы сталкивались в первой картине механики. Этому второму методу изложения я уделил фактически больше внимания не потому, чтобы побудить встать именно на этот путь, а скорее потому, чтобы указать, по каким соображениям я от него отказался, после того как вначале сам делал попытки пойти по нему.

3

Третья система принципов механики — это как раз та система, которая подробно изложена в основной части этой книги, но главные черты которой мы изложим уже здесь, во введении, чтобы подвергнуть их критике в том же смысле, как и первые две части. От первых двух систем она отличается в основном тем, что исходит только из трех независимых основных представлений: из представлений времени, пространства и массы. Поэтому задача третьей системы сводится к установлению естественных отношений между этими тремя представлениями и только между ними. Четвертое понятие — понятие силы или энергии, с которым раньше были связаны все затруднения, устранено как самостоятельное основное представление. Замечание, что три независимые друг от друга представления необходимы, но также и достаточны для развития механики, уже Кирхгоф положил в основу своего учебника механики. Все то, что выпадает вместе с этим из основных представлений, не может, безусловно, оставаться без всякой замены. В нашем изложении мы попытаемся восполнить возникший пробел использованием гипотезы, которая выдвигается здесь не впервые, но которую не было принято вводить в элементы механики. Сущность этой гипотезы сводится к следующему.

Если мы попытаемся понять движение окружающих нас тел и привести их к простым и понятным правилам, принимая в расчет только то, что непосредственно происходит у нас на глазах, то наша попытка в общем потерпит неудачу. Вскоре мы убеждаемся, что совокупность того, что мы можем видеть и ощущать, не создает еще закономерного мира, в котором одинаковые состояния имеют всегда одинаковые последствия. Мы убеждаемся, что многообразие действительного мира должно быть бо́льшим, чем многообразие мира, непосредственно доступного нашим чувствам.

Если мы хотим получить законченную, замкнутую в себе, закономерную картину мира, то мы должны допускать за вещами, которые мы видим, еще другие, невидимые вещи и искать за пределами наших чувств еще скрытые факторы. В первых двух картинах мы признали эти лежащие глубже влияния и представляли их себе как сущности особого вида; поэтому для воспроизведения их мы создали понятие силы и энергии. Но перед нами открыт еще и другой путь. Мы можем допустить, что одновременно действует нечто скрытое, и в то же время отвергать, что это нечто принадлежит к какой-то особой категории. Мы можем принять, что также и скрытое является не чем иным, как опять-таки движением и массой, а именно, таким движением и такой массой, которые отличаются от видимого не по своему существу, а только в отношении нас самих и наших обычных средств восприятия. Это воззрение и является как раз нашей гипотезой. Мы принимаем, следовательно, что наряду с видимыми массами Вселенной можно представить себе еще другие, подчиняющиеся тем же законам массы такого вида и что благодаря им закономерность и наглядность значительно выигрывают; при этом мы принимаем, что упомянутая гипотеза возможна как вообще, так и во всех частных случаях, и что поэтому совсем не существует других причин явлений, кроме тех, которые допущены здесь. То, что мы называем обычно силой или энергией, представляет собой в нашем понимании не что иное, как действие массы и движения; однако оно не всегда может быть таким действием массы и движения, которые могут быть доказаны в грубо чувственной форме.

Такое объяснение силы из процессов движения называют обычно динамическим, и можно утверждать, что в настоящее время физика относится в высшей степени благосклонно к такого рода объяснениям. Силы теплоты были уверенно сведены к скрытым движениям ощутимых масс. Благодаря заслугам Максвелла [18], стало почти убеждением предположение, что в электродинамических силах имеет место действие движения скрытых масс. Лорд Кельвин охотно кладет в основу своих рассуждений возможность динамических объяснений сил; в своей теории вихревой природы атомов он пытался дать картину Вселенной, соответствующую этому представлению. В своем исследовании циклических систем Гельмгольц подробно и в целях общего применения рассмотрел важнейшую форму скрытого движения; благодаря ему выражения «скрытая» масса, «скрытое» движение получили на немецком языке значение технических терминов. Но если эта гипотеза обладает способностью постепенно исключить из механики таинственные силы, то она может также воспрепятствовать тому, чтобы они вообще попали в механику. И если использование гипотезы для первой цели соответствует концепции современной физики, то то же самое должно иметь силу в отношении использования ее для последней цели. Это — руководящая мысль, из которой мы исходим и в результате развития которой возникает картина, которую мы обозначили третьей и общие контуры которой мы сейчас проследим.

Сначала мы вводим, следовательно, три независимых основных понятия: времени, пространства и массы, как объекты опыта, указывая вместе с этим, при помощи каких конкретных чувственных восприятий должны быть определены, согласно нашему представлению, отрезки времени, масса и пространственные величины. Что касается масс, то мы сохраняем за собой право вводить наряду с чувственно воспринимаемыми массами также и скрытые массы, которые соответствуют выдвинутой выше гипотезе. Мы устанавливаем затем соотношения, которые всегда имеются налицо между конкретными опытными данными и которые мы должны зафиксировать как существенные взаимоотношения между основными понятиями. Естественно, что мы связываем вначале основные понятия попарно. Отношения, которые существуют только между пространством и временем, принадлежат к кинематике. Только между массой и временем не существует никакой связи. Напротив, между массой и пространством устанавливается ряд важных эмпирических отношений. А именно, мы находим между массой природы некоторые чисто пространственные связи, которые состоят в том, что с самого начала для всех моментов времени, следовательно, независимо от времени, этим массам предписаны определенные положения и определенные изменения как возможные, а все другие — как невозможные. Затем, в отношении этих взаимосвязей мы можем вообще утверждать, что они касаются только относительного положения масс между собой, и далее, что они удовлетворяют определенным условиям непрерывности, которые находят свое математическое выражение в том, что сами связи всегда могут быть выражены однородными линейными уравнениями между первыми дифференциалами тех величин, которыми мы обозначили положение масс.

Исследование связей определенных материальных систем в деталях является задачей не механики, а экспериментальной физики; характерными признаками, по которым отличаются друг от друга различные материальные системы природы, являются, по нашему представлению, исключительно лишь связи между их массами.

До сих пор мы связывали между собой только два основных понятия; теперь обращаемся собственно к механике в более узком смысле, где должны одновременно фигурировать все три основные понятия. Нам удалось сформулировать их эмпирическую, имеющую общее значение связь в форме одного единственного основного закона, имеющего очень близкую аналогию с обычным законом энергии. Он может быть выражен, если пользоваться нашей терминологией, в следующей форме: каждое естественное движение самостоятельной материальной системы состоит в том, что система движется с постоянной скоростью по одному из своих прямейших путей. Это высказывание, становится, однако, понятным только после того, как должным образом уточнена употребляемая здесь математическая терминология; однако смысл положения может быть выражен также и на обычном языке механики. А именно, это положение просто объединяет обычный закон энергии и принцип наименьшего принуждения Гаусса в одно единственное утверждение. Оно, следовательно, гласит, что если бы связи системы могли быть на один момент разрушены, то ее массы рассеялись бы в прямолинейном и равномерном движении, но так как разрушить связи невозможно, то фактические движения по крайней мере приближаются к этому движению настолько, насколько это возможно. Этот основной закон является в нашей картине не только первым опытным принципом собственно механики, но также и ее последним принципом. Из него и допущенной гипотезы скрытых масс и закономерных связей мы чисто дедуктивно выводим основное содержание механики.

Вокруг основного закона мы группируем остальные общие принципы по признаку их родства с ним и между собой как следствие или как частичное высказывание. Мы попытаемся показать, что при такой систематизации содержание нашей науки оказывается ничуть не менее богатым и многообразным, чем содержание механики, построенной на четырех основных представлениях, и во всяком случае не менее богатым и разнообразным, чем это требуется для описания природы. Впрочем также и здесь оказывается целесообразным ввести понятие силы. Однако сила фигурирует здесь не как нечто независимое от нас и чуждое нам, а как математическая вспомогательная конструкция, свойства которой находятся в полной зависимости от нас и которая, следовательно, не может иметь для нас ничего загадочного. А именно, в соответствии с основным законом, везде, где два тела принадлежат к одной и той же системе, движение одного тела должно быть одновременно определено движением другого. Понятие силы возникает теперь в результате того, что мы, по понятным соображениям, находим целесообразным разложить это определение одного движения с помощью другого движения на две стадии и сказать себе: движение первого тела определяет вначале некоторую силу, и последняя определяет уже движение второго тела. Таким образом, каждая сила становится всегда причиной какого-либо движения, но на том же основании она одновременно является всегда следствием какого-либо движения; точнее говоря, она становится мыслимым промежуточным звеном между двумя движениями. Ясно, что при таком понимании общие свойства сил должны с логической необходимостью вытекать из основного закона, и если мы видим, что эти свойства подтверждаются на опыте, то это не должно нас нисколько удивлять, если мы не сомневаемся в нашем основном законе. Точно также и с понятием энергии, а также и с другими вспомогательными конструкциями, которые мы вынуждены вводить.

То, что мы сказали до сих пор, касалось только содержания рассматриваемой нами картины и исчерпывает это содержание в рамках данного введения; будет целесообразно коротко остановиться и на особой математической форме, в которой мы будем излагать эту картину. Содержание картины совершенно не зависит от этой формы, и будет, возможно, не совсем разумно, если мы будем воспроизводить в несколько необычной форме содержание, отклоняющееся от традиционного. Поэтому как форма, так и содержание, выбранное нами, очень незначительно отличаются от формы и содержания, которые хорошо нам известны; между тем, именно эта форма и это содержание так хорошо подходят друг к другу, что их преимущества взаимно пополняют друг друга.

Существенный признак используемой нами терминологии состоит в том, что она с самого начала выражает и рассматривает системы точек, а не исходит каждый раз из отдельных точек. Каждому хорошо известны выражения: «положение системы точек» и «движение системы точек». Не будет неестественным следствием этой терминологии, если мы обозначим совокупность пройденных при движении положений системы как ее путь. Каждая наименьшая часть этого пути будет тогда элементом пути. Из двух элементов пути один может быть частью другого; в этом случае они различаются по величине и только по величине. Два элемента пути, которые исходят из одного и того же положения, могут, однако, принадлежать также к двум различным путям; в этом случае ни один из них не может быть частью другого, и они, следовательно, различаются не только по величине; поэтому мы говорим, что они имеют также различные направления.

Правда, этим высказыванием еще не определены однозначно для движения системы понятия «величина» и «направление»; но мы можем восполнить наше определение геометрически или аналитически таким образом, что они не окажутся в противоречии ни между собой, ни с изложенным выше и что одновременно определенные величины в геометрии системы будут точно соответствовать тем величинам, которые мы обозначаем в геометрии точки теми же самыми терминами и с которыми они постоянно будут совпадать, как только система будет приводиться к точке.

Если, однако, понятия «величина» и «направление» уже определены, то естественно назвать путь системы прямым, если все его элементы имеют одинаковое направление, и кривым, если направление элементов изменяется от положения к положению. В качестве критерия кривизны напрашивается сама по себе, как и в геометрии точки, скорость изменения направления с изменением положения. Этим определением уже выражен ряд соотношений, и их число возрастает, когда свобода движения рассматриваемой системы ограничена ее связями. В этом случае особенно обращают на себя внимание некоторые классы путей, которые выделяются из всех возможных путей особыми простыми свойствами. Сюда относятся прежде всего те пути, которые во всех своих положениях искривлены так незначительно, как это только возможно, и которые мы называем прямейшими путями системы. Именно о них речь идет в основном законе, и именно о них мы упоминали выше, когда встал вопрос об основном законе. Затем сюда принадлежат пути, образующие кратчайшую связь между какими-либо двумя положениями и которые мы обозначаем как кратчайшие пути системы.

В известных условиях понятие прямейших и кратчайших путей совпадает. Это соотношение будет нам вполне понятно, если мы вспомним теорию поверхностей, но оно, безусловно, не имеет общего значения при всех условиях. Перечисление и систематизация всех возникающих при этом соотношений относится к геометрии системы точек, а разработка этой геометрии представляет особый математический интерес; мы займемся этим вопросом только постольку, поскольку этого требует стоящая в настоящее время перед нами цель физического применения.

Так как система n-точек выражает $3n$-многообразие движения, которое, однако, может быть уменьшено связями системы до любого произвольного числа, то в результате возникает большое число аналогий с геометрией многомерного пространства, причем эти аналогии заходят отчасти так далеко, что те же самые положения и обозначения могут иметь место как здесь, так и там. Но в наших интересах подчеркнуть, что эти аналогии имеют только формальное значение, и наши рассмотрения, несмотря на их несколько необычную форму, относятся исключительно к конкретным образам пространства нашего чувственного мира и, следовательно, все наши высказывания выражают возможные эмпирические данные и, если бы это было необходимо, они могли бы быть подтверждены непосредственно на опыте, а именно, измерением на моделях. Следовательно, у нас нет оснований бояться упрека, что при создании эмпирической науки мы фактически оторвались от мира опыта.

Но мы должны ответить на вопрос, оправдывает ли себя широкое применение новой и необычной терминологии и какое преимущество мы можем от этого ожидать. Отвечая на этот вопрос, назовем в качестве первого преимущества большую простоту и краткость, с которой может быть воспроизведено большинство общих и широких высказываний. Фактически положения, относящиеся к целым системам, не требуют ни большего числа слов, ни большего количества понятий, чем те, которые были высказаны, если бы мы пользовались обычной терминологией для характеристики одной единственной точки. Механика материальной системы больше не представляется здесь расширенной или усложненной механикой отдельной точки, механика же точки отпадает как предмет самостоятельного исследования или же появляется только попутно как упрощение или частный случай механики системы. Если последует упрек, что эта простота создана искусственно, то мы ответим, что не существует никакого другого метода создать простые соотношения, кроме искусственного и глубоко продуманного приспособления наших представлений к описываемым соотношениям. Если же в этом упреке об искусственности будут делать ударение на побочный смысл искомого и неестественного, то на это мы можем возразить, что с бо́льшим основанием, пожалуй, можно было бы считать естественным и понятным рассмотрение целых систем, а не отдельных точек. Ибо в действительности материальная система дана нам непосредственно, а отдельная точка массы является абстракцией; всякий действительный опыт приобретается непосредственно только на системах, а опыт, касающийся простых точек, выводится из него путем умозаключений.

Вторым, правда, не очень существенным преимуществом, является форма, которая может быть придана основному закону при его математическом выражении. Без этого математического выражения мы должны были бы разбить его на первый закон Ньютона и на принцип наименьшего принуждения Гаусса [19]. Правда, оба они, взятые вместе, представляли бы в точности одни и те же факты, но наряду с этим они выразили бы в форме намека немного больше и это немногое было бы уже лишним.

Во-первых, они породили бы чуждые для нашей механики представления, что связи материальных систем могут быть нарушены, хотя мы и охарактеризовали их как существующие с самого начала и как совершенно неразрушимые.

Во-вторых, при использовании принципа Гаусса нельзя избежать того, чтобы не возникло одновременно представление, что в данном случае имеется стремление сообщить не только о факте, но и о причине, порождающей его.

Нельзя утверждать, что природа всегда сохраняет величину, которую называют принуждением, столь малой, как это только возможно, не намекая, что это происходит именно потому, что упомянутая величина является для природы принуждением, т. е. чувством неохоты. Нельзя утверждать, что природа поступает, как разумный калькулятор, который обобщает наблюдения, не намекая на то, что как здесь, так и там в основе явления лежит детально продуманное намерение. Именно в такого рода отклонениях и заключается особая привлекательность и сам Гаусс подчеркнул это,

выражая удовлетворение своим важным для механики открытием. И все же мы должны признать, что эта привлекательность является лишь заигрыванием с таинственным; мы сами не верим серьезно в возможность решать такого рода намеками мировую загадку.

Наш собственный основной закон совершенно свободен от таких намеков. Принимая в точности форму обычного закона инерции, он выражает, подобно этому закону, голый факт без всякой претензии на его обоснование. Хотя он представляется более бедным и неприкрашенным, зато в такой же степени более честным и правдивым. Но, возможно, пристрастие к незначительному изменению, которое я сам внес в принцип Гаусса, побуждает меня к тому, чтобы я усмотрел в нем преимущества, которые скрыты для посторонних глаз. Однако, как мне кажется, каждый безоговорочно согласится, если я в качестве третьего преимущества нашего метода укажу, что этот метод бросает яркий свет на разработанный Гамильтоном способ рассмотрения проблем механики при помощи характеристических функций.

За 60 лет своего существования этот метод получил достаточное признание и славу; однако в большинстве случаев он рассматривался и трактовался как новая отрасль механики, рост и развитие которой должны идти параллельно с обычными методами механики и независимо от них. Однако в нашей форме математического выражения метод Гамильтона не носит характера параллельной науки, а представляет собой прямое, естественное и, так сказать, само собой разумеющееся продолжение элементарных высказываний во всех тех случаях, когда он вообще применим. Наш метод выражения ярко оттеняет тот факт, что метод изложения Гамильтона скрывает свои корни не в особых физических основах механики, как это обычно принимают, но что он, собственно говоря, является чисто геометрическим методом, который может быть обоснован и развит совершенно независимо от механики и который не находится с ней в более тесной связи, чем любое другое используемое механикой геометрическое познание. Впрочем, математики давно уже подметили, что метод Гамильтона содержит чисто геометрические истины, и для четкого выражения последних этот метод требует своеобразной, приспособленной к нему терминологии. Этот факт нашел выражение, правда, в несколько запутанной форме, в аналогиях, которые были установлены при сопоставлении идей Гамильтона в обычной механике и в геометрии многомерного пространства. Наша терминология дает простое и понятное объяснение этим аналогиям; она дает также возможность воспользоваться преимуществами этого объяснения и в то же время она избегает той неестественности, которая выражается в слиянии одного раздела физики с абстракциями, выходящими за пределы наших чувств.

Мы описали нашу третью картину механики в отношении содержания и формы, насколько это было возможно, не затрагивая содержания самой книги, и, в то же время, насколько этого было достаточно, чтобы ответить на вопрос о ее допустимости, правильности и целесообразности. Что же касается логической допустимости нарисованной картины, то мне кажется, что она удовлетворяет даже самым строгим требованиям, и я надеюсь, что это мнение встретит поддержку. Я придаю этому преимуществу, и только этому преимуществу изложения, максимальное значение.

Является ли нарисованная картина более целесообразной, чем другая, способна ли она охватить весь будущий опыт, охватывает ли она весь настоящий опыт — все это представляется мне совершенно несущественным по сравнению с вопросом, является ли она замкнутой в себе, чистой и свободной от противоречий. Ибо я пытался нарисовать ее не потому, что механика оказалась недостаточно целесообразной в отношении своих применений, и не потому, что она, якобы, оказалась в противоречии с опытом, но исключительно, чтобы освободиться от угнетающего сознания, что ее элементы не свободны от темных и непонятных для меня мест.

Я хотел найти не единственно возможную картину механических процессов и в то же время не самую лучшую, а только лишь вообще понятную картину и показать на примере, что такая картина возможна, и как она примерно должна выглядеть. Правда, достигнуть совершенства мы не в состоянии ни в одном направлении, и я должен признать, что несмотря на огромный труд, полученная картина

не во всех деталях убедительно ясна, что она вызывает сомнения и нуждается в защите. Из всех возражений общего характера только одно единственное, как мне кажется, достаточно серьезно, чтобы стоило остановиться на нем с тем, чтобы отвергнуть его. Это возражение касается характера жестких связей, которые мы принимаем между массами и без которых мы ни в коем случае не можем обойтись в нашей системе.

Многие физики вначале будут придерживаться той точки зрения, что одновременно с этими связями в элементы механики введены силы, причем это сделано тайком и, следовательно, нельзя считать допустимым. Ибо — как они будут утверждать — жесткие связи немыслимы без сил; они не могут осуществиться иначе, чем при помощи сил. На это мы ответим: Ваше утверждение правильно с точки зрения обычной механики, но оно неправильно, если отказаться от этой точки зрения; оно не представляется убедительным человеку, который рассматривает вопрос беспристрастно, как будто бы в первый раз.

Если мы допустим, что расстояние между двумя определенными точечными массами остается во все моменты времени и при всех условиях постоянным, безразлично, каким методом мы это устанавливаем, то мы сможем выразить этот факт в форме высказывания, не используя никаких других представлений, кроме пространственных, и он сохранит свое значение для предвидения будущего опыта и для всех других целей независимо от возможного объяснения, которое имеется в нашем распоряжении. Ценность факта ни в коем случае не возрастает, и наше понимание этого факта ни в коем случае не становится более глубоким, если мы сформулируем его следующим образом: между этими массами действует сила, которая сохраняет расстояние между ними постоянным, или: между массами действует сила, которая мешает тому, чтобы расстояние между ними отклонялось от постоянного значения. Но — снова возразят нам — мы видим, что это последнее объяснение, хотя оно и представляет собой только лишь смешную перефразировку, все же правильно. Ибо все связи действительного мира только приблизительно жестки, и иллюзия жесткости достигается только тем, что силы упругости беспрерывно все снова и снова уничтожают незначительные отклонения от состояния покоя. На это мы отвечаем: о таких жестких связях осязаемых тел, которые осуществлены только лишь приближенно, наша механика, само собой разумеется, выскажет в качестве факта только лишь то, что они удовлетворяются приближенно, а для этого высказывания, к которому сводится весь вопрос, понятия силы не требуется.

Но если мы в нашей механике попытаемся учесть во втором приближении отклонения, а вместе с этим и силы упругости, то мы должны будем для них, как и для всех других сил, дать динамическое объяснение. В поисках действительно жестких связей мы, возможно, будем вынуждены погрузиться в мир атомов; но такие рассуждения здесь уже неуместны, они не касаются больше вопроса, допустимо ли логически рассматривать жесткие связи независимо от сил. Мы стремимся только доказать и надеемся, что уже доказали, что на этот вопрос следует дать положительный ответ. Если это твердо установлено, то мы можем вывести из природы жестких связей свойства сил и их поведения, не греша вместе с этим в отношении petitio principii. Возможны и другие возражения такого же характера, но, как я думаю, и они также могут быть отвергнуты аналогичным образом.

Желание доказать логическую чистоту системы также и во всех ее деталях я выразил тем, что использовал для изложения старую, синтетическую форму. Эта форма представляет для нашей цели определенное преимущество, состоящее в том, что она вынуждает нас каждому существенно важному высказыванию предпосылать намеченное заранее логическое определенное обозначение. Благодаря этому совершенно исключаются удобные оговорки и различные толкования, к которым так охотно прибегают в обычном языке при наличии богатства имеющихся в нем сочетаний. Важнейшее преимущество выбранной формы состоит, однако, в том, что она всегда основывается на уже доказанном и никогда не ссылается на то, что еще должно быть доказано в дальнейшем, так что можно с уверенностью полагаться на всю цепь доказательств в целом, если достаточно хорошо проверено каждое отдельное звено. В этом отношении я со всей строгостью старался удовлетворить всем требованиям этого вида изложения. Впрочем, само собой разумеется, что одна только форма не может предотвратить ошибки или некоторые упущения, и я прошу не судить меня слишком строго за вкравшиеся, возможно, ошибки при изложении этой работы, перед которой поставлены достаточно высокие требования. Я надеюсь, что эти ошибки всегда можно будет исправить и что они не затрагивают ни одного существенного момента. Впрочем, иногда, во избежание слишком большой широты, я сознательно воздерживался от той строгости, которую, собственно, требует эта форма изложения.

Конечно, не требуется особого обоснования тому, что я предпослал рассмотрениям механики, которая зависит от физического опыта, соотношения, являющиеся лишь следствием выбранных определений и математической необходимости, и которые, если они вообще связаны с опытом, то во всяком случае в ином смысле, чем упомянутые выше соотношения. Впрочем, читателю не мешает начать со второй книги. Четкая аналогия с механикой отдельной точки и знакомый материал дадут ему возможность легко улавливать смысл рассматриваемых положений. Если же он признает целесообразность используемой терминологии, то вместе с этим еще не упущено время, чтобы убедиться по первой книге в ее допустимости.

Если мы обратимся теперь ко второму существенному требованию, которому должна удовлетворять наша картина, то вначале представится несомненным, что наша система правильно описывает многие естественные достижения. Но, согласно требованиям системы, этого недостаточно; в качестве необходимого дополнения наше утверждение должно быть расширено так, чтобы система охватывала все без исключения естественные движения. По-моему, это также может иметь место, хотя бы в том смысле, что в настоящее время нельзя указать никаких определенных явлений, которые противоречили бы системе.

Конечно, распространение строгой проверки на все явления невозможно, и поэтому система несколько выходит за пределы надежного опыта и носит, следовательно, характер гипотезы, которая принимается в виде пробы и которая стоит перед возможностью внезапного опровержения единственным примером или перед постепенным подтверждением на основе очень большого числа примеров. За пределы надежного опыта она выходит в основном в двух случаях: первый случай касается нашего ограничения возможных связей, второй — динамического объяснения сил.

Вправе ли мы утверждать, что все связи природы могут быть выражены линейными дифференциальными уравнениями первого порядка? Это допущение не является для нас второстепенным, т. е. таким, которое мы могли бы опустить; без него перестала бы существовать и наша механика, ибо сомнительно, остался ли бы наш основной закон применимым ко всем связям самого общего вида. Тем не менее связи более общего вида не только можно себе представить, но они допускаются без всяких сомнений в обычной механике. Здесь нам ничто не мешает исследовать движение точки, путь которой ограничен единственным условием, по которому он образует с некоторой заданной плоскостью заданный угол, или по которому радиус его кривизны всегда пропорционален заданной длине. Эти условия уже не относятся больше к тем, которые допускает наша механика. Но откуда у нас уверенность в том, что они исключены также и природой вещей? Мы можем указать на то, что напрасны все попытки осуществить эти или подобные им связи при помощи механизмов, которые могут быть сконструированы, и в этом отношении мы можем положиться на огромный авторитет Гельмгольца. Но в любом примере могут ускользнуть от внимания некоторые возможности, и даже весьма большого числа примеров недостаточно, чтобы доказать общее утверждение.

Мне кажется, что с бо́льшим правом мы можем обосновать наше убеждение на том, что все связи системы, которые выходят за пределы нашей механики, обозначают в том или ином смысле прерывный ряд ее возможных движений, но что в действительности самый общий опыт показывает, что в бесконечно малом природа всегда и в любом смысле обнаруживает непрерывность. Это и есть тот опыт, который в старом высказывании «Natura non facit saltus» (природа не делает скачков) перешел в твердое убеждение. Поэтому я придавал особое значение тому, чтобы определять допустимость связей исключительно лишь при помощи их непрерывности и только из непрерывности выводить их свойства, заключающиеся в том, что они могут быть выражены уравнениями определенной формы. Между тем, подлинная уверенность этим не достигается. Ибо неопределенность старого принципа заставляет сомневаться, достаточно ли твердо установлены границы, в которых он сохраняет силу, в какой степени он вообще является результатом действительного опыта, и в какой — результатом произвольных предпосылок. Поэтому честнее будет признать, что наше понятие допустимых связей носит характер гипотезы, принятой в виде пробы.

Совершенно аналогично обстоит дело и в отношении динамического объяснения сил. Правда, мы можем показать, что известные классы скрытых движений образуют силы, которые, так же как и силы природы, действующие на расстоянии, могут быть выражены с произвольным приближением как производные силовых функций. Оказывается также, что формы этих силовых функций могут иметь весьма общий характер, и мы фактически не устанавливаем для них никаких ограничений. Но, с другой стороны, остается еще недоказанным, может ли быть получена указанным путем любая форма силовой функции, и поэтому остается открытым вопрос, не существует ли среди форм, встречающихся в природе, хотя бы одна, которая не поддается такому объяснению. Также и здесь следует еще подождать, опровергнет ли время наше допущение или же при условии отсутствия такого опровержения это допущение будет делаться все более и более вероятным. Хороший признак мы можем усматривать в том, что точка зрения многих выдающихся физиков приближается все больше и больше к этой гипотезе. Напомню еще раз вихревую теорию атомов лорда Кельвина, которая рисует нам картину материального мира, находящуюся в полном соответствии с принципами нашей механики. И все же наша механика ни в коем случае не требует такой большой простоты и такого ограничения предпосылок, какие ввел лорд Кельвин. Мы также не отклонились бы от наших основных положений, если бы приняли, что вихри кружатся вокруг твердых или сгибаемых, но не растяжимых ядер;

также и наполняющую мир среду мы могли бы ограничить вместо простой несжимаемости значительно более сложными условиями, самую общую форму которых еще нужно было бы исследовать. Следовательно, не исключено, что гипотезы, допущенные нашей механикой, достаточны для объяснения рассматриваемых явлений.

Но и здесь мы должны сделать одну оговорку. Наша предосторожность несомненно будет оправдана, если мы в тексте четко ограничим область нашей механики неживой природой и совершенно открытым оставим вопрос, в какой степени законы механики выходят за ее пределы. В действительности дело обстоит так, что мы не можем ни утверждать, что внутренние процессы живых существ подчиняются тем же самым законам, как и движения тел неживой природы, ни настаивать на том, что они подчиняются другим законам. Однако внешнее впечатление и общепринятая точка зрения говорят в пользу принципиальной разницы в этом отношении. В то же время чувство, которое побуждает нас исключить из механики неживой природы всякий намек на намерение, на чувственное восприятие, на радость и боль, как нечто чуждое, это же самое чувство порождает у нас сомнения в том, можем ли мы лишать нашу картину неживой природы этих более богатых и более разнообразных представлений.

Наш основной закон, который является, возможно, достаточным, чтобы воспроизвести движение мертвой материи, представляется, по крайней мере на первый взгляд, слишком простым и слишком ограниченным, чтобы выразить многообразие даже самого примитивного жизненного процесса. То, что дело обстоит именно так, кажется мне не недостатком, а скорее преимуществом нашего закона. Именно потому, что он позволяет нам охватить всю механику в целом, он выявляет также и пределы этого целого. Именно потому, что он выражает только один факт, не приписывая ему характер необходимости, он позволяет нам принимать, что все могло бы быть иначе. Возможно, такого рода рассуждения некоторым покажутся в данном месте излишними. И на самом деле, мы не привыкли, чтобы при обычном изложении механики такие вопросы ставились одновременно с обсуждением отдельных элементов. Однако полная

неопределенность введенных сил оставляет здесь большой простор, и без особых оговорок при этом сохраняется право устанавливать в дальнейшем противоречие между силами живой и неживой природы. В нашем же изложении рассматриваемая картина с самого начала настолько резко очерчена, что в дальнейшем вряд ли представится возможным провести более глубокие подразделения. Если мы, вообще говоря, не хотим оставлять в стороне затронутый вопрос, то уже здесь с самого начала мы должны высказать свое отношение к нему.

О целесообразности нашей третьей картины мы ограничимся только коротким замечанием. Мы можем сказать, что целесообразность третьей картины, как это должно показать содержание книги, по ясности и простоте не уступает целесообразности второй картины; те же преимущества, которые мы превозносили там, имеются и здесь. Правда, круг допущенных возможностей здесь не так узок, как там, так как те жесткие связи, отсутствие которых мы там подчеркивали, здесь не исключаются основными допущениями. Но это расширение соответствует природе и является поэтому преимуществом; оно не мешает также выводить общие свойства естественных сил, в которых заключался смысл второй картины. Как здесь, так и там простота заключается прежде всего в физическом применении. И здесь мы можем ограничить наше рассмотрение произвольными, доступными для наблюдения признаками материальных систем и вывести из их прошлых изменений при помощи основного закона будущие изменения; при этом отпала бы необходимость знать положения всех отдельных масс системы, а также замаскировать это незнание произвольными, не имеющими никакого значения и, по-видимому, ложными гипотезами.

В противоположность второй картине наша третья картина обладает простотой также и в том смысле, что ее представления в такой степени приспособлены к природе, что существенные соотношения природы воспроизводятся простыми соотношениями между понятиями. Это проявляется не только в самом основном законе, но также и в многочисленных общих выводах из него, которые соответствуют так называемым принципам механики. Во всяком случае, необходимо признать, что эта простота наступает только в том случае, когда мы имеем дело с системами, известными полностью, и что она снова исчезает, как только появляются скрытые массы. Но и в этих случаях причина усложнения совершенно ясна; мы понимаем, что утрата простоты кроется не в самой природе, а в нашем недостаточном знании ее; мы понимаем, что появляющиеся усложнения являются не только возможным, но и необходимым следствием наших особых предпосылок. Необходимо признать также и то, что и действие скрытых масс, которое с точки зрения нашей механики представляет собой отдельный и специальный случай, в практической жизни и технике является обычным случаем. Поэтому полезно подчеркнуть здесь еще раз, что о целесообразности вообще мы говорим только в особом смысле, а именно, в смысле ума, который стремится объективно охватить все наше физическое познание и описать его простейшим образом независимо от случайного положения человека в природе; но мы ни в коем случае не говорим о целесообразности в смысле практического применения и удовлетворения потребностей человека. Если исходить из этой точки зрения, то созданное специально для практического применения обычное изложение механики, вероятно, никогда не удастся заменить более целесообразным.

Между этим изложением механики и изложением, предложенным нами, существует такая же разница, какая существовала бы между систематической грамматикой какого-либо языка и той грамматикой, которая должна была бы возможно скорее позволить учащемуся изъясняться на этом языке в соответствии с нуждами повседневной жизни. Совершенно ясно, насколько различны требования к той и другой, и как различно должно быть поэтому их изложение, если перед обеими стоит задача возможно точнее удовлетворять поставленным перед ними требованиям.

Вернемся в заключение еще раз к трем картинам механики, которые мы изложили, и попытаемся провести между ними последнее и окончательное сравнение. Вторую картину мы совсем опускаем после того, что мы сказали о ней.

Первая и третья картины с точки зрения их допустимости равноправны, если принять, что первой картине в логическом отношении

дана вполне удовлетворительная форма; это, в соответствии с нашей точкой зрения, вполне возможно. Сравним теперь обе картины в отношении их целесообразности, принимая, что в первую картину внесены подходящие дополнения и что в то же время различные преимущества обеих картин взаимно уравновешиваются. При таких условиях единственным масштабом для оценки картин будет их правильность, предопределяемая силой фактов и не зависящая от нашего произвола. Здесь мы сделаем только важную оговорку, что только одна из этих картин, но не обе одновременно, может быть правильной. Ибо, если мы попытаемся выразить существенное отношение обеих картин в самой короткой форме, то мы сможем сказать: первая картина принимает в качестве последних постоянных элементов природы относительные ускорения масс в отношении друг друга, и из них она выводит приблизительно и только приблизительно постоянные отношения между положениями.

Третья же картина принимает в качестве строго неизменных элементов природы постоянные отношения между положениями; из них она выводит там, где требуют явления, приблизительно и только приблизительно неизменные относительные ускорения между массами. Если бы мы могли только достаточно точно распознавать движения природы, то мы сразу же узнали бы, являются ли в них приблизительно неизменными только относительные ускорения, или относительные положения масс, или те и другие. Также и в этом случае мы сразу же увидели бы, какое из наших допущений ложно, или ложны оба; ибо оба одновременно не могут быть правильными. Наибольшей простотой обладает третья картина. В пользу первой картины нас вначале заставляет склоняться то обстоятельство, что в силах, действующих на расстоянии, мы действительно можем установить относительные ускорения, которые в пределах нашего наблюдения кажутся неизменными, в то время как все неподвижные связи между положениями осязаемых тел оказываются уже в пределах восприятий наших чувств только приблизительно постоянными. Но это соотношение изменяется в пользу третьей картины, как только более тонкое познание показывает нам, что введение неизменных сил, действующих на расстоянии, дает только первое приближение к истине; именно так обстоит дело в области электрических и магнитных сил. И чаша весов полностью склоняется в пользу третьей картины, как только второе приближение к истине достигается благодаря тому, что мнимое действие сил на расстоянии, приводится к процессам движения в наполняющей пространство среде, между мельчайшими частицами которой существуют жесткие связи,— случай, который представляется почти осуществленным также в упомянутой области. Следовательно, здесь то поле, на котором должна быть дана решающая битва между различными рассматриваемыми нами основными допущениями механики. Но само решение этого вопроса исходит из предпосылок, что предварительно должны быть основательно взвешены во всех отношениях все имеющиеся налицо возможности. Цель настоящей работы и состоит в том, чтобы развить их в особом направлении. Эта работа была бы, следовательно, необходима даже и в том случае, если бы понадобилось еще много времени, прежде чем представилась бы возможность прийти к определенному решению, а также и в том случае, если это решение в конце концов оказалось бы не в пользу изложенной здесь картины.

КНИГА ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ [20]

Предварительное замечание. В рассуждениях первой книги опыт совершенно исключен. Все положения, изложенные в ней, суть суждения a priori в смысле Канта. Они покоятся на законах внутреннего созерцания и формах собственной логики высказывающего и не имеют с внешним опытом никакой другой связи, кроме той, которая имеется в этих созерцаниях и формах логики. 1.

Раздел 1.

ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО, МАССА

Пояснение. Время, с которым мы будем иметь дело в первой книге, есть время нашего внутреннего созерцания. Поэтому оно является величиной, от изменения которой могут мыслиться зависимыми изменения всех остальных рассматриваемых величин, в то время как само оно является независимой переменной. 2.

Пространство, с которым мы будем иметь дело в первой книге, есть пространство нашего представления. Оно является, таким образом, пространством Эвклидовой геометрии со всеми свойствами, которые приписываются ему этой геометрией. Для нас безразлично, рассматриваются ли эти свойства как данные посредством законов нашего внутреннего созерцания или как мыслимо-необходимые следствия произвольных определений.

Масса, с которой мы будем иметь дело в первой книге, вводится через определение.

3. Определение 1. Материальная частица есть признак, при помощи которого мы однозначно соотносим определенную точку пространства в данный момент времени с определенной точкой пространства в любой другой момент времени.

Каждая материальная частица неизменна и неуничтожима. Точки пространства, отмеченные посредством той же самой материальной частицы в два различных момента времени, совпадают, если совпадают указанные моменты времени. Эти положения содержатся уже в определении, если оно правильно сформулировано.

4. Определение 2. Число материальных частиц в любой части пространства, сравниваемое с числом материальных частиц, находящихся в некоторой выбранной части пространства в определенное время, называется массой, содержащейся в первой части пространства.

Число материальных частиц в пространстве, выбранном для сравнения, можно и нужно выбирать бесконечно большим. Масса отдельных частиц будет тогда, в соответствии с определением, бесконечно малой. Поэтому масса в любом объеме может принимать любое рациональное или иррациональное значение.

5. Определение 3. Конечная или бесконечно малая масса, содержащаяся в бесконечно малом пространстве, называется материальной точкой. Материальная точка состоит, таким образом, из произвольного числа соединенных друг с другом материальных частиц. Это число должно быть всегда бесконечно большим, что достигается тем, что мы представляем себе материальные частицы как бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с материальной точкой исчезающе малой массы. Поэтому массы материальных точек, в частности, массы бесконечно малых материальных точек, могут находиться в любом рациональном и иррациональном отношении [21].

6. Определение 4. Совокупность одновременно рассматриваемых материальных точек называется системой материальных точек, или коротко — системой. Сумма масс отдельных точек является согласно (4) массой системы.

Конечная система состоит, таким образом, из конечного числа конечных материальных точек, или из бесконечного числа бесконечно малых материальных точек или из тех и других. Всегда возможно материальную систему представить составленной из бесконечного числа материальных частиц.

Примечание 1. В дальнейшем мы будем иметь дело с конечной материальной системой, составленной из конечного числа конечных материальных точек. Однако, так как мы не устанавливаем верхней границы для числа материальных точек и нижней границы для их массы, то наши общие положения охватывают в качестве особого случая и тот случай, когда система содержит бесконечно большое число бесконечно малых материальных точек. Нет надобности входить здесь в детали, требующиеся для аналитического рассмотрения этого случая. 7.

Примечание 2. Материальная точка может быть рассматриваема как частный случай и как простейший пример системы материальных точек. 8.

Раздел 2.

ПОЛОЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК И СИСТЕМ

ПОЛОЖЕНИЕ

Определение 1. Точка пространства, отмеченная данной материальной частицей в данный момент времени, называется положением этой материальной частицы в указанный момент времени. Положением материальной точки называется совокупное положение ее частиц. 9.

Определение 2. Одновременная совокупность положений всех точек системы называется положением системы. 10.

11. Определение 3. Каждое произвольное положение материальной точки в бесконечном пространстве называется геометрически мыслимым, или короче — мыслимым положением точки. Совокупность мыслимых положений точек системы называется мыслимым положением системы.

В каждый момент времени две материальные частицы могут различаться их положением; две материальные точки — массой и положением; две материальные системы — числом, массой и положением их точек.

На основании принятых нами определений, материальные частицы, материальные точки, системы материальных точек не различаются в других отношениях, кроме указанных.

12. Аналитическое представление положения: а) точки. Положение материальной точки может быть представлено тремя прямолинейными, прямоугольными Декартовыми координатами, отнесенными к покоящейся системы осей. Будем обозначать эти координаты через x_1, x_2, x_3. Каждому возможному положению точки соответствует однозначно определенная система значений этих координат и, наоборот, каждой произвольно выбранной системе значений координат соответствует однозначно определенное возможное положение точки.

Положение точки можно определить и через какие-нибудь r величин $p_1, \ldots, p_\rho, \ldots, p_r$, если определенная система значений этих величин будет соответствовать определенному положению точки, и наоборот. Прямолинейные координаты являются, следовательно, функциями этих величин, и наоборот. Величины p_ρ назовем обобщенными координатами точки. Если $r > 3$, то на основании геометрических соображений между величинами p_ρ должно существовать $r-3$ уравнения, которые представляют их как функции трех независимых величин, например x_1, x_2, x_3. Предполагая, что между координатами нет никаких соотношений, мы найдем из чисто геометрических соображений, что $r \leqslant 3$. Если $r < 3$, то не все мыслимые положения точки могут быть представлены посредством систем значений p_ρ, но только часть последних. Положения, которые нельзя представить посредством p_ρ, должны

считаться исключенными из рассмотрения при пользовании p_ρ.

Аналитическое представление: b) системы. Положение системы n материальных точек может быть задано через $3n$ прямоугольных координат точек системы. Будем обозначать эти координаты через $x_1 \ldots, x_\nu \ldots, x_{3n}$, причем x_1, x_2, x_3 обозначают координаты первой точки, а $x_{3\mu-2}$, $x_{3\mu-1}$, $x_{3\mu}$ — координаты μ-й точки. Эти $3n$ координат x_ν мы обозначаем кратко как прямоугольные координаты системы. Каждому мыслимому положению системы соответствует однозначно определенная система значений прямоугольных координат, и наоборот, каждой произвольно выбранной системе значений x_ν соответствует однозначно определенное мыслимое положение системы. 13.

Можно также положение системы определять через какие-нибудь r величин $p_1 \ldots, p_\rho \ldots, p_r$, поскольку определенной системе значений этих величин соответствует определенное положение системы; и наоборот. Следовательно, прямоугольные координаты суть функции этих величин, и наоборот. Величины p_ρ называются обобщенными координатами системы. Если $r > 3n$, то между p_ρ должны существовать на основании геометрических соображений $r-3n$ уравнений. Примем, что между координатами p_ρ не существует никаких соотношений и поэтому всегда $r \leqslant 3n$. Если $r < 3n$, то не все мыслимые положения системы могут быть представлены системой значений p_ρ, но только часть последних. Те положения, которые не могут быть представлены при помощи p_ρ, должны быть исключены из рассмотрения при пользовании координатами p_ρ.

КОНФИГУРАЦИЯ И АБСОЛЮТНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Определение 1. Совокупность взаимных положений точек системы называется конфигурацией системы. Конфигурация системы и абсолютное положение конфигурации в пространстве определяют вместе положение системы. 14.

Определение 2. Координатой конфигурации называется каждая координата системы, значение которой не может изме- 15.

питься без того, чтобы одновременно не изменилась конфигурация системы.

Является ли определенная координата координатой конфигурации или нет, не зависит, следовательно, от выбора остальных одновременно употребляемых координат.

16. Определение 3. Координатой абсолютного положения называется каждая координата системы, изменение которой не сопровождается изменением конфигурации, пока остальные координаты системы не изменяются.

Является ли определенная координата координатой абсолютного положения или нет, зависит, таким образом, от выбора остальных одновременно употребляемых координат.

ВЫВОДЫ

17. 1. Одна и та же координата не может быть одновременно координатой конфигурации и координатой абсолютного положения. Напротив, любая произвольно взятая координата может не быть и вообще не будет ни координатой конфигурации, ни координатой абсолютного положения.

18. 2. Если $n > 3$, то можно так выбрать, и притом самыми разнообразными способами $3n$ независимых друг от друга координат всех положений, чтобы среди них находилось до $3n - 6$ координат конфигурации; но нельзя выбрать эти координаты так, чтобы они включали больше $3n - 6$ координат конфигурации. Ибо если мы выберем среди координат три расстояния трех любых точек системы друг от друга и $3n - 3$ расстояний остальных точек от них, то уже получим $3n - 6$ координат конфигурации и каждые $3n - 6$ различных функций этих расстояний будут также являться $3n - 6$ координатами конфигурации системы.

Меньшее число координат конфигурации может существовать; они могут, например, вовсе не существовать, если мы пользуемся $3n$ прямоугольными координатами. Большее число координат конфигурации не может быть среди независимых координат; ибо если бы среди любых координат существовало больше чем $3n - 6$

координат конфигурации, то можно было бы последние представить как функции тех $3n - 6$ расстояний, следовательно, они не 19.
были бы независимыми друг от друга.

3. Если $n > 3$, то можно $3n$ независимых координат всех мыслимых положений системы так выбрать и притом разнообразными способами, чтобы среди них находилось до 6, однако не более чем 6, координат абсолютного положения.

Ибо если мы выберем координаты так, чтобы среди них имелось $3n - 6$ координат конфигурации и прибавим к ним 6 произвольных координат, например, 6 прямоугольных координат системы, то последние и будут координатами абсолютного положения, так как никакое изменение этих координат не изменит конфигурации системы, пока остальные координаты остаются постоянными. Однако может иметь место случай, когда координат абсолютного положения меньше шести; так, например, они полностью отсутствуют, если мы применяем прямоугольные координаты системы. Случай же, когда этих координат больше шести, не может иметь места; ибо если бы для определенного выбора координат их было больше шести, то все мыслимые конфигурации системы определялись бы посредством остальных координат, которых имеется меньше чем $3n - 6$; таким образом, для системы вообще нельзя было бы указать $3n - 6$ независимых друг от друга координат конфигурации, что противоречило бы выводу 2.

4. Если $3n$ независимых координат для системы n точек вы- 20.
браны так, что между ними существует $3n - 6$ координат конфигурации, то остальные 6 необходимо будут координатами абсолютного положения. Если же $3n$ координат так выбраны, что среди них существует 6 координат абсолютного положения, то остальные $3n - 6$ будут координатами конфигурации. Ибо если среди последних $3n - 6$ координат находится хотя бы одна такая координата, которая изменяется без того, чтобы изменилась конфигурация, то абсолютное положение конфигурации определялось бы более чем шестью независимыми координатами, что невозможно.

5. В качестве координаты абсолютного положения может быть 21.
использована любая величина, изменение которой вызывает изме-

нение положения системы и которая не является координатой конфигурации. Шесть любых величин, которые обладают этими свойствами и независимы друг от друга, могут быть приняты за координаты абсолютного положения. Они делаются координатами абсолютного положения вследствие того, что к ним не прибавляются никакие другие величины в качестве координат, кроме тех, которые имеют свойства координат конфигурации.

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ [22]

а) Точек

22. Определение 1. Переход материальной точки из начального положения в конечное, независимо от времени и способа перехода, называется перемещением точки из ее начального положения в конечное. Перемещение точки, таким образом, вполне определяется через начальное и конечное положения. Оно также может быть задано через начальное положение, направление и величину перехода.

23. Примечание 1. Величина перемещения точки равна расстоянию ее конечного положения от начального. Если x_ν — декартова координата начального положения, а x'_ν — конечного, то величина перемещения s' есть положительный корень уравнения

$$s'^2 = \sum_{\nu=1} (x'_\nu - x_\nu)^2.$$

24. Примечание 2. Направление перемещения есть направление линии, соединяющей начальное и конечное положения. Если имеем x_ν, x'_ν и s' для одного перемещения и x^0_ν, x''_ν, s'' — для другого, то угол, образованный этими перемещениями, определяется уравнением

$$s's'' \cos \widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3} (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu). \qquad \text{(a)}$$

Ибо, рассматривая треугольник из обоих перемещений и угол, образованный ими, получим уравнение

$$s'^2 + s''^2 - 2s's'' \cos \widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3} [(x'_\nu - x_\nu) - (x''_\nu - x^0_\nu)]^2, \qquad \text{(b)}$$

из которого следует, имея в виду (23), уравнение (а).

Определение 2. Два перемещения точки называются тождественными, если начальные и конечные положения этих перемещений совпадают. Два перемещения точки называются равными, если их величины и направления совпадают. Два перемещения называются параллельными, если они имеют одно направление. 25.

Замечание. Если обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_k$ прямолинейные координаты точки в пространстве k измерений, а $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ — координаты второй точки, то, прибавляя к ранее данным определениям новое, именно, что расстояние двух точек в пространстве k измерений является положительным корнем уравнения 26.

$$s'^2 = \sum_{\nu=1}^{k} (x'_\nu - x_\nu)^2,$$

мы тем самым расширяем содержание исследования и вместе с тем всю механику на пространство k измерений без необходимости изменения формулировок (не учитывая при этом второстепенных фактов). Однако этим замечанием не следует пользоваться практически, ибо соответственно ранее данным определениям речь должна идти лишь о пространстве Эвклидовой геометрии.

b) Систем

Определение. Переход материальной системы из начального положения в конечное вне зависимости от времени перехода и способа перехода называется перемещением системы из начального положения в конечное. 27.

Перемещение системы, следовательно, вполне задается ее начальным и конечным положениями. Оно также вполне определено, если даны начальное положение системы и признаки, определяющие направление перемещения и его величину.

28. Вспомогательное определение. Средним квадратическим значением ряда величин мы называем положительный корень из среднего арифметического значения квадратов отдельных величин.

29. Определение а. Величиной перемещения системы называется среднее квадратическое значение величин перемещений отдельных составляющих ее материальных частиц.

Величина перемещения, которое переводит одно положение системы в другое, называется также удалением или расстоянием этих двух положений одно от другого. Величина перемещения обозначается так же, как его длина.

30. Замечание. Расстояние двух положений системы одно от другого не зависит от формы аналитического представления, в частности от выбора системы координат.

31. Задача. Выразить расстояние двух положений системы через ее прямоугольные координаты.

Пусть n есть число материальных точек системы. Пусть x_ν есть значение одной из координат до перемещения, x'_ν — после перемещения. Координата x_ν вместе с тем является координатой одной из точек системы. Пусть масса этой точки есть m_ν, где $\nu = 1, \ldots, 3n$; однако среди всех этих m_ν имеются равные, в частности, пусть для каждого $\mu = 1, \ldots, 3n$:

$$m_{3\mu-2} = m_{3\mu-1} = m_{3\mu}$$

Если η есть число материальных частиц в единице массы, то масса m_ν содержит в себе $m_\nu \eta$ материальных частиц, а полная масса m содержит, следовательно, $m\eta$ материальных частиц. Используя эти обозначения, найдем для среднего квадратичного значения s' перемещений всех материальных частиц положительный корень уравнений

$$ms'^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2, \tag{a}$$

причем

$$m = \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu. \tag{b}$$

Теорема. Расстояние двух положений системы одно от другого всегда меньше суммы расстояний обоих положений от третьего. 32.

Действительно, пусть x'_ν, x''_ν, x'''_ν есть декартовы координаты трех положений 1, 2, 3; пусть далее s_{12}, s_{13}, s_{23} есть расстояния указанных положений одно от другого. Положим для сокращения:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}(x'''_\nu - x'_\nu) = a_\nu, \qquad \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}(x'''_\nu - x''_\nu) = b_\nu,$$

тогда

$$s_{13}^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} a_\nu^2, \qquad s_{23}^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} b_\nu^2, \qquad s_{12}^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} (a_\nu - b_\nu)^2.$$

Если положить, что $s_{12} > s_{13} + s_{23}$, то, возводя обе части в квадрат, получим:

$$s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2 > 2_8 s_{13} s_{23}.$$

Возводя еще раз в квадрат, получим:

$$4s_{13}^2 s_{23}^2 - (s_{12}^2 - s_{13}^2 - s_{23}^2)^2 < 0.$$

Однако это невозможно, ибо левую часть подстановкой значений s можно записать в форме

$$4\sum_{\nu=1}^{3n} \sum_{\mu=1}^{3n} (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2,$$

что является, как сумма квадратов, существенно положительной величиной. Таким образом, остается положить:

$$s_{12} \leqslant s_{13} + s_{23},$$

так как противоположное предположение невозможно.

33. Следствие. Всегда возможно три расстояния трех положений системы друг от друга рассматривать как стороны плоского треугольника.

34. Определение b. Разностью направлений двух перемещений системы из общего начального положения называется угол в плоском треугольнике, прилегающие стороны которого образуют длины обоих перемещений, а противолежащая сторона является расстоянием между их конечными положениями.

Разностью направлений двух перемещений называется угол между ними, или наклон их одно относительно другого.

35. Замечание. Наклон двух перемещений из общего начального положения относительно друг друга всегда является однозначно определенным действительным углом, меньшим π, ибо треугольник, определяющий этот угол, всегда может быть построен (32).

36. Замечание. Наклон двух перемещений определяется независимо от формы аналитического представления, в частности от выбора координат.

37. Задача. Выразить относительный наклон двух перемещений из общего начального положения через декартовы координаты начального и конечного положений.

Пусть x_ν есть координаты общего начального положения, а x'_ν и x''_ν — координаты обоих конечных положений. Пусть s' и s'' есть длины обоих перемещений, а $\widehat{s's''}$ — заключенный между ними угол. Рассматривая плоский треугольник, образованный соответствующими расстояниями между тремя положениями системы, получим

$$2ms's''\cos\widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 + \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 - \\ - \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left[(x''_\nu - x_\nu) - (x'_\nu - x_\nu)\right]^2,$$

откуда

$$ms's''\cos\widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu), \qquad \text{(a)}$$

где s' и s'' должны быть выражены через прямоугольные координаты в соответствии с (31a).

Теорема. Два перемещения системы из общего начального положения образуют между собой угол, равный нулю, если перемещения отдельных точек системы в обоих случаях одинаково направлены и соответственно пропорциональны, и наоборот. 38.

Действительно, если перемещения всех точек одинаково направлены и пропорциональны, то для всех ν

$$x''_\nu - x_\nu = \varepsilon (x'_\nu - x_\nu),$$

где под ε понимаем одинаковый для всех ν множитель. Поэтому правая часть уравнения (37a) равна $m\varepsilon s'^2$. Однако далее имеем $s'' = \varepsilon s'$, таким образом, из уравнения имеем $\cos\widehat{s's''} = 1$, следовательно, $\widehat{s's''} = 0$, как внутренний угол треугольника (35).

Наоборот, если $\widehat{s's''} = 0$ и $\cos\widehat{s's''} = 1$, то уравнение (37a) дает, если вставить значения s' и s'' и возвести в квадрат обе части:

$$0 = \left[\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)(x'_\nu - x_\nu)\right]^2 - \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x''_\nu - x_\nu)^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)^2 = \\ = \sum_{\mu=1}^{3n} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu m_\mu \left[(x''_\nu - x_\nu)(x'_\mu - x_\mu) - (x''_\mu - x_\mu)(x'_\nu - x_\nu)\right]^2,$$

а это возможно только тогда, когда для каждого μ и ν имеем

$$\frac{x''_\mu - x_\mu}{x''_\nu - x_\nu} = \frac{x'_\mu - x_\mu}{x'_\nu - x_\nu},$$

тем самым доказано и обратное положение.

Следствие 1. Если два перемещения с общим начальным положением имеют нулевой наклон относительно третьего перемещения из того же положения, то они имеют нулевой наклон и относительно друг друга. 39.

Все перемещения, которые имеют равный нулю наклон относительно некоторого определенного перемещения, имеют также равный нулю наклон друг относительно друга. То общее, что имеется у всех таких перемещений, называется направлением последних.

40. Следствие 2. Если два перемещения имеют одно направление, то они имеют одинаковый наклон к любому третьему перемещению. Все перемещения одного направления из общего положения образуют, таким образом, одинаковые углы со всеми перемещениями другого направления. Этот общий угол называется углом между двумя направлениями, или наклоном обоих направлений.

41. Определение. Два перемещения системы называются тождественными, если перемещения отдельных точек в обоих случаях тождественны. Два перемещения системы называются равными, если перемещения точек в обоих случаях равные. Два перемещения системы называются параллельными, если перемещения точек в обоих случаях параллельны и соответственно пропорциональны.

42. Следствие. Два перемещения системы из различных начальных положений параллельны, если каждое из них имеет одинаковое направление с перемещением, которое проходит через его начальное положение и одинаково направлено с другим перемещением, и наоборот.

43. Добавление. Разностью направлений двух перемещений системы из различных начальных положений называется угол между каждым из них и третьим, которое проходит через начальное положение одного из них и параллельно другому перемещению.

44. Задача. Выразить угол между двумя любыми перемещениями системы через прямоугольные координаты их четырех концевых положений.

Пусть s' и s'' есть величины этих перемещений, а $\widehat{s's''}$ — угол между ними. Пусть x_ν и x'_ν есть координаты начального и конечного положений первого перемещения, а x^0_ν и x''_ν — координаты начального и конечного положений второго перемещения. Перемещение, начальные координаты которого x_ν и конечные координаты $x_\nu + x''_\nu - x^0_\nu$, имеет одинаковое начальное положение с первым перемещением и равно второму. Оно образует, следовательно, с перемещением искомый угол, определяемый уравнением

$$ms's''\cos\widehat{s's''} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu).$$

То же самое значение получается, если мы построим перемещение через начальное положение второго и равное первому и определим угол между этим перемещением и вторым.

Наше определение и добавление (43) является, следовательно, однозначным и потому допустимым.

Определение. Два перемещения системы называются перпендикулярными друг к другу, если угол между ними прямой. 45.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием взаимной перпендикулярности двух перемещений является уравнение 46.

$$\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu (x'_\nu - x_\nu)(x''_\nu - x^0_\nu) = 0,$$

в котором приняты обозначения задачи (44).

Следствие 2. В системе n точек из данного положения мыслимо $(3n-1)$-кратное многообразие перемещений, следовательно $(3n-2)$-кратное многообразие направлений, которые перпендикулярны данному направлению. 47.

Определение. Компонентой перемещения в данном направлении называется перемещение, направление которого совпадает с данным направлением, а величина равна ортогональной проекции величины данного перемещения на данное направление. 48.

Если величина данного перемещения есть s и образует с данным направлением угол ω, то ее компонента в этом направлении есть $s\cos\omega$.

Величина компоненты в данном направлении называется обыкновенно просто компонентой в этом направлении.

СЛОЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

49. Замечание. Если система имеет несколько перемещений, которые равны данным перемещениям и присоединяются друг к другу так, что конечное положение предшествующего есть начальное положение последующего, то достигнутое конечное положение не зависит от последовательности перемещений, ибо это имеет место для перемещений отдельных точек, а следовательно, и для системы.

50. Определение 1. Перемещение, которое переводит систему в то же конечное положение, как и ряд последовательных перемещений, равных данным, называется суммой данных перемещений.

51. Определение 2. Разностью двух перемещений называется такое перемещение, которое в сумме со вторым дает первое перемещение.

52. Следствие (из 49). Сложение и вычитание перемещений подчиняется правилам алгебраического сложения и вычитания.

Раздел 3

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ПУТИ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

53. Предварительное замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать не отдельно взятую материальную точку, а систему материальных точек. Поэтому в последующем всегда речь будет идти о перемещениях систем, если не сделана особая оговорка.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

54. Пояснение. Перемещение называется бесконечно малым, если длина его бесконечно мала. Бесконечно малое перемещение определяется по направлению и величине через задание его положения и бесконечно малые изменения координат системы, возникающие вследствие перемещения.

Задача 1a. Выразить длину ds бесконечно малого перемещения через изменения dx_ν $3n$ прямоугольных координат системы [23]. 55.

Заменяя в уравнении (31i) $x'_\nu - x_\nu$ через dx_ν, получим:

$$mds^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu dx_\nu^2.$$

Задача 1b. Выразить угол $\widehat{s's''}$ между двумя бесконечно малыми перемещениями ds и ds' через изменения координат dx_ν и dx'_ν. 56.

Решение задачи получаем из (44), подставляя dx_ν вместо $x'_\nu - x_\nu$ и dx'_ν вместо $x''_\nu - x^0_\nu$

$$mdsds' \cos \widehat{ss'} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu dx_\nu dx'_\nu .$$

Это решение имеет место независимо от того, имеют ли оба перемещения общее положение или нет.

Задача 2a. Выразить длину ds бесконечно малого перемещения через изменения dp_ρ обобщенных координат p_ρ системы. 57.

Прямоугольные координаты x_ν есть функции p_ρ и только p_ρ, так как они полностью определяются последними и так как перемещения, которые не могут быть представлены через изменения p_ρ, исключаются из рассмотрения (13). Если положим для сокращения

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\rho} = \alpha_{\nu\rho}, \tag{a}$$

то получим соответственно этому $3n$ уравнений в форме

$$dx_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \alpha_{\nu\rho} dp_\rho, \tag{b}$$

в которых $\alpha_{\nu\rho}$ являются функциями положения, следовательно, являются функциями p_ρ. Если подставить значения (b) в уравнение (55) и положить для сокращения:

$$ma_{\rho\sigma} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \alpha_{\nu\rho} \alpha_{\nu\sigma}, \tag{c}$$

то мы получим в качестве решения задачи

$$ds^2 = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\rho dp_\sigma. \qquad (d)$$

58. Задача 2b. Выразить угол $\widehat{ss'}$ между двумя бесконечно малыми перемещениями ds и ds', имеющими общее положение, посредством изменения dp_ρ и dp'_ρ обобщенных координат p_ρ системы.

Мы получаем значения dx'_ν по уравнению (57 b) и подставим их, а также значения dx_ν, в уравнение (56). Учитывая, что для обоих перемещений значения самих координат, следовательно, значения величин $\alpha_{\rho\sigma}$, являются равными, мы получаем

$$ds ds' \cos \widehat{ss'} = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\rho dp'_\sigma.$$

Свойства $\alpha_{\rho\sigma}$ и $a_{\rho\sigma}$. Введение $b_{\rho\sigma}$

59. 1. Для всех значений ρ, σ, τ имеем (ср. 57a)

$$\frac{\partial \alpha_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial \alpha_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}.$$

60. 2. Для всех значений ρ и σ имеем (ср. 57c)

$$a_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho}.$$

61. 3. Число величин $\alpha_{\rho\sigma}$ равно $3nr$; число отличных друг от друга величин $\alpha_{\rho\sigma}$ равно $\frac{1}{2} r(r+1)$.

62. 4. Для всех ρ

$$a_{\rho\rho} > 0.$$

Для всех ρ и σ

$$a_{\rho\rho} a_{\sigma\sigma} - a_{\rho\sigma}^2 > 0.$$

Действительно, эти неравенства выражают необходимые условия того, что правая часть (57d) является существенно положительной величиной при любых значениях dp_ρ.

5. Для всех значений ρ, σ, τ имеет место уравнение 63.

$$\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \alpha_{\nu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\rho} \right) = m \left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\rho} + \frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma} \right).$$

Для доказательства этого уравнения подставляем в правую часть значение $a_{\rho\sigma}$ из (57 с) и затем применяем свойства $\alpha_{\rho\sigma}$ по (59).

6. Пусть определитель из r^2 величин $\alpha_{\rho\sigma}$ есть Δ. Введем новые величины $b_{\rho\sigma}$: 64.

$$b_{\rho\sigma} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\rho\sigma}}.$$

Тогда для всех значений ρ и σ имеем

$$b_{\rho\sigma} = b_{\sigma\rho}.$$

Число различных друг от друга величин $b_{\rho\sigma}$ равно $\frac{1}{2} r(r+1)$.

7. Значение выражения 65.

$$\sum_{\rho=1}^{r} a_{\rho\iota} b_{\rho\varkappa}$$

равно единице для $\iota = \varkappa$ и равно нулю для всех ι, отличных от $\varkappa$, ибо если $\iota = \varkappa$, то $\sum_{\rho=1}^{r} a_{\rho\iota} b_{\rho\varkappa} \Delta$ представляет собой сам определитель Δ. Если же ι и $\varkappa$ не равны друг другу, то отмеченная сумма представляет определитель, который образуется из определителя Δ при замене строки $a_{\rho\varkappa}$ строкой $a_{\rho\iota}$. В этом определителе получаются две одинаковые строки и, следовательно, его значение равно нулю.

8. Для всех значений ι и $\varkappa$ имеют силу уравнения 66.

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} a_{\rho\iota} a_{\sigma\varkappa} = a_{\iota\varkappa};$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} b_{\rho\iota} b_{\sigma\varkappa} = b_{\iota\varkappa}.$$

Образуем в соответствии с (65) величины $\sum_{\rho=1}^{r} b_{\rho\sigma} a_{\rho\iota}$ и $\sum_{\rho=1}^{r} a_{\rho\sigma} b_{\rho\iota}$ для всех значений σ от 1 до r; полученные уравнения умножим соответственно на $a_{\sigma\varkappa}$ и $b_{\sigma\varkappa}$ и сложим их. В результате получим упомянутые уравнения.

67. 9. Определенное изменение величин $a_{\rho\sigma}$ влечет изменение величин $b_{\rho\sigma}$. Если обозначим через $\delta a_{\rho\sigma}$ и $\delta b_{\rho\sigma}$ любые совместные вариации $a_{\rho\sigma}$ и $b_{\rho\sigma}$, то получим уравнения

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\iota}a_{\sigma\varkappa}\delta b_{\rho\sigma} = -\delta a_{\iota\varkappa};$$

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\iota}b_{\sigma\varkappa}\delta a_{\rho\sigma} = -\delta b_{\iota\varkappa}.$$

Эти уравнения получаются, если проварьировать уравнения (66) и применить соотношения (65).

68. 10. Если изменить в $a_{\rho\sigma}$ и $b_{\rho\sigma}$ лишь определенную координату p_τ, то получим для каждого значения τ

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\iota}a_{\sigma\varkappa}\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau};$$

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\iota}b_{\sigma\varkappa}\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial b_{\iota\varkappa}}{\partial p_\tau}.$$

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ КООРДИНАТ

69. Определение 1. Перемещением в направлении данной координаты называется бесконечно малое перемещение, при котором изменяется лишь одна эта координата.

Направление всех перемещений из общего положения в направлении одной и той же координаты — одно и то же; оно называется направлением координаты в этом положении.

70. Замечание. Направление координаты зависит от выбора остальных одновременно употребляемых координат.

71. Определение 2. Приведенной компонентой бесконечно-малого перемещения в направлении данной координаты называется компонента перемещения в направлении координаты (48), (69), деленная на скорость изменения координаты при перемещении в ее собственном направлении.

Приведенную компоненту в направлении некоторой координаты называют также кратко компонентой вдоль этой координаты.

Можно говорить о компоненте любого перемещения в любом направлении, однако нельзя говорить о приведенной компоненте в любом направлении, но только о приведенной компоненте бесконечно малого перемещения в направлении некоторой координаты.

Задача 1a. Выразить наклон $\widehat{sx_\nu}$ перемещения ds относительно 72.
прямолинейной координаты x_ν через $3n$ изменения dx_ν.

В уравнении (56) положим $dx'_\nu = 0$ для всех значений ν за исключением того, к которому относится задача.

Тогда согласно (69) направление ds' есть направление x_ν, а угол $\widehat{ss'}$ становится искомым углом. Так как по (55) $m\,ds'^2 = m_\nu dx_\nu'^2$, то имеем решение задачи в следующем виде:

$$ds\cos\widehat{sx_\nu} = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,dx_\nu,$$

где для ds должно быть подставлено его выражение через dx_ν.

Задача 1b. Выразить компоненту $d\bar{x}_\nu$ перемещения ds вдоль 73.
прямоугольной координаты x_ν через ее изменение $d\bar{x}_\nu$.

Если положим в предыдущей задаче угол $\widehat{sx_\nu} = 0$, то перемещение ds происходит в направлении x_ν, и мы замечаем, что скорость изменения координаты при перемещении в ее собственном направлении равна dx_ν/ds, а следовательно, равна $\sqrt{m/m_\nu}$. Левая часть выражения (72) представляет уже компоненту ds в направлении x_ν; делим ее на $\sqrt{m/m_\nu}$ и получаем (71) как решение задачи:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m}\,dx_\nu.$$

Задача 1c. Выразить изменения прямоугольных координат 74.
dx_ν при некотором перемещении через приведенные компоненты перемещения вдоль этих координат.

Решение предыдущей задачи дает непосредственно ответ:

$$dx_\nu = \frac{m}{m_\nu} d\bar{x}_\nu.$$

75. Задача 2a. Выразить наклон $\widehat{sp_\rho}$ перемещения ds относительно обобщенной координаты p_ρ через r изменений dp_ρ.

В уравнении (58) положим $dp'_\rho = 0$ для всех ρ, за исключением того, к которому относится задача. Направление ds', следовательно, по (69) есть направление p_ρ, а угол $\widehat{ss'}$ есть искомый угол. Так как согласно (57) $ds'^2 = a_{\rho\rho} dp'^2_\rho$, то получаем решение задачи в виде

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\, ds \cos \widehat{sp_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\sigma,$$

где вместо ds следует подставить его значение через dp_σ.

76. Замечание 1. Если мы положим в решении предыдущей задачи все $dp_\sigma = 0$ за исключением определенного dp_σ, то направление ds становится направлением координаты p_σ, а угол $\widehat{sp_\rho}$ переходит в угол $\widehat{p_\sigma p_\rho}$, который координата p_σ образует с координатой p_ρ. Так как далее $ds^2 = a_{\sigma\sigma} dp_\sigma^2$, то для последнего угла имеем

$$\cos \widehat{p_\sigma p_\rho} = \frac{a_{\rho\sigma}}{\sqrt{a_{\rho\rho} a_{\sigma\sigma}}}.$$

Этот угол согласно (62) всегда действительный.

77. Замечание 2. Координаты p_ρ называются ортогональными, если каждая из них в любом положении перпендикулярна к направлению всех остальных. Необходимым и достаточным условием этого является требование (76), чтобы все $a_{\rho\sigma}$ (для которых ρ и σ различные) исчезали. Прямоугольные координаты являются примером ортогональных.

78. Задача 2b. Выразить компоненты $d\bar{p}_\rho$ перемещения ds по координатам p_ρ через изменения dp_ρ этих координат при перемещении.

Если мы положим в уравнении (75) $\widehat{sp_\rho} = 0$, то это означает, что перемещение ds происходит вдоль p_ρ, т. е. все dp_σ равны нулю, кроме dp_ρ, и, следовательно, уравнение обращается в $\sqrt{a_{\rho\rho}}\, ds = a_{\rho\rho} dp_\rho$. Скорость изменения p_ρ при перемещении в ее собственном направлении равняется $1/\sqrt{a_{\rho\rho}}$. По (48) $ds \cos \widehat{sp_\rho}$ есть компонента перемещения ds в направлении p_ρ и, имея в виду определение (71), видим, что левая часть выражения (75) представляет приведенную компоненту перемещения вдоль p_ρ. Мы получаем, таким образом, соотношение

$$d\bar{p}_\rho = \sqrt{a_{\rho\rho}}\, ds \cos \widehat{sp_\rho}, \tag{a}$$

следовательно, решение задачи имеем в виде

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\sigma. \tag{b}$$

Задача 2c. Выразить изменения dp_ρ координат при перемещении ds при помощи компонент $d\bar{p}_\rho$ перемещения по координатам p_ρ. 79.

Решение уравнения (78b), с учетом обозначения (64), дает непосредственно решение нашей задачи:

$$dp_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} d\bar{p}_\sigma.$$

Задача 3a. Выразить компоненты $d\bar{p}_\rho$ некоторого перемещения вдоль обобщенных координат p_ρ через компоненты $d\bar{x}_\nu$ этого перемещения вдоль прямоугольных координат системы. 80.

Из системы уравнений (78), (57c), (57b) и (74) получаем:

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\rho} \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\rho} dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \alpha_{\nu\rho} d\bar{x}_\nu.$$

Задача 3b. Выразить компоненты $d\bar{x}_\nu$ через компоненты $d\bar{p}_\rho$. 81. Из системы уравнений (73), (57b), (79) получаем:

$$d\bar{x}_\nu = \frac{m_\nu}{m} dx_\nu = \frac{m_\nu}{m} \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma = \frac{m_\nu}{m} \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\nu\sigma} \sum_{\rho=1}^{r} b_{\rho\sigma} d\bar{p}_\rho,$$

или, полагая для сокращения

$$\frac{m_\nu}{m}\sum_{\sigma=1}^{r}\alpha_{\nu\sigma}b_{\rho\sigma}=\beta_{\nu\rho}, \tag{a}$$

получаем

$$d\bar{x}_\nu=\sum_{\rho=1}^{r}\beta_{\nu\rho}d\bar{p}_\rho. \tag{b}$$

82. Задача 4. Выразить длину бесконечно малого перемещения через его приведенные компоненты по координатам системы.

Применив обобщенные координаты p_ρ, получаем последовательным применением уравнений (78b) и (79) к уравнению (57d)

$$ds^2=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}a_{\rho\sigma}dp_\rho dp_\sigma=\sum_{\rho=1}^{r}dp_\rho d\bar{p}_\rho=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}d\bar{p}_\rho d\bar{p}_\sigma.$$

83. Для прямоугольных координат, в частности, получаем

$$ds^2=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}dx_\nu^2=\sum_{\nu=1}^{3n}dx_\nu d\bar{x}_\nu=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m}{m_\nu}d\bar{x}_\nu^2.$$

84. Задача 5a. Выразить угол между двумя бесконечно малыми перемещениями из любого положения через приведенные компоненты обоих перемещений вдоль прямоугольных координат.

Последовательным применением (73) и (74) к уравнению (56) получим

$$dsds'\cos\widehat{ss'}=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}dx_\nu dx'_\nu=\sum_{\nu=1}^{3n}dx_\nu d\bar{x}'_\nu=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{3n}d\bar{x}_\nu dx'_\nu=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m}{m_\nu}d\bar{x}_\nu d\bar{x}'_\nu.$$

Для ds и ds' следует подставить их значения через dx_ν из (83).

85. Задача 5b. Выразить угол между двумя бесконечно малыми перемещениями из общего положения через компоненты обоих перемещений вдоль обобщенных координат p_ρ.

Применяя (78) и (79) к уравнению (58), получаем последовательно следующие формы:

$$dsds'\cos\widehat{ss'}=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}a_{\rho\sigma}dp_\rho dp'_\sigma=\sum_{\rho=1}^{r}dp_\rho d\bar{p}'_\rho=$$

$$=\sum_{\rho=1}^{r}d\bar{p}_\rho dp'_\rho=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}d\bar{p}_\rho d\bar{p}'_\sigma.$$

Значения для ds и ds', выраженные через $d\bar{p}_\rho$, берем из (82).

Задача 6. Выразить угол между двумя бесконечно малыми перемещениями через углы, которые они образуют с координатами системы. 86.

Разделим последнее из уравнений (85) на $dsds'$ и, замечая, что по (78a)

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}=\frac{d\bar{p}_\rho}{ds}, \qquad \sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{s'p_\rho}=\frac{d\bar{p}_{\rho'}}{ds},$$

получим решение задачи в виде

$$\cos\widehat{ss'}=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}\sqrt{a_{\rho\rho}a_{\sigma\sigma}}\cos\widehat{sp_\rho}\cos\widehat{s'p_\sigma}.$$

В частности для прямоугольных координат 87.

$$\cos\widehat{ss'}=\sum_{\nu=1}^{3n}\cos\widehat{sx_\nu}\cos\widehat{s'x_\nu}.$$

Заметим, что уравнение (86) предполагает одно и то же положение обоих перемещений, в то время как (87) свободно от этого предположения.

Теорема. r углов, которые образуются любым направлением в данном положении с направлением r обобщенных координат, связаны уравнением 88.

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}\sqrt{a_{\rho\rho}a_{\sigma\sigma}}\cos\widehat{sp_\rho}\cos\widehat{sp_\sigma}=1.$$

Это уравнение получается, если мы в (86) направления ds и ds' будем считать одинаковыми.

89. Следствие. В частности, для $3n$ углов, которые образуются любым перемещением системы с прямоугольными координатами, будет иметь место следующее соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \cos^2 \widehat{sx_\nu} = 1.$$

УПОТРЕБЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

90. Обозначения. Длина бесконечно малого перемещения ds определяется через значения координат положения p_ρ и их изменения dp_ρ. Обозначим через частный дифференциал $\partial_p ds$ изменение ds, если мы изменим лишь p_ρ и dp_ρ, а все остальные переменные оставим постоянными. Наоборот, если мы будем рассматривать (что тоже допустимо) координаты p_ρ и компоненты $d\bar{p}_\rho$ вдоль них как независимые определяющие элементы ds, то соответствующий частный дифференциал для ds обозначим через $\partial_q ds$.

Возможны и другие частные дифференциалы ds, но для нашей цели нет нужды их обозначать специально. Для них оставим в резерве обычный знак ∂ds, определяющийся каждый раз более детально специальной оговоркой.

91. Замечание 1. Можно представить компоненты перемещения вдоль координат как частные производные длины перемещения, именно:

$$d\bar{p}_\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial_p ds^2}{\partial dp_\rho} = ds\,\frac{\partial_p ds}{\partial dp_\rho}.$$

Для этого нужно продифференцировать уравнение (57d) и использовать (78).

92. Замечание 2. Можно выразить наклон бесконечно малого перемещения относительно координаты p_ρ в виде частных производных длины этого перемещения, именно:

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho} = \frac{\partial_p ds}{\partial dp_\rho}.$$

При этом необходимо иметь в виду (91) и (78).

Примечание. Если, в частности, применяются прямоугольные координаты, то уравнения (91) и (92) примут вид 93.

$$d\bar{x}_\nu = ds\,\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}, \tag{a}$$

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\cos\widehat{sx_\nu} = \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}, \tag{b}$$

в которых смысл частных дифференциалов определяется из предыдущего.

Замечание 3. Можно выразить dp_ρ в виде частных производных длины бесконечно малого перемещения, именно: 94.

$$dp_\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial_q ds^2}{\partial d\bar{p}_\rho} = ds\,\frac{\partial_q ds}{\partial d\bar{p}_\rho}.$$

При этом необходимо учитывать уравнения (82) и (79).

Замечание 4. Для всех частных производных ds, независимо от индекса τ, существуют соотношения 95.

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau}, \tag{a}$$

ибо имеет место

$$\frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}dp_\rho dp_\sigma$$

и

$$\frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} = \frac{1}{2ds}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}d\bar{p}_\rho dp_\sigma.$$

Действительно, если подставить в первую форму из (79) значения dp_ρ и dp_σ, выраженные через $d\bar{p}_\rho$ и $d\bar{p}_\sigma$, а также использовать соотношения (68) и вторую форму, то придем к уравнению (a). Если проделаем те же операции над второй формой, то придем также к соотношению (a).

Теорема. Если положение бесконечно малого перемещения претерпевает дважды такие изменения, при которых один раз изменения координат сохраняют их первоначальное значение, а другой раз 96.

— компоненты вдоль координат, то изменения длины перемещения в обоих случаях равны и противоположны по знаку.

Так как во втором случае $\delta dp_\rho = 0$, а координаты p_ρ получают изменение δp_ρ, то изменение длины перемещения есть

$$\delta_\cdot ds = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_p ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau. \qquad (a)$$

В первом случае должно быть $\delta d\bar{p}_\rho = 0$, а координаты подвергаются тем же самым изменениям δp_ρ, следовательно,

$$\delta_q ds = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_q ds}{\partial p_\tau} \delta p_\tau. \qquad (b)$$

Из обоих уравнений (a) и (b), а также (95) следует:

$$\delta_p ds = -\delta_q ds, \qquad (c)$$

что доказывает теорему.

ПУТИ СИСТЕМ

97. Объяснение 1. Совокупность одновременно представленных положений, которые система пробегает при переходе из одного положения в другое, называется путем системы. Путь можно рассматривать и как одновременно представленную совокупность перемещений, которые система претерпевает при переходе из одного положения в другое.

98. Объяснение 2. Часть пути, которая ограничивается двумя бесконечно близкими положениями, называется элементом пути. Элемент пути является бесконечно малым перемещением; он имеет длину и направление.

99. Объяснение 3. Направлением пути системы в некотором определенном ее положении называется направление элемента пути бесконечно близкого к этому положению.

Длиной пути системы между двумя ее положениями называется сумма длин элементов пути между этими положениями.

Аналитическое представление. Путь системы анали- 100.
тически представляется заданием координат его положений, как функций одного и того же выбранного переменного. Каждому значению переменного соответствует определенное положение пути. В качестве независимой переменной может служить одна из координат. Часто целесообразно в качестве независимого переменного применять длину пути от определенного положения. Производные по этому выбранному переменному, т. е. по длине пути, будем обозначать по Лагранжу, т. е. посредством штрихов.

Определение 1. Путь системы называется прямым, если он 101.
имеет во всех положениях одинаковое направление.

Следствие. Если система описывает прямой путь, то ее от- 102.
дельные точки описывают прямые линии, длины которых (считая от начального положения) всегда пропорциональны друг другу (38).

Определение 2. Путь системы называется криволинейным, 103.
если меняется направление его при переходе от одного положения к другому. Скорость изменения направления с длиной пути называется кривизной пути. Кривизна пути есть, таким образом предельное значение отношения между разностью направлений и расстоянием двух соседних элементов пути.

Примечание. Значение кривизны поэтому определяется не- 104.
зависимо от аналитического представления, в частности, независимо от выбора координат.

Задача 1. Выразить кривизну c пути через изменение углов, 105
которые образует направление пути с прямоугольными координатами системы.

Пусть $d\varepsilon$ есть угол, образуемый направлениями пути в начале и конце элемента пути ds. Тогда по (103)

$$c = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Пусть, далее, $\cos\widehat{sx_\nu}$ есть косинус угла, образуемого направлением пути в начале ds с x_ν и пусть $\cos\widehat{sx_\nu} + d\cos\widehat{sx_\nu}$ обозначает то же самое, но в конце элемента ds. Тогда по (87)

$$\cos d\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{3n} \cos \widehat{sx_\nu} [\cos \widehat{sx_\nu} + d \cos \widehat{sx_\nu}].$$

Однако по (89)

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \cos^2 \widehat{sx_\nu} = 1$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{3n} [\cos \widehat{sx_\nu} + d \cos \widehat{sx_\nu}]^2 = 1.$$

Если вычтем из суммы двух последних уравнений удвоенное первое, тогда получим

$$2 - 2\cos(d\varepsilon) = d\varepsilon^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} [d \cos \widehat{sx_\nu}]^2.$$

Разделив это выражение на ds^2, получим решение задачи:

$$c^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} \left(\frac{d \cos \widehat{sx_\nu}}{ds}\right)^2.$$

106. Задача 2. Выразить кривизну пути через изменение прямоугольных координат системы вдоль пути.

Имея в виду (72) и (100), получаем

$$\cos \widehat{sx_\nu} = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x'_\nu,$$

следовательно,

$$(\cos \widehat{sx_\nu})' = \sqrt{\frac{m_\nu}{m}} \cdot x''_\nu.$$

Таким образом, в соответствии со (105) решение задачи будет

$$mc^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu x''^2_\nu.$$

107. Задача 3. Выразить кривизну пути через изменения прямоугольных координат, рассматриваемых как функции произвольного переменного τ. По правилам дифференциального исчисления находим

$$x''_\nu = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx_\nu}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{ds}\right) = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^3 \cdot \left(\frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2} - \frac{dx_\nu}{d\tau} \cdot \frac{d^2s}{d\tau^2}\right).$$

Если подставим это в c^2 и заметим, что по (55)

$$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{d\tau}\right)^2, \tag{a}$$

и, следовательно,

$$m\frac{ds}{d\tau} \cdot \frac{d^2s}{d\tau^2} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \frac{dx_\nu}{d\tau} \cdot \frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}, \tag{b}$$

то решение задачи получаем в виде

$$m\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^4 c^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\right)^2 - m\left(\frac{d^2s}{d\tau^2}\right)^2, \tag{c}$$

причем для $ds/d\tau$ и $d^2s/d\tau^2$ подставляются их значения из предыдущих уравнений.

Задача 4. Выразить кривизну пути через изменения обобщенных координат p_ρ системы вдоль пути. 108.

Введем в (106) вместо прямоугольных координат обобщенные p_ρ, выразив x''_ν через p'_ρ и p''_ρ. Сперва имеем по (57b):

$$x'_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \alpha_{\nu\rho} p'_\rho.$$

Следовательно,

$$x''_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} (\alpha_{\nu\rho} p''_\rho + \alpha'_{\nu\rho} p'_\rho)$$

и

$$x''^2_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} (\alpha_{\nu\rho}\alpha_{\nu\sigma} p''_\rho p''_\sigma + 2\alpha'_{\nu\rho}\alpha_{\nu\sigma} p'_\rho p''_\sigma + \alpha'_{\nu\rho}\alpha'_{\nu\sigma} p'_\rho p'_\sigma).$$

Образуем эти уравнения для всех ν, умножим каждое на $\frac{m_\nu}{m}$ и сложим. Слева получим c^2; справа — суммирование по ν проводим при помощи уже введенных величин $\alpha_{\rho\sigma}$ в первых двух членах. Суммирование в первом члене дает непосредственно по (57c) $a_{\rho\sigma}$. В качестве множителя при p''_σ во втором члене получаем:

$$2\sum_{\rho=1}^{r} p'_\rho \sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\alpha'_{\nu\rho} = 2\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau \sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial\alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\tau} =$$

$$=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau \sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}\alpha_{\nu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\rho}\right)=$$

$$=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau\left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}+\frac{\partial a_{\tau\sigma}}{\partial p_\rho}-\frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}\right)= \qquad \text{(по 63)}$$

$$=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} p'_\rho p'_\tau\left(2\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}-\frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}\right).$$

При переходе от второй формы к третьей и от четвертой к пятой проводим вычисление, учитывая, что если $F(\rho, \sigma)$ — любое выражение, содержащее индексы ρ и σ, то имеет место тождество

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}F(\rho, \sigma)\equiv\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}F(\sigma, \rho). \qquad \text{(a)}$$

Множитель третьего члена не может быть выражен через a_ρ. Для того чтобы исключить в конечном результате обозначения, отнесенные к прямоугольным координатам, положим

$$a_{\rho\sigma\lambda\mu}=\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{m_\nu}{m}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\lambda}\cdot\frac{\partial\alpha_{\nu\rho}}{\partial p_\mu}. \qquad \text{(b)}$$

Тогда окончательно получим решение:

$$c^2=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\left\{a_{\rho\sigma}p''_\rho p''_\sigma+\sum_{\tau=1}^{r}\left(2\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}-\frac{\partial a_{\rho\tau}}{\partial p_\sigma}\right)p'_\rho p'_\tau p''_\sigma+\right.$$

$$\left.+\sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}a_{\rho\sigma\lambda\mu}p'_\rho p'_\sigma p'_\lambda p'_\mu\right\}. \qquad \text{(c)}$$

Здесь $a_{\rho\sigma}$ являются введенными в (57) функциями p_ρ; а $a_{\rho\sigma\lambda\mu}$ есть функции тех же переменных. Число этих новых функций равно $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$.

Раздел 4

ВОЗМОЖНЫЕ И НЕВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Объяснение 1. Между некоторым количеством материаль- 109.
ных точек существует связь, если на основании знания части компонент перемещений этих точек можно высказать суждение об остальных компонентах.

Объяснение 2. Если между точками системы существуют 110.
связи, то часть мыслимых перемещений системы исключается из рассмотрения, а именно те перемещения, которые противоречат условиям связей. И наоборот, если среди мыслимых перемещений часть выключается из рассмотрения, то между точками системы имеется связь. Связи между точками системы определяются полностью, если для каждого мыслимого перемещения системы известно, допустимо оно или не допустимо.

Объяснение 3. Перемещения, допустимые к рассмотрению, 111.
называются возможными. Остальные перемещения называются невозможными. Возможные перемещения называются также виртуальными. Возможными они называются всегда, когда в качестве суженного понятия они сопоставляются с мыслимыми перемещениями. Виртуальными перемещениями они называются тогда, когда они противопоставляются, как более широкое понятие, более узким, например действительным, перемещениям.

Объяснение 4. Возможными путями называются пути, 112.
составленные из возможных перемещений. Возможные положения — это все те положения, которые достигаются возможными путями.

113. Объяснение 5. Все положения возможных путей есть возможные положения. Однако отсюда не следует, что каждый мыслимый путь через возможные положения является возможным. Более того, перемещение между соседними бесконечно близкими возможными положениями может быть невозможным.

114. Объяснение 6. Между двумя возможными положениями всегда можно провести возможный путь. Ибо если провести от какого-нибудь действительного положения до обоих возможных положений лишь один возможный путь, то оба эти пути вместе составляют уже возможный путь между обоими положениями. Если бы к одному из этих положений не вел возможный путь, то это положение не являлось бы возможным.

115. Определение 1. Связь системы называется непрерывной, если она не противоречит следующим трем положениям:

1) что задание всех возможных конечных перемещений содержится в задании возможных бесконечно малых перемещений (непрерывность конечного);

2) что каждое возможное бесконечно малое перемещение может следовать вдоль прямого непрерывного пути (непрерывность бесконечно малого);

3) что каждое бесконечно малое перемещение, возможное из данного положения, возможно также и из другого бесконечно близкого положения; при этом не учитываются отклонения порядка расстояния между этими положениями или более высокого порядка (непрерывная изменчивость возможных перемещений).

116. Следствие. Если в системе имеются лишь непрерывные связи, то сумма двух любых возможных бесконечно малых перемещений из общего положения есть также возможное перемещение из того же положения (наложение бесконечно малых перемещений).

Ибо в соответствии со (115,3) отдельные перемещения должны следовать друг за другом, и в соответствии со (115,2) прямое перемещение из начального положения в конечное является также возможным перемещением.

117. Определение 2. Связь системы называется внутренней, если она касается лишь взаимных положений точек системы.

Следствие. Если в системе имеются лишь внутренние связи, 118.
то каждое перемещение, которое не изменяет конфигурации, есть возможное перемещение, и наоборот.

Определение 3. Связь системы называется закономерной 119.
(gesetzmässiger), если она не зависит от времени.

Закономерная связь заключается, таким образом, в том утверждении, что среди мыслимых перемещений системы в любое время (или независимо от времени), одни перемещения являются возможными, другие — невозможными.

Примечание. Пока мы имеем дело только с геометрией 120.
системы, разница между закономерной и незакономерной связью теряется, ибо все наше исследование в этом случае не касается вопроса о времени. Если связи системы для двух моментов времени различны, то будем говорить (при теперешних рассуждениях), что имеем дело с двумя различными системами. Иначе говоря, в первой книге мы будем иметь дело только со связями закономерными.

Определение 1. Система материальных точек называется 121.
материальной системой, если она подчинена только непрерывным связям.

Определение 2. Материальная система называется свобод- 122.
ной, если она подчинена только внутренним и закономерным связям.

Определение 3. Материальная система называется голо- 123.
номной, если все мыслимые непрерывные движения между двумя возможными положениями являются возможными движениями. Это название означает, что система должна подчиняться интегральным (ὅλοζ) законам (νόμοζ), в то время как вообще материальная система подчиняется только дифференциальным законам (ср. (132) и далее).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Замечание. Система материальных точек удовлетворяет 124.
условиям материальной системы, если дифференциалы ее прямоугольных координат подчинены лишь однородным линейным

уравнениям, коэффициенты которых являются непрерывными функциями возможных значений координат.

Первый вид непрерывности (115) предполагается, если вообще говорят о дифференциалах координат системы; оба других вида непрерывности удовлетворяются при ограничении допустимых дифференциалов.

125. Обратное положение. Если система материальных точек удовлетворяет условиям материальной системы, то дифференциалы ее прямоугольных координат должны подчиняться однородным линейным уравнениям, коэффициенты которых есть непрерывные функции возможных значений координат.

Для доказательства рассмотрим возможные положения системы и возможные перемещения из них. Для любого из этих произвольно выбранных перемещений $3n$ изменений dx_ν координат относятся как

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \ldots : \varepsilon_{13n}.$$

Если под du_1 будем понимать любую бесконечно малую величину, то группой уравнений

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu} du_1$$

дано определение группы возможных перемещений. Среди последних либо содержатся либо не содержатся все возможные перемещения. Если имеет место последнее, тогда мы должны взять второе перемещение, которое не может быть представлено в этой форме, и пусть для него $3n$ изменений координат dx_ν относятся, как

$$\varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \ldots : \varepsilon_{23n}.$$

Если понимать под du_2 вторую произвольную бесконечно малую величину, то группой уравнений

$$dx_\nu = \varepsilon_{1\nu} du_1 + \varepsilon_{2\nu} du_2,$$

согласно (116), дано более общее определение группы возможных перемещений. Как и раньше, в этой системе либо содержатся все возможные перемещения, либо нет. Если имеет место последнее, то, как и ранее, введем новую величину du_3 и будем

продолжать этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всех возможных перемещений. Если мы ввели таким образом $3n$ величин du_λ, то выражения

$$dx_\nu = \sum_{\lambda=1}^{3n} \varepsilon_{\lambda\nu} du_\lambda \qquad \text{(a)}$$

представляют все возможные перемещения системы тогда, когда все мыслимые перемещения — возможные, т. е. связей между точками системы не существует. Таким образом, все возможные перемещения системы могут быть выражены при помощи уравнений условий (связей) в форме

$$dx_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} \varepsilon_{\lambda\nu} du_\lambda,$$

где во всех случаях $l \leqslant 3n$.

Для того чтобы можно было удовлетворить этой форме произвольно выбранными значениями dx_ν, достаточно, чтобы dx_ν удовлетворяли $3n - l$ однородным линейным уравнениям, которые могут быть получены исключением du_λ из (a). Величины $\varepsilon_{\lambda\nu}$ должны быть непрерывными функциями положения (115,3). Согласно (124) приращения dx_ν не должны подчиняться дальнейшим ограничениям.

Примечание. Число и содержание уравнений между dx_ν, 126
которые мы выводили по указанному способу (125a), не должны зависеть от специального выбора используемых перемещений. Ибо если мы воспользуемся другими перемещениями, и поэтому выразим dx_ν через другие величины dv_λ, то эти значения dx_ν можно подставить в те уравнения, которые получены при помощи исключения. Если бы эти уравнения не удовлетворялись тождественно, то это означало бы, что dv_λ являются зависимыми, что противоречило бы определению этих величин. Следовательно, эти уравнения должны удовлетворяться тождественно и, следовательно, они не могут различаться от аналогичных уравнений или их линейных комбинаций, которые получались бы при помощи исключения dv_λ. Число уравнений, которые получаются при помощи dv_λ, не может быть больше числа уравнений, получаемых при помощи du_λ; оно

не может быть также и меньшим, ибо в противном случае обратный способ докажет, что du_λ не независимы друг от друга.

127. Следствие 1. Связь материальной системы можно полностью аналитически выразить заданием одного возможного положения системы и системы однородных линейных уравнений между дифференциалами ее прямоугольных координат.

Ибо соотношения между этими дифференциалами не могут, согласно (125), быть даны иначе, чем такой системой уравнений. Это не препятствует тому, что между координатами существуют также конечные уравнения. Однако эти конечные уравнения можно полностью заменить заданием единственного возможного положения и равного числа однородных линейных уравнений между дифференциалами. Эти последние, однако, не могут противоречить непосредственно данным дифференциальным уравнениям. Они получаются, следовательно, или из этих последних, или они добавляются для достижения полного описания.

128. Обозначение. Уравнения, которые выражают связь материальной системы в прямоугольных координатах, будут в дальнейшем записываться так:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} dx_\nu = 0.$$

При этом мы считаем, что существует i таких уравнений и, следовательно, ι принимает значения от 1 до i. Величины $x_{\iota\nu}$ следует рассматривать как непрерывные функции x_ν.

129. Следствие 2. Связь материальной системы, положения которой выражаются через обобщенные координаты, аналитически можно описать через задание одного возможного положения и через систему однородных линейных уравнений между дифференциалами этих координат.

Употреблением обобщенных координат p_ρ, число которых $r < 3n$, связь между точками системы уже предполагается существующей. По (128) мы можем в уравнения, описывающие связь через прямоугольные координаты, внести значения dx_ν через dp_ρ из уравнений (57b). Полученные линейные однородные уравнения

таковы, что среди них $3n - r$ выполняются тождественно, вследствие существования $3n - r$ уравнений, выражающих $3n$ величин x_ν через r величин p_ρ. Остальные $k = i - 3n + r$ уравнений между dp_ρ вполне эквивалентны совместным уравнением между dx_ν, и достаточны поэтому (127) вместе с заданием возможного положения для полного описания связей системы.

Обозначение. Уравнения, выражающие связи в обобщенных координатах p_ρ, в будущем будем записывать в виде 130.

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} dp_\rho = 0.$$

Число этих уравнений принимаем равным k и, следовательно, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Величины $p_{\varkappa\rho}$ есть непрерывные функции p_ρ.

Примечание. Уравнения (128) и (130) называют дифференциальными уравнениями или также уравнениями условий системы. 131.

Теорема. Если возможно из дифференциальных уравнений материальной системы получить такое же число конечных уравнений между координатами системы, то система будет голономной (123). Ибо координаты каждого возможного положения будут удовлетворять конечным уравнениям. Разности координат двух смежных положений удовлетворяют, таким образом, такому же числу однородных линейных дифференциальных уравнений. И так как они не противоречат такому же числу заданных дифференциальных уравнений системы, то они должны удовлетворить также и этим последним. Перемещения между какими-нибудь двумя возможными положениями есть, таким образом, возможные перемещения, что и доказывает утверждаемое. 132.

Обратное положение. Если материальная система голономная, то её дифференциальные уравнения допускают такое же число конечных или интегральных уравнений между координатами. 133.

Если рассматривают r координат системы, между дифференциалами которых существует k уравнений, то $r - k$ переменных будут являться независимыми переменными. Перейдем от произвольного начального положения системы по различным возможным путям к некоторому положению, для которого независимые координаты имеют определенное значение. Если переходят затем при помощи непрерывно меняющихся путей к непрерывно меняющимся значениям остальных координат, т. е. к различным положениям, то эти положения будут возможными положениями, а перемещения между ними — возможными перемещениями. Мы получим, таким образом, систему значений дифференциалов, отличную от нуля, которая удовлетворяет данным дифференциальным уравнениям, даже если первые $r-k$ этих дифференциалов равны нулю. Это невозможно, так как уравнения линейные однородные. Следовательно, мы приходим всегда к одним и тем же значениям не только первых $r-k$, но и остальных координат. Последние, таким образом, есть определенные функции первых; k конечных уравнений, которые это выражают, есть интегралы этих дифференциальных уравнений, так как они не могут им противоречить.

СВОБОДА ДВИЖЕНИЯ

134. Определение. Число бесконечно малых изменений координат материальной системы, которые могут быть взяты произвольно, называется числом свобод движения или числом степеней свободы.

135. Примечание 1. Число свобод системы равно числу ее координат, уменьшенному на число дифференциальных уравнений системы.

136. Примечание 2. Число свобод не зависит от выбора координат. В обозначении (128), (130) число свобод равно $r-k$, точно так же по (129) равно $3n-i$, следовательно, оно всегда то самое число при любых числах r и k.

137. Примечание 3. Число свобод не меняется с положением системы. Так как связь непрерывна, то число свобод в смежных положениях не может различаться на конечную величину. Следовательно, так как непрерывное изменение этого числа исключается, то нет этого изменения и в конечно удаленных положениях.

138. Примечание 4. Доказательство положения (125) содержит решение следующей задачи: найти число свобод движения полностью известной материальной системы.

Число l вспомогательных величин du_χ, найденных по методу этого доказательства, и является искомым числом.

Если известно заранее, что возможное положение системы может быть представлено при помощи r обобщенных координат p_ρ, то можно в доказательстве вместо x_ν употреблять эти обобщенные координаты.

Определение. Координаты системы, изменения которых независимы от изменения остальных, называются свободными координатами системы. 139.

Следствие. Свободная координата не встречается в дифференциальных уравнениях и, наоборот, всякая координата, которая не встречается в дифференциальных уравнениях системы, есть свободная координата. 140.

Примечание 1. Является данная координата свободной или нет, зависит от выбора остальных одновременно употребляемых координат. Ибо если некоторая координата не входит в дифференциальные уравнения системы и если мы заменяем одну из координат, входящих в дифференциальные уравнения, функцией последних и той первой в качестве новой координаты, то эта первая координата теряет свойство быть свободной координатой, которое она имела до сих пор. 141.

Примечание 2. В свободной системе каждая координата абсолютного положения является свободной координатой (ср. (118) и (122)). 142.

Теорема. Если все возможные положения материальной системы могут быть представлены свободными координатами, то система является голономной (123). 143.

Каждое перемещение системы между возможными положениями выражается через систему значений дифференциалов свободных координат; каждая такая система значений есть возможная, так как она не подчиняется условиям, а поэтому каждое перемещение между двумя возможными положениями есть возможное перемещение.

Обратное положение. В голономной системе все возможные положения можно представить через свободные координаты. 144.

Если имеют голономную систему, между r координатами которой существует k дифференциальных уравнений, то возможно k координат выразить через $r-k$ остальных (ср. 133). Эти $r-k$ произвольно выбранных координат, следовательно, вполне определяют положение системы и ими можно пользоваться как свободными. Точно такой же смысл, очевидно, могут иметь и любые $r-k$ функции от первоначальных r координат.

145. Примечание 1. Число свободных координат голономной системы равно числу ее свобод движения.

146. Примечание 2. Если число координат материальной системы равно числу ее свобод движения, то эти координаты есть свободные координаты, а система — голономная.

Если бы существовало хотя бы только одно дифференциальное уравнение между координатами, то число координат было бы уже больше числа свобод движения. Вообще число координат не может быть меньше числа свобод движения.

147. Примечание 3. Возможное положение неголономной системы невозможно полностью выразить только через свободные координаты. Противное утверждение противоречило бы (143).

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ К ВОЗМОЖНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

148. Теорема. Если возможно представить r компонент $d\bar{p}_\rho$ перемещения ds вдоль координат p_ρ через k величин $\gamma_\varkappa$ в виде

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\varkappa=1} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa,$$

где $p_{\varkappa\rho}$ определяются уравнениями условий (130), то данное перемещение является перпендикулярным к каждому возможному перемещению из того же положения.

Пусть ds' — длина любого возможного перемещения из одного и того же положения, а dp'_ρ — изменения координат для этого перемещения. Если умножим теперь предыдущие уравнения на dp'_ρ и сложим их, то мы получим, принимая во внимание (85) и (130), следующее соотношение:

$$\sum_{\rho=1}^{r} d\bar{p}_\rho dp'_\rho = ds\, ds' \cos\widehat{ss'} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \gamma_\varkappa \sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} dp'_\rho = 0;$$

следовательно, $\cos\widehat{ss'} = 0$; $\widehat{ss'} = 90^\circ$, ч. т. д.

Добавление. Общее число r компонент $d\bar{p}_\rho$ перемещения ds вдоль координат p_ρ можно однозначно определить, если мы знаем k из них и знаем также, что это перемещение перпендикулярно ко всем возможным перемещениям системы. 149.

Пусть опять dp'_ρ — изменения p_ρ для любого возможного перемещения. При помощи k уравнений условий можно выразить k из них как однородную линейную функцию остальных $r-k$ и подставить эти значения в уравнение

$$\sum_{\rho=1}^{r} d\bar{p}_\rho dp'_\rho = 0.$$

Так как в этих уравнениях теперь dp'_ρ совершенно произвольные, то коэффициенты при них должны равняться нулю. Это даст $r-k$ однородных линейных уравнений между $d\bar{p}_\rho$, из которых однозначно определим $r-k$ через k остальных.

Обратное положение. Если мыслимое перемещение перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы, то возможно r компонент $d\bar{p}_\rho$ вдоль p_ρ выразить при помощи подходящего определения через k величин $\gamma_\varkappa$ в виде 150.

$$d\bar{p}_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa.$$

А именно, если мы определим величины $\gamma_\varkappa$ из каких-либо k этих уравнений и вычислим с помощью их все компоненты, то мы должны прийти к заданным значениям $d\bar{p}_\rho$. Ибо вычисленное таким образом перемещение расположено, в соответствии с (148), перпендикулярно ко всем возможным и имеет с заданным перемещением k общих компонент; оно имеет, следовательно, с этим последним, согласно (149), общими все r компонент вдоль координат p_ρ.

Раздел 5

ПУТИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ [24]

I. ПРЯМЕЙШИЕ ПУТИ

151. Определение 1. Элемент пути материальной системы называется более прямым, чем другой, если он имеет меньшую кривизну.

152. Определение 2. Прямейшим элементом пути называется возможный элемент пути, являющийся более прямым, чем все другие возможные элементы путей, которые имеют с ним общее положение и направление.

153. Определение 3. Путь называется прямейшим, если все элементы его прямейшие.

154. Аналитическое представление. Все элементы пути, среди которых есть прямейший элемент, имеют общими положение и направление, т. е. имеют одинаковые значения координат и первых производных от координат по независимым переменным. Кривизна их выражается через вторые производные от координат; благодаря им и различаются элементы пути. Ясно, что вторые производные должны быть такими функциями координат и первых производных, которые обращали бы кривизну прямейшего элемента в минимум.

Уравнения, которые выражают это условие, должны выполняться для всех положений прямейшего пути; они, таким образом, являются одновременно дифференциальными уравнениями такого пути.

155. Задача 1. Выразить дифференциальные уравнения прямейшего пути в прямоугольных координатах материальной системы.

Возьмем в качестве независимого переменного длину пути. Так как имеются в виду возможные пути, то $3n$ величин x'_ν, согласно (128) и (100), подчиняются i уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} x'_\nu = 0. \tag{a}$$

Следовательно, $3n$ величин x''_ν подчиняются i уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} x''_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n} \sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} x'_\nu x'_\mu = 0, \tag{b}$$

которые получаются из (a) посредством дифференцирования.

Предполагая (b) непротиворечивыми, мы должны так определить x''_ν, чтобы они обращали кривизну c (106), или, что то же самое, $\frac{1}{2} c^2$ в минимум, а именно:

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} x''^2_\nu \tag{c}$$

должно принять минимальное значение.

По правилам дифференциального исчисления поступаем следующим образом: умножаем каждое из уравнений (b) на неопределенный множитель, который для ι-го уравнения обозначим Ξ; далее суммируем частные производные по каждой из величин x''_ν левой части полученных уравнений с частными производными, взятыми по той же величине от формы (c), которую следует привести к минимуму; приравниваем полученные суммы нулю и получаем $3n$ уравнений вида

$$\frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} \Xi_\iota = 0, \tag{d}$$

которые с i уравнениями (b) дают для определения величин x''_ν и Ξ_ι $3n+i$ линейных однородных уравнений; следовательно, имея в виду (c), найдем наименьшую кривизну. Выполнение уравнения (d) для всех положений возможного пути является, таким образом, необходимым условием для того, чтобы путь был прямейшим, и уравнения (d) являются, следовательно, искомыми дифференциальными уравнениями прямейшего пути.

Примечание 1. Уравнения (d) представляют также и доста- 156.
точные условия минимума, ибо вторые производные

$$\frac{\partial^2 c^2}{\partial x''_\nu \partial x''_\mu}$$

исчезают, коль скоро ν и μ различные; если же ν и μ равны, то они необходимо положительны. Следовательно, значение кривизны не может иметь других значений, кроме минимума. Выполнение уравнений (d) для всех положений возможного пути есть, следовательно, достаточное условие того, чтобы путь был прямейшим.

157. Примечание 2. Имея в виду (72), можно уравнения (d) записать так:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\frac{d}{ds}\cos\widehat{sx_\nu}=-\sum_{\iota=1}^{i}x_{\iota\nu}\Xi_\iota.$$

Уравнения (d) дают, следовательно, представление о том, как должно меняться направление вдоль пути, чтобы путь был прямейшим; именно, каждое из этих уравнений дает изменение наклона пути относительно прямоугольной координаты.

158. Задача 2. Выразить в обобщенных координатах дифференциальные уравнения прямейшего пути материальной системы.

Возьмем в качестве независимого переменного длину пути. Координаты p_ρ и их производные p'_ρ удовлетворяют k уравнениям (130)

$$\sum_{\rho=1}^{r}p_{\chi\rho}p'_\rho=0, \tag{a}$$

а величины p''_ρ — уравнениям

$$\sum_{\rho=1}^{r}p_{\chi\rho}p''_\rho+\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial p_{\chi\rho}}{\partial p_\sigma}p'_\rho p'_\sigma=0. \tag{b}$$

Среди всех значений p''_ρ, удовлетворяющих этим уравнениям, имеются те, которые обращают кривизну c или $\frac{1}{2}c^2$, а следовательно и правую часть уравнения (108c), в минимум. Если мы поступим по правилам дифференциального исчисления, как в (155), т. е. введем множитель Π_χ, на который умножим χ-е из уравнений (b), то получим необходимое условие минимума в виде r уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{r}a_{\rho\sigma}p''_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right)p'_\sigma p'_\tau+\sum_{\chi=1}p_{\chi\rho}\Pi_\chi=0, \tag{c}$$

где ρ для каждого уравнения получает определенное значение от 1 до r. Вместе с уравнениями (b) они образуют $r+k$ неоднородных линейных уравнений для определения $r+k$ величин p''_ρ и Π_χ, а затем по (108) определяется наименьшая кривизна. Выполнение уравнений (c) для всех положений пути является необходимым условием для того, чтобы путь был прямейшим.

Примечание 1. Выполнение уравнений (c) является вместе 159.
с тем и достаточным условием для минимума кривизны, а следовательно, и для прямейшего пути. Ибо (108) есть лишь трансформация (106) для кривизны. Следовательно, здесь, как и в (156), найдем, что уравнения (c) достаточны для минимума кривизны, т. е. для прямейшего пути.

Примечание 2. Согласно (75) имеем 160.

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}=\sum_{\sigma=1}^{r}a_{\rho\sigma}p'_\sigma,$$

следовательно,

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\right)=\sum_{\sigma=1}^{r}a_{\rho\sigma}p''_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}p'_\sigma p'_\tau.$$

Поэтому уравнения (158) можно записать в таком виде:

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}p'_\sigma p'_\tau-\sum_{\chi=1}^{k}p_{\chi\rho}\Pi_\chi.$$

Уравнения (158d) дают, следовательно, представление о том, как должно меняться направление вдоль пути, чтобы путь оставался прямейшим. Именно, каждое из этих уравнений дает изменение наклона пути относительно определенной координаты p_ρ.

161. Теорема. Из данного положения в данном направлении возможен один и только один прямейший путь. Ибо если задано положение и направление, то уравнения (158) и (155) определяют, и притом однозначно, значения для изменения направления; следовательно, они через данные величины однозначно определяют начальное положение и направление в ближайшем элементе пути; таким же образом — для следующего элемента и т. д. до бесконечности.

162. Следствие. Вообще невозможно провести прямейший путь между двумя любыми положениями.

Ибо множество возможных перемещений из данного положения равно числу свобод движения системы. Многообразие возможных направлений в одном положении и поэтому многообразие прямейших путей из него на единицу меньше. Многообразие положений, которые достигаются из данного положения прямейшими путями, также точно равно числу степеней свободы. Однако многообразие возможных положений может равняться числу применяемых координат, а поэтому вообще число их больше, чем число направлений.

163. Замечание 1. Для того чтобы все прямейшие пути материальной системы, положения которой отмечаются при помощи p_ρ, можно было представить через уравнения только между этими координатами, не является необходимым знание каких-либо $3n$ функций, полностью определяющих положение отдельных точек системы как функции p_ρ. Для этого достаточно, чтобы наряду с уравнениями условий системы, выраженными через p_ρ, были даны $\frac{1}{2}r(r+1)$ величин $a_{\rho\sigma}$ как известные функции от p_ρ.

Ибо дифференциальные уравнения прямейшего пути (158d) могут быть записаны явно, когда наряду с $p_{\chi\rho}$ заданы $a_{\rho\sigma}$ как функции p_ρ.

164. Замечание 2. Для того чтобы прямейший путь материальной системы, положение которой определяется через p_ρ, выразить через уравнения между p_ρ, достаточно, наряду со знанием уравнений условий между p_ρ, знание любого бесконечно малого

возможного перемещения как функции этих координат p_ρ и их изменений.

Именно, если ds является указанной длиной в требуемой форме, то будет иметь место (57):

$$a_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 ds^2}{\partial dp_\rho \partial dp_\sigma}.$$

Замечание 3. Для того чтобы знать значение кривизны 165.
в каждом положении прямейшего пути, недостаточно знания $\frac{1}{2}r(r+1)$ функций $a_{\rho\sigma}$. Необходимо еще знание $\frac{1}{4}r^2(r+1)^2$ функций $a_{\rho\sigma\lambda\mu}$.

Знание положения всех отдельных точек как функций p_ρ также не является необходимым для определения кривизны.

II. КРАТЧАЙШИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПУТИ

Определение 1. Кратчайшим путем материальной системы 166.
между двумя ее положениями называется возможный путь, длина которого меньше, чем длина какого-нибудь другого бесконечно близкого пути между теми же положениями.

Замечание 1. Определение это не исключает того, что 167.
между двумя положениями можно построить несколько кратчайших путей. Кратчайший из этих путей называется абсолютно кратчайшим путем. Он есть одновременно кратчайший путь, который вообще возможен между этими положениями.

Замечание 2. Между какими-нибудь двумя возможными 168.
положениями материальной системы всегда возможен по крайней мере один кратчайший путь. Ибо возможные пути между возможными положениями всегда существуют (114); среди них, следовательно, есть и абсолютно кратчайший путь, т. е. тот, который короче, чем соседние пути. Эти последние он должен иметь вследствие предположенной непрерывности (115) и (121).

Замечание 3. Кратчайший путь между двумя положениями 169.
есть одновременно кратчайший путь между двумя любыми промежуточными положениями этого пути. Каждая часть кратчайшего пути есть также кратчайший путь.

170. Замечание 4. Длина кратчайшего пути различается лишь на бесконечно малую величину высшего порядка от длины всех соседних путей между теми же положениями. Длина же перемещения, которое переводит соседний путь в кратчайший, есть бесконечно малая величина первого порядка.

171. Определение 2. Геодезическим путем материальной системы называется каждый путь, длина которого между двумя любыми бесконечно малую положениями отличается лишь на величину бесконечно малую высшего порядка от длины любого другого бесконечно близкого соседнего пути между теми же положениями.

172. Замечание 1. Каждый кратчайший путь между двумя положениями есть геодезический путь.

Следовательно, определение (171) не содержит внутреннего противоречия, ибо существуют пути, удовлетворяющие этому определению.

173. Замечание 2. Между двумя любыми возможными положениями всегда возможен по крайней мере один геодезический путь (168), (172).

174. Замечание. 3. Геодезический путь не является обязательно кратчайшим путем между какими-либо двумя его положениями.

Из определений нельзя заключить, что каждый геодезический путь является также кратчайшим путем, и простые примеры показывают, что существуют геодезические пути, которые не являются одновременно кратчайшими путями между данными концевыми положениями. Такие примеры могут заимствоваться уже из геометрии отдельных материальных точек, т. е. из обычной геометрии, и могут, следовательно, рассматриваться как известные.

175. Замечание 4. Если между двумя положениями существует один единственный геодезический путь, то он является в то же время кратчайшим и именно абсолютно кратчайшим. В противном случае возникает по (168) и (172) противоречие с предположением.

176. Замечание 5. Геодезический путь есть всегда кратчайший путь между любыми двумя достаточно близкими соседними его положениями, находящимися на конечном расстоянии друг от друга.

Пусть между двумя любыми положениями рассматриваемого геодезического пути будет некоторое количество других геодезических путей. С одним из этих путей должен совпадать абсолютно кратчайший путь (172) между этими положениями. Если теперь мы будем сближать оба положения вдоль рассматриваемого геодезического пути, то длина этого пути и одновременно длина абсолютно кратчайшего пути будут стремиться к нулю, в то время как остальные геодезические пути остаются конечными. По крайней мере, начиная от некоторого конечного расстояния между положениями, геодезический путь, вдоль которого оба положения сближаются, должен совпасть с абсолютно кратчайшим из них.

Аналитическое представление. Необходимым и достаточным аналитическим условием геодезического пути является требование, чтобы интеграл элементов пути (99), а именно 177.

$$\int ds,$$

взятый между какими-нибудь двумя положениями пути, имел вариацию, равную нулю, если координатам положений пути сообщают любые непрерывные вариации, предполагая лишь, что: 1) эти вариации исчезают на пределах интеграла и 2) вариации координат и их дифференциалы удовлетворяют уравнениям условий системы. Необходимое и достаточное условие для этого получается из дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять координаты пути, рассматриваемые как функции любой переменной, и которые, следовательно, будут дифференциальными уравнениями геодезического пути.

Выполнение этих дифференциальных уравнений для всех точек возможного пути является одновременно необходимым условием (172) того, чтобы путь был кратчайшим и, следовательно, эти дифференциальные уравнения являются одновременно дифференциальными уравнениями кратчайшего пути. Исчезание вариации интеграла, однако, не является достаточным условием 178.

того, чтобы путь между двумя конечными положениями был кратчайшим. Для этого необходимо, чтобы для каждой допустимой вариации координат вторая вариация интеграла была существенно положительной. Для достаточно близких соседних положений пути, которые удовлетворяют дифференциальные уравнения, это условие (по (176)) всегда выполняется автоматически.

179. Задача 1. Представить в прямоугольных координатах дифференциальные уравнения геодезического пути материальной системы.

$3n$ прямоугольных координат x_ν, которые мы сперва рассматриваем как функции любой переменной, должны до и после вариации удовлетворять i уравнениям (по (128))

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} dx_\nu = 0. \tag{a}$$

$3n$ вариаций δx_ν связаны, следовательно, i уравнениями, получаемыми из (a) варьированием:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} d\delta x_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n}\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu dx_\nu = 0. \tag{b}$$

Так как длина ds элемента пути зависит не от x_ν, а только от dx_ν, то ее вариация есть:

$$\delta ds = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\delta dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} d\delta x_\nu.$$

Предпосылая это, следует положить

$$\delta \int ds = \int \delta ds = 0. \tag{c}$$

По правилам вариационного исчисления мы умножим каждое уравнение (b) на пока произвольные функции ξ_ι от координат x_ν и складываем сумму левых сторон полученных уравнений, которая равна нулю, с вариациями элементов интеграла. Интегрированием по частям мы исключаем дифференциалы вариаций; наконец, полагаем равными нулю множители при произвольных вариа-

циях δx_ν. Таким образом, получаем $3n$ дифференциальных уравнений вида

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\right) + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} d\xi_\iota - \sum_{\iota=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{3n}\left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi_\iota dx_\mu = 0, \tag{d}$$

которые вместе с уравнениями (a) образуют $3n+i$ уравнений для определения $3n+i$ функций x_ν и ξ_ι. Эти дифференциальные уравнения являются необходимыми условиями для исчезновения вариации интеграла. Всякий геодезический путь удовлетворяет этим же уравнениям, следовательно, это есть искомое решение задачи.

Примечание 1. Дифференциальные уравнения (179) являются 180.
также и достаточными условиями для того, чтобы путь был геодезическим. Ибо если они выполняются, то вариация интеграла $\int ds$ равна членам, которые при интегрировании по частям остаются под знаком интеграла; следовательно, обозначив через 0 и 1 верхний и нижний пределы, будем иметь

$$\delta\int ds = \sum_{\nu=1}^{3n}\left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu}\xi_\iota\right)\delta x_\nu\right]_0^1.$$

Если мы допустим, таким образом, что для двух каких-нибудь положений пути вариации δx_ν исчезают, то исчезает также вариация интеграла между теми же положениями, как пределами этого интеграла, и поэтому требуемое для геодезических путей достаточное аналитическое условие выполнено согласно (177).

Примечание 2. Если мы пользуемся в качестве независи- 181.
мой переменной длиной пути, то, принимая во внимание (55) и (100), можно уравнения (179d) после деления на ds записать так:

$$\frac{m_\nu}{m} x''_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu}\xi'_\iota - \sum_{\iota=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{3n}\left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi_\iota x'_\mu = 0, \tag{a}$$

которые вместе с i уравнениями, полученными в результате дифференцирования (179a), т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} x''_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n}\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} x'_\nu x'_\mu = 0, \qquad \text{(b)}$$

определяют $3n+i$ неоднородных линейных уравнений для определения $3n+i$ величин x''_ν и ξ'_ι и, таким образом, определяют эти величины как однозначные функции x_ν, x'_ν и ξ_ι.

182. Примечание 3. Имея в виду (72), уравнения (181a) можно записать в такой форме:

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\frac{d}{ds}(\cos \widehat{sx_\nu}) = -\sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu}\xi'_\iota + \sum_{\mu=1}^{3n}\sum_{\iota=1}^{i}\left(\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\right)\xi_\iota x'_\mu.$$

Уравнения (181a) дают, следовательно, представление о том, как должно изменяться направление при заданном начале, для того чтобы путь был геодезическим. Именно, каждое отдельное уравнение дает изменение наклона относительно определенной прямоугольной координаты.

183. Задача 2. Выразить дифференциальные уравнения геодезического пути материальной системы в ее обобщенных координатах p_ρ.

r координат p_ρ связаны k уравнениями (130)

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\, dp_\rho = 0 \qquad \text{(a)}$$

и, следовательно, r вариации связаны уравнениями

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\, d\delta p_\rho + \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\,\delta p_\sigma\, dp_\rho = 0. \qquad \text{(b)}$$

Длина бесконечно малого перемещения ds зависит теперь не только от дифференциалов dp_ρ, но также от самих p_ρ. Следовательно,

$$\delta ds = \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial ds}{\partial dp_\rho}\, d\delta p_\rho + \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial ds}{\partial p_\rho}\,\delta p_\rho.$$

Предпосылая это, следует положить, что

$$\delta\int ds = \int \delta ds \qquad \text{(c)}$$

должен быть равен нулю.

Поступая по правилам вариационного исчисления точно так, как в (179), и обозначая множитель $\varkappa$-го уравнения через $\pi_\varkappa$, получим r дифференциальных уравнений вида

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\rho}\right) - \frac{\partial ds}{\partial p_\rho} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\, d\pi_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\sigma=1}^{r}\left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa\, dp_\sigma = 0,$$

которые вместе с уравнениями (a) дают $r+k$ дифференциальных уравнений для $r+k$ функций p_ρ и $\pi_\varkappa$. Эти уравнения, являющиеся необходимыми условиями для исчезновения вариации, выполняются, следовательно, для всех положений геодезического пути; таким образом, они содержат решение поставленной задачи.

Примечание 1. Дифференциальные уравнения (183d) являются также достаточными условиями для того, чтобы путь был геодезическим. Ибо если они выполняются, то вариация длины пути (ср. (180)) удовлетворяет условию 184.

$$\delta\int ds = \sum_{\rho=1}^{r}\left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dp_\rho} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\pi_\varkappa\right)\delta p_\rho\right]_0^1$$

Если мы допускаем, таким образом, что для каких-нибудь двух положений пути вариации δp_ρ исчезают, то исчезает и вариация интеграла между теми же положениями как пределами, и поэтому для геодезического пути требуемые аналитические условия выполняются (177).

Примечание 2. Если в качестве независимой переменной выберем длину пути, то найдем r уравнений геодезического пути, получающихся вследствие того, что мы (183d) делим на 185.

ds и для ds подставляем его значение, выраженное через p_ρ и dp_ρ, согласно (57d):

$$\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} p''_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right) p'_\sigma p'_\tau + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\pi'_\varkappa - \\ - \sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\sigma=1}^{r}\left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa p'_\sigma = 0, \tag{a}$$

которые вместе с вытекающими из (183a) k уравнениями

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\rho\varkappa} p''_\rho + \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma} p'_\rho p'_\sigma = 0 \tag{b}$$

дают $r+k$ неоднородных линейных уравнений для $r+k$ величин p''_ρ и $\pi'_\varkappa$ представляют вместе с тем эти величины как однозначные функции p_ρ, p'_ρ и $\pi_\varkappa$.

186. Примечание 3. Введя в качестве независимого переменного длину пути и имея в виду уравнения (92), получим уравнения (185a) в виде

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} p'_\sigma p'_\tau - \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\pi'_\varkappa + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\left(\frac{\partial p_{\varkappa\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\right)\pi_\varkappa p'_\sigma,$$

т. е. получим уравнения, характеризующие изменения направления геодезического пути с изменением его длины. А именно, каждое отдельное уравнение указывает, как изменяется наклон относительно соответствующей координаты p_ρ.

187. Замечание 1. Геодезический путь не может быть определен только заданием положения и направления одного его элемента, ибо из данного положения в данном направлении возможно провести бесконечное число геодезических путей. Если для некоторого положения пути даны p_ρ, p'_ρ и k величин $\pi_\varkappa$, то они по (185) однозначно определяют ближайший элемент и, следовательно, продолжение пути возможно однозначно определенным образом. Задание направлений пути в этом заданном положении дает только величины p_ρ и p'_ρ и, следовательно, не удовлетворяет условиям геодезического пути, но допускает, если нет налицо особых отношений, k-кратную бесконечность геодезических путей.

Замечание 2. Если дифференциальные уравнения рассмотренной системы не допускают интеграла, то из $2r$ величин p_ρ 188.
и p'_ρ, которые определяют положение и направление в нем, $2r-k$ величин могут быть выбраны произвольно, а именно, r величин и $r-k$ величин. Эти $2r-k$ произвольных величин вместе с k произвольными величинами $\pi_\varkappa$ в данном положении могут рассматриваться как $2r$ произвольных постоянных, которые вместе с дифференциальными уравнениями (185a) определяют геодезический путь и которые также должны содержаться в интегралах тех уравнений, ибо по (173) возможно связать каждое возможное положение системы с каждым другим через геодезический путь. Именно, если дифференциальные уравнения системы не допускают конечных соотношений между p_ρ, то каждая мыслимая система значений этих величин является также возможной системой значений; следовательно, произвольное начальное и конечное положение системы определяется через $2r$ произвольных значений этих координат.

Замечание 3. Для каждого интеграла дифференциальных 189.
уравнений материальной системы число постоянных, которые определяют геодезический путь, уменьшается на 2.

Именно, если уравнения условий дают l конечных уравнений между p_ρ, то можно из r координат принять за произвольные лишь $r-l$, и, следовательно, из $2r$ величин p_ρ и p'_ρ произвольных будет только $2r-l-k$. В этом случае дифференциальные уравнения могут быть приведены, в результате умножения на подходящие множители и сложения, к такому виду, что l из них дают непосредственно интегрируемые уравнения, а именно, те уравнения, которые получаются в результате дифференцирования l конечных соотношений. Для каждого такого уравнения с индексом λ имеем

$$\frac{\partial p_{\lambda\sigma}}{\partial p_\rho}-\frac{\partial p_{\lambda\rho}}{\partial p_\sigma}=0.$$

Следовательно, в этом случае соответствующие величины π_λ исчезают из (125a), и все p''_ρ и π'_χ однозначно определяются через $k-l$ значений остальных π_χ. В общем, следовательно, остаются еще $2r-2l$ произвольных определяющих элементов; два элемента исчезли для каждого конечного уравнения.

Впрочем, эти $2r-2l$ произвольных постоянных все же достаточны, как это и должно быть, чтобы каждое возможное положение связать с каждым другим возможным положением посредством геодезического пути; ибо если между p_ρ существует l конечных уравнений, то достаточно провести путь так, чтобы два его положения имели общими $r-l$ координат с каждым данным положением. Совпадение для остальных координат будет иметь место само по себе.

III. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРЯМЕЙШИМИ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ПУТЯМИ

190. Теорема. Для голономных систем каждый прямейший путь есть геодезический, и наоборот.

Для доказательства воспользуемся прямоугольными координатами. Если система голономная, то имеется i уравнений условий, которые через умножение на подходяще выбранные множители и через сложение в необходимом порядке получат интегрируемую форму, т. е. левые части их совпадут с точными дифференциалами интегралов уравнений условий. Для каждой системы значений ι, μ, ν имеем тогда

$$\frac{\partial x_{\iota\mu}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}=0, \tag{a}$$

и дифференциальные уравнения геодезического пути будут тогда в соответствии с (181a)

$$\frac{m_\nu}{m}x''_\nu+\sum_{\iota=1}^{i}x_{\iota\nu}\xi'_\iota=0. \tag{b}$$

Эти последние отличаются только по обозначению от уравнений прямейшего пути (155d):

$$\frac{m_\nu}{m}x''_\nu+\sum_{\iota=1}^{i}x_{\iota\nu}\Xi_\iota=0, \tag{c}$$

так как ни ξ_ι, ни Ξ_ι не встречаются в остальных уравнениях. Каждый возможный путь, который после подходящего определения ξ_ι удовлетворяет первому из этих уравнений, будет удовлетворять и второму, если положим $\Xi_\iota=\xi'_\iota$. Точно так же, каждое решение уравнений (c) является одновременно решением уравнений (b). Удовлетворение уравнениям (b) и (c) является достаточным условием того, чтобы путь был геодезическим или также прямейшим.

Следствие 1. В голономной системе между какими-нибудь 191.
двумя возможными положениями в возможном направлении возможен лишь единственный геодезический путь (161).

Следствие 2. В голономной системе между какими-нибудь 192.
двумя возможными положениями возможен по крайней мере один прямейший путь (173).

Теорема. Если в материальной системе каждый геодезиче- 193
ский путь есть одновременно и прямейший, то система голономная, ибо из каждого возможного положения в данном направлении, по (161), возможен лишь единственный прямейший путь, следовательно, в соответствии с предпосылкой, единственный геодезический путь.

Точно так же, согласно (173), каждое возможное положение может быть достигнуто одним из этих путей. Следовательно, число свобод движения системы равно числу ее независимых координат, т. е., согласно (146), система голономная.

194. Следствие. Если система не голономная, то каждый геодезический путь, вообще говоря, не является в то же время прямейшим. Это следует из того, что в каждом направлении здесь возможно провести лишь один прямейший, но много геодезических путей ((161) и (187)).

195. Замечание. В неголономных системах каждый прямейший путь, вообще говоря, не является геодезическим. Это положение будет доказано, коль скоро мы укажем такую систему, в которой прямейшие пути не находятся среди геодезических. Примем ради простоты, что между r координатами p_ρ системы имеется лишь одно единственное неинтегрируемое уравнение условий, и пусть оно имеет вид

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{1\rho} p'_\rho = 0. \tag{a}$$

Предположим, что каждый прямейший путь есть в то же время и геодезический, тогда возможно было бы для каждой возможной системы значений p_ρ и p'_ρ так определить по крайней мере одну систему значений p''_ρ, чтобы одновременно удовлетворить как уравнениям (158c), так и (185a). Поэтому для всех возможных p_ρ и p'_ρ должны быть удовлетворены уравнения, которые получаются от попарного вычитания указанных уравнений:

$$p_{1\rho}(\Pi_1 - \pi'_1) + \pi_1 \sum_{\sigma=1}^{r} \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{1\rho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = 0.$$

Это есть r уравнений для величины $(\Pi_1 - \pi'_1)/\pi_1$; они совместны друг с другом лишь тогда, когда для всех пар значений ρ и τ удовлетворяется уравнение

$$\frac{1}{p_{1\rho}} \sum_{\sigma=1}^{r} \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_{1\rho}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma = \frac{1}{p_{1\tau}} \sum_{\sigma=1}^{r} \left(\frac{\partial p_{1\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial p_{1\tau}}{\partial p_\sigma}\right) p'_\sigma.$$

Если теперь в $r-1$ этих друг от друга независимых уравнений одну из величин p'_ρ выразим при помощи уравнений (a) через остальные, то отношения между последними будут совершенно произвольными величинами. Коэффициент при каждой такой величине должен равняться нулю. Мы получим, таким образом, как необходимое следствие нашего предположения $(r-1)^2$ уравнений, связывающих r функций $p_{1\rho}$ и их r^2 первых частных производных. В особых случаях эти уравнения могут быть совокупно удовлетворены, ибо они удовлетворяются, если уравнения (a) интегрируемые. Однако вообще мы не имеем права предполагать функции $p_{1\rho}$ подчиненными даже одному единственному условию и вообще, следовательно, наше предположение было недопустимо. Этим самым утверждение доказано.

Выводы (от (190) до (195)). В голономных системах понятия геодезического и прямейшего пути совпадают; в неголономных системах эти понятия имеют в общем совершенно различные значения. 196.

Раздел 6

О ПРЯМЕЙШЕМ РАССТОЯНИИ В ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

Предварительные замечания. 1. В этом отделе мы будем иметь дело лишь с голономными системами. Поэтому мы можем пользоваться здесь только свободными координатами p_ρ, число которых равно числу r свобод движения системы и, следовательно, не зависит от нашего произвола. 197.

2. Так как в этом случае прямейший путь и геодезический совпадают (196), то r общих дифференциальных уравнений этих путей можно записать в таком виде: 198.

$$d\left(\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho}\right) = \frac{\partial ds}{\partial p_\rho},$$

которые получены из (186) или из (160), принимая во внимание, что для выбранных координат величины $p_{\chi\rho} = 0$.

199. 3. Вследствие того же замечания, мы получаем для вариации длины пути, которая удовлетворяет предыдущим дифференциальным уравнениям, следовательно, для длины геодезического пути, на основании (184):

$$\delta \int ds = \sum_{\rho=1}^{r} \left[\frac{\partial ds}{\partial dp_\rho} \delta p_\rho \right]_0^1$$

или, учитывая (92),

$$\delta \int ds = \sum_{\rho=1}^{r} \left[\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho}\, \delta p_\rho \right]_0^1,$$

в которых величины δp_ρ означают вариацию координат концевых положений, а $\cos \widehat{sp_\rho}$ — косинусы направлений концевых элементов рассматриваемого геодезического пути.

I. ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ

200. Определение. Под поверхностью положений мы понимаем вообще непрерывно связанную совокупность положений. В частности, совокупность возможных положений голономной системы есть такая поверхность, которая характеризуется тем, что координаты принадлежащих ей положений удовлетворяют единственному конечному уравнению.

Совокупность положений, принадлежащих одновременно двум или нескольким поверхностям, мы определяем как пересечение этих поверхностей.

201. Примечание 1. Через каждое положение поверхности можно провести бесконечное множество путей. Мы говорим, что эти пути принадлежат поверхности, или лежат на поверхности. То же самое можно сказать об элементе пути и вообще о бесконечно малых перемещениях.

202. Примечание 2. Путь, который не принадлежит поверхности, имеет с ней, вообще говоря, конечное число общих положений. Ибо путь аналитически представляется $r-1$ уравнениями между координатами его положений, а поверхность — через единственное уравнение. По предположению, первые уравнения независимы от последнего. Следовательно, все они образуют r уравнений для r координат общих положений, которые и дадут конечное число действительных решений.

Примечание 3. Из каждого положения поверхности возможно провести $(r-1)$-кратное многообразие бесконечно малых перемещений на поверхности. 203.

Так как из r независимых изменений координат, которые характеризуют перемещение, $r-1$ можно выбрать произвольно, то r-ая координата определяется тем, что перемещение должно принадлежать данной поверхности.

Теорема 1. Всегда возможно определить одно и только 204.
одно направление, которое перпендикулярно к $r-1$ различным бесконечно малым перемещениям системы (197) из того же самого положения. Пусть $d_\tau p_\rho$ — изменение координаты p_ρ для τ-го из указанных $r-1$ перемещений, пусть δp_ρ — изменение для координат p_ρ любого другого перемещения. Если последнее должно быть перпендикулярным к указанным перемещениям, то необходимым и достаточным условием этого является то, чтобы выполнялись $r-1$ уравнений вида (58):

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} d_\tau p_\rho \delta p_\sigma = 0.$$

Они представляют $r-1$ неоднородных линейных уравнений для $r-1$ отношений δp_ρ между собой; следовательно, они могут быть удовлетворены при помощи систем значений этих отношений. В особых случаях может возникнуть неопределенность; например, она должна возникнуть в том случае, если какие-нибудь три из $r-1$ перемещений выбраны так, что каждое перемещение, перпендикулярное к двум из них, будет перпендикулярно также и к третьему.

Теорема 2. Если направление перпендикулярно к $r-1$ раз- 205.
личным перемещениям, которые принадлежат поверхности в этом положении, то оно будет перпендикулярно и к любому пере-

мещению, которое принадлежит поверхности в этом положении.

Перемещения, принадлежащие поверхности в данном положении, характеризуются тем, что соответствующие dp_ρ удовлетворяют единственному линейному однородному уравнению, получающемуся при помощи дифференцирования уравнения поверхности. Если $r-1$ систем значений $d_\tau p_\rho$ удовлетворяют этому уравнению, то ему удовлетворяют также величины

$$dp_\rho = \sum_{\tau=1}^{r-1} \lambda_\tau d_\tau p_\rho,$$

где λ_τ есть произвольные множители. dp_ρ принадлежат, следовательно, к произвольному перемещению на поверхности; причем каждое перемещение на поверхности может быть представлено в этой форме, так как правая часть написанного уравнения содержит $r-1$-кратное многообразие.

По предположению (204)

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} d_\tau p_\rho \delta p_\sigma = 0;$$

умножая эти уравнения на λ_τ и складывая, получаем

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} dp_\rho \delta p_\sigma = 0,$$

что и требовалось доказать (58).

206. Определение. Перемещение из данного положения поверхности называется перпендикулярным, если оно перпендикулярно к каждому перемещению, принадлежащему поверхности в данном положении.

207. Следствие 1. В каждом положении поверхности существует одно и только одно направление, перпендикулярное к поверхности.

208. Следствие 2. В каждом положении поверхности всегда возможно построить один и только один прямейший путь, перпендикулярный к поверхности.

Определение 1. Семейством поверхностей мы называем совокупность поверхностей, уравнения которых (200) различаются лишь через значения входящих в них констант. 209.

Обозначение. Каждое семейство поверхностей может быть представлено уравнением вида 210.

$$R = \text{const},$$

которое получается решением уравнения одной из поверхностей относительно изменяющихся констант и в котором правая часть обозначает значения этих констант, а левая есть функция координат p_ρ. Каждой поверхности этого семейства соответствует определенное значение стоящей справа константы, т. е. определенное значение функции R. Поверхности, для которых значения R отличаются лишь на бесконечно малые величины dR, называются соседними или смежными поверхностями.

Определение 2. Ортогональной траекторией семейства поверхностей называется путь, который это семейство пересекает перпендикулярно, т. е. который расположен перпендикулярно к каждой поверхности семейства в общих положениях (202). 211.

Теорема. Чтобы путь был ортогональной траекторией семейства 212.

$$R = \text{const}, \tag{a}$$

необходимо и достаточно, чтобы он в каждом его положении удовлетворял r уравнениям вида

$$\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho} = f \frac{\partial R}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

в которых $\widehat{sp_\rho}$ есть наклон пути в отношении координаты p_ρ, а f есть функция p_ρ, изменяющаяся при изменении положения и идентичная для всех r уравнений.

Мы конструируем в рассматриваемом положении пути бесконечно малое перемещение, длина которого равна $d\sigma$, при прохождении которого p_ρ должно измениться на δp_ρ, а R — на δR, и которое должно образовать с рассматриваемым путем угол $\widehat{s\sigma}$. Если мы умножим уравнения (b) на δp_ρ и сложим, то получим по (78a) и (85)

$$\delta\sigma \cos \widehat{s\sigma} = \sum_{\rho=1}^{r} f \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \delta p_\rho = f\delta R. \qquad (c)$$

Если перемещение $\delta\sigma$ принадлежит поверхности семейства (a), т. е. той поверхности, которая имеет рассматриваемое положение, общее с путем, то $\delta R = 0$, следовательно, $\widehat{s\sigma} = 90°$. Направление пути поэтому перпендикулярно к пересекаемой поверхности (206), и уравнения (b) дают достаточное условие для того, чтобы это выполнялось для каждого положения. Они дают также и необходимые условия, так как (исключая особые случаи) в каждом положении лишь одно единственное направление удовлетворяет поставленному требованию.

213. Добавление 1. Расстояние по перпендикуляру между двумя смежными поверхностями рассматриваемого семейства в каком-нибудь положении равно fdR. Ибо если возьмем теперь перемещение $\delta\sigma$, которое по величине и направлению будет совпадать с частью перпендикулярной траектории, которая расположена между обеими поверхностями, то $\delta\sigma$ совпадает с рассматриваемым расстоянием, а $\widehat{s\sigma} = 0$ и, следовательно, утверждаемое вытекает из уравнения (212c).

214. Добавление 2. Встречаемая в уравнениях ортогональных траекторий величина f получается как корень уравнения

$$\frac{1}{f^2} = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma}.$$

Это уравнение получается подстановкой в выражение (88) значений направляющих косинусов по (212b). Корень выбираем в зависимости от того, будем ли мы брать положительное направление траектории по возрастающим или убывающим значениям R.

II. ПРЯМЕЙШЕЕ РАССТОЯНИЕ

Определение. Прямейшим расстоянием между двумя положениями голономной системы называется длина соединяющего их прямейшего пути. 215.

Примечание. Два положения могут иметь более чем одно прямейшее расстояние. Среди них имеются длины кратчайших путей, а следовательно также и длина абсолютно кратчайшего пути. Если говорят о прямейшем расстоянии двух положений как об однозначно определенном, то имеют в виду длину абсолютно кратчайшего пути. 216.

Аналитическое представление. Прямейшее расстояние двух положений можно представить как функцию этих положений. Пусть исходное положение, отмечаемое значком 0, имеет координаты $p_{\rho 0}$, а конечное, отмечаемое цифрой 1, имеет координаты $p_{\rho 1}$; направление прямейшего пути будем считать положительным от 0 к 1. Прямейшее расстояние является тогда функцией этих $2r$ величин и обозначается через S. Символ S называется аналитическим выражением прямейшего расстояния, или просто прямейшим расстоянием. 217.

Примечание 1. Функция S есть, вообще говоря, многозначная функция ее независимых переменных. Из ветвей этой функции одна и только одна ветвь исчезает одновременно с исчезающей разностью между $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$. Об этой ветви (216) речь идет тогда, когда говорится об S как об однозначно определенной функции. 218.

Примечание 2. Функция S есть симметричная функция относительно $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$ в том смысле, что она не меняет своего значения, если $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$ меняют одновременно свои значения для всех ρ, ибо при этой замене мы меняем лишь начальное и конечное положения. 219.

Замечание. Если прямейшее расстояние системы дается в каких-нибудь свободных координатах ее, то все прямейшие пути вместе с тем выражаются также через эти координаты, причем сведения о том, каким образом положение отдельных мате- 220.

риальных точек зависит от выбранных координат, для нас не необходимы.

Ибо прямейшее расстояние каких-нибудь двух соседних положений системы является одновременно длиной бесконечно малого перемещения между ними; если, однако, это последнее может быть представлено при помощи выбранных координат, то высказанное утверждение оправдывается в соответствии с (163).

221. Задача. Получить из прямейшего расстояния системы выражение для длины ее бесконечно малого перемещения.

В S вместо $p_{\rho 0}$ подставим p_ρ, а вместо $p_{\rho 1}$ подставим $p_\rho + dp_\rho$ и предположим dp_ρ весьма малым. Мы видели уже (57d), что расстояние обоих положений представляется как корень из однородной квадратической функции dp_ρ. Сама S не допускает разложения в ряд по возрастающим степеням dp_ρ, однако S^2 допускает, и в этом разложении первыми не уничтожающимися членами должны быть квадратные члены. Следовательно, если обозначим при помощи черты, что в соответствующей функции должно быть положено $p_{\rho 0} = p_{\rho 1} = p_\rho$, то получим для расстояния обоих положений, т. е. для величины перемещения,

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} \frac{\overline{\partial^2 S^2}}{\partial p_{\rho 1} \partial p_{\sigma 1}} dp_\rho dp_\sigma,$$

следовательно, функции $a_{\rho\sigma}$ есть

$$a_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial^2 S^2}}{\partial p_{\rho 1} \partial p_{\sigma 1}}.$$

Таким же вычислением получаем

$$a_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial^2 S^2}}{\partial p_{\rho 0} \partial p_{\sigma 0}}.$$

Этими выражениями $a_{\rho\sigma}$ можно пользоваться для того, чтобы косвенно получить из функции S прямейшие пути. Следующая теорема прямо приводит к достижению той же цели.

222. Теорема. Поверхность, все положения которой имеют одинаковое прямейшее расстояние от данного положения, пересекается

ортогонально всеми прямейшими путями, которые проходят через данное положение.

Пусть $p_{\rho 0}$ — координаты данного положения, а $p_{\rho 1}$ — координаты любого положения поверхности. Мы переходим от этого положения к другому положению поверхности, для которого $p_{\rho 1}$ изменилось на $dp_{\rho 1}$; при этом прямейшее расстояние от фиксированного положения, по предположению, не изменилось. Однако соответственно (199) оно должно измениться на $\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp}_{\rho 1} dp_{\rho 1}$, если $\widehat{sp}_{\rho 1}$ обозначает угол, который образует прямейший путь в положении 1 с направлением p_ρ. Следовательно, имеем

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp}_{\rho 1} dp_{\rho 1} = 0.$$

Это уравнение показывает, что прямейший путь расположен перпендикулярно к перемещению $dp_{\rho 1}$ (85) и (78а). Так как это имеет силу для любого перемещения, которое принадлежит поверхности в положении 1, то отсюда и следует утверждение (206).

Следствие 1. Прямейшие пути, проходящие через данное положение, являются ортогональными траекториями семейства поверхностей, удовлетворяющих условию, что все их положения имеют одинаковое прямейшее расстояние от данного положения. 223.

Следствие 2. Все прямейшие пути, которые проходят через фиксированное положение 0, удовлетворяют r уравнениям 224.

$$\sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp}_{\rho 1} = \frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}, \qquad (a)$$

в которых $p_{\rho 1}$ — координата переменного положения пути, а $\cos \widehat{sp}_{\rho 1}$ — направляющий косинус пути в этом положении. Действительно, уравнения (а) есть уравнения ортогональных траекторий семейства поверхностей, которое представляется уравнением

$$S = \text{const}. \qquad (b)$$

Если бы S являлась произвольной функцией координат $p_{\rho 1}$, то, согласно (212), уравнение ортогональных траекторий было бы

$$\sqrt{a_{\rho\rho 1}}\cos\widehat{sp}_{\rho 1}=f\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{c}$$

а перпендикулярное расстояние между соседними поверхностями было бы равно $f dS$. По природе же нашей функции S (217, 222) это расстояние равно самому dS. Следовательно,

$$f=1$$

и уравнение (c) принимает вид (a).

225. Примечание 1. Уравнение (224a), являющееся дифференциальным уравнением первого порядка, можно рассматривать как дифференциальное уравнение прямейшего пути в конечной форме, коль скоро $p_{\rho 0}$ будем рассматривать как переменную величину, а $2r$ величин $p_{\rho 1}$ и $\widehat{sp}_{\rho 1}$ как константы.

В самом деле, если мы определим из этих уравнений ряд положений 0 таким образом, что при фиксированном значении $p_{\rho 1}$ значения $\widehat{sp}_{\rho 1}$ остаются неизменными, то мы получим такие положения 0, исходя из которых прямейшие пути, проведенные в положение 1, будут иметь в этом положении фиксированное направление. Так как этим свойством может обладать лишь один единственный прямейший путь, то все определенные таким образом положения должны принадлежать этому пути, который, следовательно, и представляется уравнениями (224a).

226. Примечание 2. В доказательстве теоремы (222) мы с равным правом можем рассматривать положение 1 как фиксированное, а положение 0 как переменное. В этом случае вместо уравнений (224a) будут иметь место уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho 0}}\cos\widehat{sp}_{\rho 0}=-\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}.$$

Различие в знаке правой части объясняется тем, что теперь переход из фиксированного положения, согласно (217), является переходом в отрицательном направлении. Уравнения (226a), как и

уравнения (224a), представляют дифференциальные уравнения прямейшего пути. Они представляют собой дифференциальные уравнения прямейших путей, проходящих через фиксированное положение $p_{\rho 1}$, и одновременно они представляют конечные уравнения определенного пути, проходящего через положение $p_{\rho 0}$ и образующего в нем с координатами углы $\widehat{sp}_{\rho 0}$.

Следствие 3. Прямейшее расстояние S системы удовлетворяет как функция $p_{\rho 0}$ дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка: 227.

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial S}{\partial p_{\sigma 0}}=1, \tag{a}$$

и как функция $p_{\rho 1}$ — дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial S}{\partial p_{\sigma 1}}=1. \tag{b}$$

Эти уравнения следуют из (214) и (224d). Они получаются также и непосредственно подстановкой направляющих косинусов прямейшего пути, выражаемых через S согласно (224a) и (226a) в уравнение (88), которому удовлетворяет угол, образуемый любым направлением с координатами.

Теорема. Если построить во всех положениях некоторой поверхности прямейшие пути, перпендикулярные к этой поверхности, и отложить вдоль этих путей равные длины, то получим новую поверхность, которая будет пересекать все эти прямейшие пути также ортогонально. 228.

Положения первоначальной поверхности обозначим через 0, а положения построенной заново поверхности через 1. Пусть $\widehat{sp}_{\rho 0}$ и $\widehat{sp}_{\rho 1}$ — углы, образованные некоторым прямейшим путем с координатами на первой и, соответственно, на второй поверхности. Если мы перейдем от рассматриваемого прямейшего пути к смежному, то длина прямейшего пути изменится, согласно (199), на

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp}_{\rho 1} dp_{\rho 1} - \sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 0}} \cos \widehat{sp}_{\rho 0} dp_{\rho 0},$$

где $dp_{\rho 1}$ и $dp_{\rho 0}$ обозначают изменения p_ρ в положениях 1 и 0. Согласно построению, это изменение равно нулю, и точно так же, согласно построению, будем иметь

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 0}} \cos sp_{\rho 0} dp_{\rho 0} = 0,$$

так как путь расположен перпендикулярно к первоначальной поверхности.

Поэтому имеем также

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{sp}_{\rho 1}\, dp_{\rho 1} = 0.$$

Так как $dp_{\rho 1}$ могут обозначать любое перемещение на поверхности положений 1, то тем самым теорема наша доказана.

229. Следствие 1. Ортогональные траектории произвольного семейства поверхностей, каждая из которых во всех ее положениях имеет то же самое перпендикулярное прямейшее расстояние от смежных поверхностей, являются прямейшими путями.

230. Следствие 2. Если R является функцией r координат p_ρ такого свойства, что уравнение

$$R = \text{const} \tag{a}$$

представляет семейство поверхностей, каждая из которых имеет одинаковое перпендикулярное прямейшее расстояние dR от смежной поверхности во всех ее положениях, то уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp}_\rho = \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \tag{b}$$

будут уравнениями ортогональных траекторий, т. е. уравнениями прямейших путей, а именно, дифференциальными уравнениями первого порядка для этих путей.

Действительно, если бы R была совершенно произвольной функцией p_ρ, то уравнения (212b) представляли бы перпендикулярные траектории семейства (a) и, согласно (213), перпендикулярное расстояние между двумя соседними поверхностями было бы равно fdR. Соответственно нашей особой предпосылке это расстояние является постоянным и равно dR. Следовательно, $f = 1$. Поэтому уравнения (212b) переходят в указанные выше уравнения (b).

Следствие 3. Если уравнение 231.

$$R = \text{const}$$

представляет собой семейство поверхностей такого характера, что каждая из них имеет во всех своих положениях одинаковое перпендикулярное прямейшее расстояние dR от смежной поверхности, то функция R должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1.$$

Это уравнение вытекает из (214) и (230). Оно получается также непосредственно, если подставить в уравнение (88) значения направляющих косинусов прямейшего пути согласно (230b).

Теорема 1. (Положение, обратное следствию (231)). Если функция R удовлетворяет дифференциальному уравнению 232.

$$\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\rho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1,$$

то уравнение

$$R = \text{const}$$

представляет семейство поверхностей такого свойства, что каждая из них имеет во всех своих положениях одинаковое перпендикулярное прямейшее расстояние от смежной поверхности, а именно, расстояние, измеряемое изменением R.

Действительно, если бы R была совершенно произвольной функцией, то ортогональные траектории семейства были бы представлены уравнениями (212b) и перпендикулярное расстояние двух соседних поверхностей в каждом положении было бы fdR. Однако из специальной предпосылки, которой мы подчинили функцию R, следует (214), что $f=1$, и таким образом утверждение доказано.

233. Теорема 2. Если функция R от p_ρ является любым решением дифференциальных уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\frac{\partial R}{\partial p_\sigma}=1, \tag{a}$$

то уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}=\frac{\partial R}{\partial p_\rho} \tag{b}$$

являются уравнениями прямейших путей.

Эта теорема непосредственно следует из (230) и (232).

234. Примечание. Хотя каждый путь, который представляется уравнениями (233b), является прямейшим, однако обратное утверждение, т. е. что каждый прямейший путь представим в такой форме, вообще говоря, не имеет места. Многообразие прямейших путей, которые содержатся в данной форме, зависит от многообразия решений дифференциального уравнения R, т. е. от числа произвольных постоянных.

Если же, в частности, R является полным решением с r произвольными постоянными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ (α_0 — аддитивная постоянная), то возможно все прямейшие пути представить в форме (233b). Ибо правые части этих r уравнений (из которых только $r-1$ независимы друг от друга) содержат $r-1$ постоянных, которых достаточно, чтобы сообщить представленному пути в любом положении произвольное направление, определяемое $r-1$ направляющими косинусами. Однако если мы можем произвольно выбирать положение и направление пути в этом положении, то тем самым мы можем представить все прямейшие пути.

Теорема 3 (Якоби). Пусть R является полным решением 235.
дифференциального уравнения

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\frac{\partial R}{\partial p_\sigma}=1, \tag{a}$$

и пусть его произвольные постоянные, кроме аддитивной, будут $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, тогда $r-1$ уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_\tau}=\beta_\tau \tag{b}$$

представляют конечное уравнение прямейшего пути, причем β_τ есть $r-1$ новых произвольных постоянных.

Для доказательства этого заметим, что пути, представляемые уравнениями (b), являются ортогональными траекториями семейства

$$R=\text{const}. \tag{c}$$

Тогда утверждаемое нами следует из (232) и (229).

Для того чтобы найти направление этого пути, мы продифференцируем уравнения (b) вдоль того же направления, т. е. мы образуем эти уравнения для двух удаленных на ds положений пути, в которых p_ρ различаются на dp_ρ; после этого вычитаем их и делим на ds. Тогда получим $r-1$ уравнений вида

$$\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial\alpha_\tau}\frac{dp_\sigma}{ds}=0,$$

или, если согласно (79) и (78), введем направляющие косинусы рассматриваемого элемента пути, то получим

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial\alpha_\tau}=0, \tag{d}$$

которые образуют систему $r-1$ линейных неоднородных уравнений для $r-1$ отношений направляющих косинусов.

Заметим, кроме того, что уравнения (a) имеют место для всех значений постоянных α_τ; следовательно, мы можем дифференцировать по этим величинам и, таким образом, получим $r-1$ уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r}\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\sum_{\sigma=1}^{r}b_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau}=0, \tag{e}$$

которым должны удовлетворять частные производные функции R вследствие нашей особой предпосылки об этой функции. Если уравнения (b) представляют для рассматриваемых значений α_τ и β_τ определенный путь, то из (d) должны следовать однозначно определенные значения для отношений направляющих косинусов к одному из них. Точно так же однозначно определенные значения должны получиться из уравнений (e) для отношения величин $\frac{\partial R}{\partial p_\rho}$ к одной из них. Если f подлежащий определению множитель, то должно быть

$$\sqrt{a_{\rho\rho}}\cos\widehat{sp_\rho}=f\frac{\partial R}{\partial p_\rho}.$$

Поэтому, согласно (212), рассматриваемый путь является ортогональной траекторией семейства (c), что мы и хотели доказать. Множитель f оказывается равным единице.

Предположение о том, что $r-1$ уравнений (b) для определенных значений α_τ и β_τ дают определенный путь, лишь тогда не имеет места, когда эти уравнения не независимы друг от друга. Но в этом случае и произвольные постоянные будут зависимыми и, следовательно, решение не будет полным, что мы, однако, предполагаем.

236. Задача. Получить из любого полного решения R дифференциального уравнения (235a) прямейшее расстояние S системы.

Под S опять понимаем прямейшее расстояние положений 0 и 1 с координатами $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$. Подставим в $r-1$ уравнений (235b) вместо p_ρ один раз $p_{\rho 0}$ и другой раз $p_{\rho 1}$. Из возникающих $2r-2$ уравнений исключаем β_τ и представляем α_τ как функции $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$. Эти функции симметричны относительно $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$. Они дают именно те значения α_τ, которые они должны иметь, чтобы отмеченные ими пути проходили через заданные положения 0 и 1.

Согласно (224a) и (233b), мы имеем для какого-нибудь положения 1

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}=\left(\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\right)_1$$

и, согласно (226a) и (233b), для положения 0

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}=-\left(\frac{\partial R}{\partial p_\rho}\right)_0.$$

Если мы подставим в правые части этих равенств значения α_τ, выраженные через $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$, а сами p_ρ примем в первом положении равными $p_{\rho 1}$, а во втором положении равными $p_{\rho 0}$, то получим первые производные S по всем независимым переменным как функции этих переменных. Следовательно, S можно найти простой интеграцией.

Раздел 7

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ [25]

1. ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНЕСЕННЫЕ К СИСТЕМЕ

Определение. Векторной величиной, отнесенной к системе, 237. называется каждая величина, отнесенная к системе и имеющая такие же математические свойства, как и мыслимое перемещение системы.

Замечание 1. Перемещение системы само является вектор- 238. ной величиной, отнесенной к системе. Произведение перемещения системы на какую-нибудь ненаправленную величину является также векторной величиной, отнесенной к системе.

Замечание 2. Всякую векторную величину, отнесенную 239. к системе, можно представить себе геометрически при помощи мыслимого перемещения системы. Направление этого перемещения называется направлением соответствующей векторной величины. Масштаб указанного представления следует выбирать так, чтобы представляемое перемещение было бесконечно малым. Каждый вектор, отнесенный к системе и изменяющийся с изменением положения системы, можно представлять как бесконечно малое перемещение системы из того положения, которому принадлежит значение этого вектора в данный момент.

240. Замечание 3. Векторная величина, отнесенная к отдельной материальной точке, есть вектор в обычном смысле слова. Всякий вектор, отнесенный к материальной точке, можно представить через ее перемещение, в частности, через бесконечно малое перемещение из ее мгновенного положения.

241. Замечание 4. Под компонентами и редуцированными компонентами вектора понимают такие векторы одинакового рода, которые представляются компонентами и редуцированными компонентами тех бесконечно малых перемещений, которые представляют данный вектор (48, 71).

В дальнейшем редуцированную компоненту вектора в направлении координаты p_ρ мы будем называть короче — компонентой вектора по p_ρ или еще короче — вектором по координате p_ρ.

Там, где не может возникнуть недоразумение, мы будем называть компонентой и редуцированной компонентой величину этой компоненты.

242. Задача 1a. По данным компонентам h_ν вектора вдоль $3n$ прямоугольных координат найти компоненты k_ρ вектора вдоль обобщенных координат p_ρ.

Пусть $d\bar{x}_\nu$ есть компонента вдоль x_ν какого-нибудь перемещения, которое представляет данную векторную величину; пусть $d\bar{p}_\rho$ есть компонента того же перемещения вдоль обобщенной координаты p_ρ, тогда связь между ними устанавливается согласно (80). Так как, однако, $d\bar{x}_\nu$ и $d\bar{p}_\rho$ соответственно пропорциональны h_ν и k_ρ, то получаем окончательно

$$k_\rho = \sum_{\nu=1}^{3n} \alpha_{\nu\rho} h_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\rho} h_\nu.$$

243. Задача 1b. По данным компонентам k_ρ вектора вдоль p_ρ найти его компоненты h_ν вдоль прямоугольных координат.

Уравнения (242) дают только r уравнений для $3n$ величин h_ν, из которых они, следовательно, не могут быть определены. Таким образом, вообще говоря, задача является неопределенной. Это объясняется тем, что не все мыслимые положения и перемещения системы можно выразить при помощи p_ρ, но только возможные положения и перемещения.

Задача становится разрешимой только тогда, когда данный вектор является параллельным одному из перемещений, которое можно выразить через p_ρ и их изменения. В этом случае, согласно (81), получаем

$$h_\nu = \sum_{\rho=1}^{r} \beta_{\nu\rho} k_\rho.$$

Задача 2a. По данным компонентам h_ν вектора определить его величину h. 244.

Пользуясь формулой (83), находим

$$h^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} h_\nu^2.$$

Задача 2b. По данным компонентам k_ρ вектора определить его величину k. 245.

Эта задача, как и (243), является неопределенной.

Решение делается возможным только в том случае, когда, кроме k_ρ, еще известно, что искомый вектор параллелен одному из перемещений, определяемых при помощи p_ρ. В этом случае, согласно (82), будем иметь

$$k^2 = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma.$$

Задача 3a. По данным компонентам h_ν вектора найти его компоненту вдоль любого перемещения ds. 246.

Пусть ds' есть длина, а $d\bar{x}'_\nu$ — редуцированная компонента перемещения, через которое мы представляем вектор; тогда компонента этого перемещения в направлении ds будет, согласно (48) и (84),

$$ds' \cos \widehat{ss'} = \frac{1}{\partial s} \sum_{\nu=1}^{3n} dx_\nu dx'_\nu.$$

Если умножим теперь обе части этого уравнения на отношение величины вектора к длине перемещения, представляющего вектор, то слева получим искомую компоненту, а справа, вместо dx'_ν, появится h_ν и, следовательно, искомая величина окажется равной

$$\sum_{\nu=1}^{3n} h_\nu \frac{dx_\nu}{ds}$$

или, в соответствии с (72),

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \sqrt{\frac{m}{m_\nu}}\, h_\nu \cos \widehat{sx_\nu}.$$

247. **З а д а ч а 3b.** По данным компонентам k_ρ вектора найти его компоненту вдоль любого перемещения ds, выражаемого через обобщенные координаты p_ρ.

Применяя метод решения предыдущей задачи, получим, согласно (48) и (85), искомую величину равной

$$\sum_{\rho=1}^{r} k_\rho \frac{dp_\rho}{ds}$$

или, согласно (78) и (79),

$$\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} k_\rho \sqrt{a_{\rho\rho}} \cos \widehat{sp_\rho}\,.$$

248. **П р и м е ч а н и е.** Как уже было замечено, через величины k_ρ, вообще говоря, невозможно определить любые компоненты данного вектора; через них определяются компоненты только вдоль тех направлений, которые могут быть выражены через p_ρ, т. е. в каждом возможном направлении.

249. **Т е о р е м а 1.** Для того чтобы вектор, компоненты которого вдоль p_ρ есть k_ρ, являлся перпендикулярным к некоторому перемещению, для которого p_ρ получают приращения dp_ρ, необходимо и достаточно удовлетворить уравнениям

$$\sum_{\rho=1}^{r} k_\rho dp_\rho = 0.$$

Это следует из (85), если принять k_ρ пропорциональными $d\bar{p}'_\rho$.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы вектор, компоненты которого 250.
вдоль p_ρ есть k_ρ, был перпендикулярным к любому возможному перемещению системы, необходимо и достаточно подчинить r величин k_ρ следующим условиям:

$$k_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa,$$

в которых $p_{\varkappa\rho}$ берутся из уравнений условий системы (130), а $\gamma_\varkappa$ есть неопределенные множители.

Это следует из (148) и (150), если k_ρ представим через $d\bar{p}_\rho$.

З а м е ч а н и е 1. Векторы, отнесенные к одной и той же си- 251.
стеме, подчиняются тем же законом сложения и разложения, как и мыслимые перемещения системы.

Сложение векторов, отнесенных к одной и той же системе, следует, таким образом, правилам алгебраического сложения.

З а м е ч а н и е 2. Векторы, отнесенные к различным системам, 252.
рассматриваются как величины разнородные; они не могут ни составляться, ни складываться.

З а м е ч а н и е 3. Векторная величина, отнесенная к данной 253.
системе, может быть рассматриваема как векторная величина, отнесенная к другой системе, частью которой является данная система.

З а д а ч а 1. Одна и та же векторная величина один раз рас- 254.
сматривается отнесенной к частичной системе, а другой раз к полной системе. Из компонент h_ν по прямоугольным координатам x_ν в первом случае нужно вычислить компоненты h'_ν по соответствующим координатам x'_ν во втором случае.

Пусть масса частичной системы есть m, а масса полной системы — m'. Несмотря на то, что координаты частичной системы x_ν совпадают с координатами полной системы x'_ν, мы все же будем различать их. Если сообщим теперь частичной системе любое перемещение, которое совпадает с перемещением полной системы, то для общих координат $dx'_\nu = dx_\nu$, а для остальных координат полной системы $dx'_\nu = 0$. Так как, согласно (73), $m'd\bar{x}'_\nu = m_\nu dx'_\nu$ и $md\bar{x}_\nu = m_\nu dx_\nu$, то $m'd\bar{x}'_\nu = md\bar{x}_\nu$. Для вектора, представляемого при помощи рассматриваемых перемещений, компоненты вдоль x_ν и x'_ν соответственно пропорциональны $d\bar{x}_\nu$ и $d\bar{x}'_\nu$. Следовательно, как решение задачи получаем

$$m'h'_\nu = mh_\nu$$

для индекса ν, общего обеим системам, а для остальных значений ν

$$h'_\nu = 0.$$

255. Задача 2. Одна и та же векторная величина один раз рассматривается отнесенной к частичной системе, а другой раз к полной системе. Исходя из компонент k_ρ вдоль обобщенных координат p_ρ, нужно вычислить компоненты k'_ρ вдоль соответствующих координат p'_ρ.

Пусть масса частичной системы есть m, а масса полной системы — m'. Несмотря на то, что координаты p_ρ частичной системы являются одновременно координатами полной системы, мы для ясности будем последние обозначать через p'_ρ.

Аналогично (254), как решение задачи получаем

$$m'k'_\rho = mk_\rho$$

для общих координат, а для остальных

$$k'_\rho = 0.$$

Без указанных предположений задача становится неопределенной.

II. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ

256. Объяснение 1. Движением системы из данного начального положения в конечное положение называется переход системы из начального положения в конечное, учитывая время и характер перехода (27).

При каждом определенном движении система пробегает, таким образом, определенный путь, и именно в определенные времена она пробегает определенные длины пути.

Объяснение 2. Любое движение системы вдоль мыслимого 257.
пути называется мыслимым движением системы (11).

Объяснение 3. Любое движение системы вдоль возможного 258.
пути называется движением системы (112).

Объяснение 4. Кинематика, или наука о чистом движе- 259.
нии, имеет дело с мыслимыми и возможными движениями системы.

Кинематика почти совпадает с геометрией, если рассматриваются только закономерные системы (119) и (120). Если же рассматриваются и незакономерные системы, следовательно, в уравнения условий системы входит явно время, то кинематика становится более общей, чем геометрия. Однако мы не считаем необходимым входить в собственно кинематические рассмотрения, а ограничимся здесь некоторым числом основных понятий.

Аналитическое представление. Движение системы 260.
аналитически можно представить, выражая путь, пройденный системой, при помощи времени t как независимого переменного, т. е. координаты положения системы представляем как функции времени.

Производные по времени будем обозначать, согласно Ньютону, точкой, поставленной над соответствующей величиной.

Скорость

Определение. Мгновенный способ движения системы назы- 261.
вается скоростью системы.

Скорость определяется через изменение положения системы за бесконечно малое время и через само это время. Она измеряется через отношение этих величин, независимо от их абсолютного значения. Положение и скорость системы, взятые вместе, мы называем состоянием системы.

Следствие. Скорость системы можно рассматривать как 262.
векторную величину, отнесенную к системе. Направление ско-

рости совпадает с направлением рассматриваемого в данный момент элемента пути. По величине скорость равна первой производной от описываемого пути по времени.

Величина скорости называется также скоростью системы вдоль ее пути, или, там, где исключено недоразумение, просто скоростью.

263. Определение 2. Движение системы, при котором скорость не меняет своей величины, называется равномерным.

264. Примечание. Прямолинейное движение есть движение системы вдоль прямого пути. В этом случае скорость не меняет своего направления.

265. Задача 1. Выразить величину скорости, ее компоненты и приведенные компоненты вдоль прямоугольных координат через скорости изменения этих координат.

Величина скорости определяется как положительный квадратный корень уравнения

$$mv^2 = m\frac{ds^2}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \dot{x}_\nu^2.$$

Поэтому (241) компоненты скорости вдоль x_ν равны

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\dot{x}_\nu,$$

а приведенные компоненты в том же направлении равны

$$\frac{m_\nu}{m}\,\dot{x}_\nu.$$

266. Примечание. Величина скорости системы есть среднее квадратичное из величин скорости всех ее частиц.

267. Задача 2. Выразить величину скорости, ее компоненты и ее приведенные компоненты в направлении обобщенных координат p_ρ через скорости изменения $\dot{p}_\rho$ этих координат.

Преобразованием (265) при помощи (57) получим величину скорости как положительный квадратный корень уравнения

$$v^2 = \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\rho\dot{p}_\sigma.$$

Соответственно этому (241) компоненты в направлении p_ρ равны

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\rho\rho}}}\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\sigma,$$

а приведенные компоненты в том же направлении, или компоненты вдоль p_ρ, равны

$$\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\sigma.$$

Импульс

Определение. Произведение из массы системы на ее скорость называется количеством движения, или импульсом, системы. 268.

Импульс системы является, следовательно, векторной величиной, отнесенной к системе. Компоненты импульса вдоль какой-нибудь координаты обычно называют просто импульсом системы вдоль этой координаты (241).

Обозначение. Импульс системы вдоль обобщенной координаты p_ρ будем обозначать через q_ρ. 269.

Задача 1. Выразить импульс q_ρ системы вдоль p_ρ через скорости изменения координат. 270.

Из (268) и (267) находим

$$q_\rho = m\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\dot{p}_\sigma.$$

Задача 2. Выразить скорости изменения обобщенных координат $\dot{p}_\rho$ через импульсы системы вдоль этих координат. 271.

Разрешая предыдущие уравнения, найдем:

$$\dot{p}_\rho = \frac{1}{m}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma}q_\sigma.$$

Примечание. Скорость и количество движения системы есть такие векторы, отнесенные к системе, которые всегда параллельны возможным перемещениям системы (243) и (245). 272.

Ускорение

273. Определение. Мгновенный характер изменения скорости системы называется ускорением системы.

Ускорение системы определяется через изменение скорости за бесконечно малое время и само это время. Оно измеряется отношением обеих величин, независимо от абсолютного значения этих величин.

274. Следствие. Ускорение системы можно рассматривать как векторную величину, отнесенную к системе. Если мы представим из данного положения два перемещения системы, из которых одно представляет скорость в данный момент, а другое в смежный момент времени, то разность этих перемещений и есть изменение скорости. Следовательно, направление этой разности есть направление ускорения, а величина ускорения выразится отношением длины этого нового перемещения к дифференциалу времени.

275. Задача 1. Выразить величину ускорения f и его компоненты вдоль прямоугольных координат через производные по времени от этих координат.

Компоненты скорости вдоль x_ν в момент t и в момент $t+dt$ есть (265)

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad \text{и} \quad \frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu + \frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu dt,$$

следовательно, компоненты разности скоростей есть $\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu dt$; отношение этой разности ко времени дает компоненты ускорения вдоль x_ν:

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu.$$

Величина ускорения получается как положительный квадратный корень уравнения (см. (244))

$$mf^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \ddot{x}_\nu^2.$$

Примечание. Величина ускорения материальной системы есть среднее квадратическое из величин ускорений ее частиц. 276.

Задача 2. Представить компоненты f_ρ ускорения системы вдоль обобщенных координат через производные по времени от этих координат. 277.

Согласно (242) получаем

$$f_\rho = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\rho} \ddot{x}_\nu.$$

Подставим сюда, как и в (108),

$$\ddot{x}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\nu\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau.$$

После преобразований, аналогичных (108), находим

$$f_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\sigma\rho} \ddot{p}_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r} \left(\frac{\partial a_{\sigma\rho}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right) \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau.$$

Примечание 1. Компоненты ускорения являются, следовательно, вообще линейными функциями вторых производных координат, квадратичными функциями первых производных координат и произвольными функциями самих координат. 278.

Примечание 2. Ускорение системы не обязательно должно быть параллельным возможному перемещению, которое может быть выражено через координаты p_ρ. Поэтому компоненты f_ρ, вообще говоря, недостаточны для определения величины ускорения и его компонент вдоль прямоугольных координат (243) и (245). Напротив, величины f_ρ являются достаточными для определения компонент ускорения вдоль любого возможного перемещения системы (248). 279.

Задача 3. Найти компоненты ускорения вдоль пути. 280.

Согласно (72), направляющие косинусы пути равны $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{dx_\nu}{ds}$,

следовательно, принимая во внимание (265), они равны $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{\dot{x}_\nu}{v}$.

Отсюда следует, согласно (246) и имея в виду (275), для искомых тангенциальных компонент ускорения

$$f_t = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{m_\nu}{m} \frac{\dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu}{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s},$$

где s обозначает длину пути.

281. Замечание. Если разложим ускорение системы на две компоненты: одну вдоль направления пути, а другую в направлении, перпендикулярном к пути, то последняя равна произведению кривизны пути на квадрат скорости системы.

Принимая в (107) в качестве независимого переменного время t, получим

$$mv^4c^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \ddot{x}_\nu^2 - m\ddot{s}^2.$$

Следовательно, пользуясь (275) и (280), найдем

$$v^4c^2 = f^2 - f_t^2.$$

Если назовем вторую компоненту радиальной или центростремительной f_r, то вследствие взаимной перпендикулярности f_r и f_t

$$f^2 = f_t^2 + f_r^2,$$

следовательно, находим окончательно

$$f_r = cv^2.$$

Энергия

Определение. Половина произведения массы системы на
282. квадрат ее скорости называется энергией системы.

Задача 1. Выразить энергию E системы через скорости изме-
283. нения прямоугольных координат.

Согласно (265), получаем

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \dot{x}_\nu^2.$$

Следствие 1. Энергия системы равна сумме энергии ее 284.
материальных частиц.

Следствие 2. Если рассматривать полную систему состоящей 285.
из отдельных частичных систем, то энергия полной системы равна суммe энергий частичных систем.

Задача 2. Выразить энергию системы через скорости изме- 286.
нения обобщенных координат и через импульсы вдоль этих координат.

Принимая во внимание (267), (270) и (271), последовательно получаем:

$$E = \frac{1}{2} m \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} \dot{p}_\rho \dot{p}_\sigma, \tag{a}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r} q_\rho \dot{p}_\rho, \tag{b}$$

$$E = \frac{1}{2m} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma} q_\rho q_\sigma. \tag{c}$$

Примечание (от (261) до (286)). Скорость, импульс, уско- 287.
рение и энергия системы определены независимо от аналитического представления, в частности, независимо от выбора координат системы.

Употребление частных производных

Обозначения (ср. (90)). Через $\partial_p E$ будем обозначать частную 288.
производную энергии E только в том случае, когда координаты p_ρ и скорости их изменения $\dot{p}_\rho$ рассматриваются как независимые друг от друга переменные, определяющие энергию (286).

Через $\partial_q E$ будем обозначать частную производную энергии E только в том случае, когда координаты p_ρ и импульсы q_ρ вдоль этих координат рассматриваются как независимые друг от друга переменные, определяющие энергию (286c).

Применение одного из этих двух обозначений исключает другое. Через ∂E будем обозначать как обычно, какой-нибудь вид частной производной E, т. е. первый вид, или второй, или какой-нибудь третий; причем это обозначение будем применять там, где исключена возможность недоразумения.

289. Замечание 1. Импульсы q_ρ системы вдоль координат p_ρ можно выразить при помощи частных производных энергии системы по скоростям изменения координат.

Действительно, согласно (285а) и (270), получаем (ср. (91))

$$q_\rho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}.$$

290. Замечание 2. Скорости изменения $\dot{p}_\rho$ координат p_ρ могут быть представлены как частные производные энергии системы по соответствующим импульсам.

Действительно, согласно (286с) и (271), получаем (ср. (94))

$$\dot{p}_\rho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\rho}.$$

291. Замечание 3. Компоненты f_ρ ускорения системы можно представить как частные производные энергии системы.

Действительно, согласно (286а), находим

$$\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho} = m \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} \dot{p}_\sigma,$$

следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right) = m \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} \ddot{p}_\sigma + m \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau.$$

Затем, согласно тому же уравнению (286а),

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} = \frac{1}{2} m \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau.$$

Вычитая из первого уравнения второе и сравнивая с (277), находим

$$m f_\rho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho}, \tag{a}$$

или, приняв во внимание (289),

$$m f_\rho = \dot{q}_\rho - \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho}. \tag{b}$$

Замечание 4. Если мы изменим координату p_τ дважды на одну и ту же бесконечно малую величину, сохраняя при этом первоначальные значения: в одном случае — скоростей изменения координат, а в другом — импульсов вдоль координат, то энергия системы получит равные и противоположные изменения. 292.

Действительно, умножив уравнения (95а) на mds и разделив на dt^2, получим

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\tau}.$$

Теорема. Если положение системы испытывает дважды одно и то же бесконечно малое изменение при условии сохранения первоначальных значений: в одном случае — скоростей изменения координат, а в другом — импульсов вдоль координат, то энергия системы в обоих случаях получает равное и противоположное изменение. 293.

Действительно, в первом случае изменение энергии будет

$$\delta_p E = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau,$$

а во втором случае

$$\delta_q E = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau.$$

Отсюда находим, принимая во внимание замечание 4:

$$\delta_p E = -\delta_q E.$$

Следствие. Компоненты ускорения системы вдоль координат системы p_ρ возможно представить в форме (см. (291b) и (292)) 294.

$$m f_\rho = \dot{q}_\rho + \frac{\partial_q E}{\partial p_\rho}.$$

295. **Заключительное замечание к первой книге**

Как уже было сказано в предварительном замечании (1), в рассуждениях этой книги совершенно исключен опыт. Следовательно, если в дальнейшем встретятся полученные результаты, то мы будем знать, что они получены не из опыта, а из законов нашего созерцания и мышления, вместе с рядом произвольных установлений.

В целом несомненно, что образование наших представлений и их развитие происходило лишь с учетом возможного опыта; но не менее истинным является то, что один только опыт должен дать решение вопроса о ценности или неценности наших рассуждений. Однако правильность или неправильность наших рассуждений не может быть подтверждена или опровергнута никаким возможным будущим опытом.

КНИГА ВТОРАЯ

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ [26]

Предварительное замечание. В настоящей, вто- 296.
рой книге под временем, пространством и массой мы будем понимать знаки для предметов внешнего опыта, свойства которых, впрочем, не противоречат свойствам ранее введенных нами одинаково названных величин, рассматривавшихся в качестве форм нашего внутреннего созерцания или введенных по определению.

Поэтому наши суждения о соотношениях между временем, пространством и массой должны удовлетворять не только требованиям нашего ума, но вместе с тем должны соответствовать и возможному, в частности, будущему опыту. Эти утверждения основываются поэтому не только на законах нашего созерцания и мышления, но, кроме того, и на предшествующем опыте. Все, что дает нам этот опыт, поскольку он не содержится в основных понятиях, мы выражаем одним общим высказыванием, которое и представляем как основной закон. После этого вторичная апелляция к опыту не должна более иметь места. Вопрос о правильности наших положений совпадает, таким образом, с вопросом о правильности или всеобщей значимости этого единственного закона.

Раздел 1

ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО, МАССА

297. Время, пространство и масса ни в каком смысле не доступны для нашего опыта; для него доступны лишь определенные промежутки времени, определенные пространственные величины и определенные массы.

Каждая определенная масса, пространственная величина или промежуток времени могут являться результатом определенного опыта. Мы делаем понятия массы, времени и пространства символами предметов внешнего опыта, устанавливая, при помощи каких чувственных восприятий мы фиксируем определенные промежутки времени, пространственные величины и массы. Соотношения между временами, пространствами и массами будут являться тогда в дальнейшем соотношениями лишь между этими чувственными восприятиями.

298. Установление 1. Продолжительность времени мы определяем при помощи хронометра числом биений маятника. Единицу продолжительности мы устанавливаем путем произвольного соглашения. В качестве признака определенного момента нам служит его временное расстояние от момента, установленного произвольно.

Судя по опыту, это установление не содержит ничего, что мешало бы нам пользоваться временем как всегда независимым и непрерывно изменяющимся переменным. Это установление является также определенным и однозначным, исключая ту неопределенность, которую нам никогда не удастся устранить из нашего опыта.

299. Установление 2. Пространственные отношения мы определяем по правилам практической геометрии при помощи масштабов. Единицу длины мы устанавливаем произвольным соглашением. В качестве признака определенного места в пространстве служит нам его относительное положение в неподвижной системе координат, установленной по отношению к небу неподвижных звезд, в остальном же эта система координат вводится произвольно. При применении всех высказываний Эвклидовой геометрии к определенным

таким путем пространственным отношениям мы не придем, как указывает опыт, к противоречиям. Наше установление является также определенным и однозначным, исключая ту неопределенность, которую нам никогда не удастся устранить из нашего опыта.

Установление 3. Массы движущихся осязаемых тел мы определяем при помощи весов. В качестве единицы массы служит нам масса произвольно выбранного тела. 300.

Масса осязаемых тел, определяемая при помощи этого установления, обладает свойствами, которые мы приписываем массам, определенным понятиями. Именно, она может быть разделена на любое число одинаковых массовых частиц, из которых каждая является неуничтожимой и неизменной и может служить как признак для того, чтобы одна точка пространства в некоторое время приводилась в однозначно определенную связь с другой точкой пространства в любое другое время. Это установление является также определенным и однозначным в отношении осязаемых тел, за исключением той неопределенности, которую нам никогда не удастся устранить из нашего опыта.

Дополнение к установлению 3. Впрочем, мы допускаем предположение, что наряду с осязаемыми телами существуют также другие тела, которые мы не можем ощущать, двигать и класть на весы, и к которым, следовательно, установление 3 неприменимо. 301.

Массы таких тел могут быть определены лишь гипотетически. Что касается этих гипотетически принимаемых масс, то в нашей власти не наделять их свойствами, которые противоречили бы свойствам идеально определенных масс.

Примечание 1. Предыдущие три установления не являются новыми определениями для уже ранее определенных величин времени, пространства и массы. Наоборот, они представляют законы отображения, посредством которых мы внешний опыт, т. е. конкретные чувственные восприятия, переводим на язык символов нашей внутренней картины (ср. введение) и посредством которых мы переводим обратно необходимые следствия этой картины в область возможных чувственных ощущений и восприятий. Только через эти 302.

три установления символы времени, пространства и массы становятся частями наших представлений о внешних предметах. Только через эти три установления делаются они подчиненными дальше идущим требованиям, чем мысленно-необходимым требованиям нашего ума.

303. Примечание 2. Неопределенность, которую содержат наши установления и которую мы в них признаем, не является, таким образом, неопределенностью нашей картины, а также наших законов отображения, но она является неопределенностью самого отображаемого внешнего опыта. Мы можем поэтому сказать, что посредством фактического определения при помощи наших чувств мы не можем точнее установить время, чем оно может быть измерено при помощи лучших часов, не можем точнее определить положение, чем при помощи неподвижной системы координат, связанной с небом неподвижных звезд, не можем точнее определить массу, чем при помощи лучших весов.

304. Примечание 3. На вопрос о том, даны ли через наши установления истинные или абсолютные меры времени, пространства и массы, следует, по-видимому, ответить отрицательно, так как наши установления содержат, очевидно, случайности и произвол. В действительности, однако, этот вопрос выпадает из нашего рассмотрения и не касается его правильности, если бы даже мы захотели придать ему ясный смысл и ответили бы на него отрицательно.

Достаточно, что наши установления определяют такие меры, которые позволяют однозначно выражать результаты прежних и будущих опытов. Если бы мы установили другие меры, то форма наших положений соответственно изменилась бы, однако таким образом, что опытные данные как прежних, так и будущих опытов остались бы теми же.

МАТЕРИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

305. Объяснение. Под материальной системой отныне будем разуметь систему конкретных масс, свойства которой не противоречат свойствам идеализированных материальных систем. В естественной материальной системе известные положения и перемещения возможны, другие невозможны, причем совокупность возможных положений и перемещений удовлетворяет условиям непрерывности (121). В естественной свободной системе связи не зависят от положения системы относительно всех не принадлежащих ей масс и не зависят от времени (122).

Замечание. Как показывает опыт, определенным таким образом понятиям соответствует действительное содержание. Во-первых, опыт показывает нам, что между реальными массами существуют связи, и именно непрерывные связи. Следовательно, существуют материальные системы в смысле (305). 306.

Мы можем даже утверждать, что другие связи, кроме непрерывных, в природе не имеют места, и что, следовательно, каждая естественная система материальных точек есть материальная система.

Во-вторых, опыт показывает нам, что связи материальной системы могут быть независимы от ее положения относительно других систем и от ее абсолютного положения вообще. Мы можем даже утверждать, что эта независимость наблюдается всегда, когда материальная система пространственно достаточно удалена от всех других систем. Существуют, следовательно, системы, которые имеют только внутренние связи, и мы обладаем также общим методом для изучения и построения таких систем.

Наконец, опыт учит нас, что абсолютное время не влияет на процессы систем природы, которые подчиняются лишь внутренним связям. Каждая такая система подчинена только лишь закономерным связям (119) и является, таким образом, свободной системой. Существуют, следовательно, системы, свободные в смысле (305), и мы можем сконструировать их независимо от тех положений, которые излагаются ниже о свободных системах.

Примечание. Закономерные связи свободных систем образуют свойства последних, существующие независимо от времени. 307.

Задача экспериментальной физики — выбрать из бесконечного мира явлений такие конечные группы масс, которые могут существовать самостоятельно как свободные системы, и вывести из этих явлений, протекающих во времени и в связи с другими системами, их независимые от времени свойства.

Раздел 2

ОСНОВНОЙ ЗАКОН

308. В качестве основной задачи механики мы рассматриваем изучение явлений и зависимых от времени свойств материальных систем, выводимых из независимых от времени свойств последних. Для решения этой задачи мы имеем следующий, и только следующий, принятый на основе опыта, основной закон.

309. Основной закон. Всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути.

Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam.

310. Замечание 1. Основной закон содержит утверждение, которое относится только к свободным системам. Так как, однако, каждая часть свободной системы может быть несвободной, то из основного закона можно вывести следствия, которые будут относиться и к несвободным системам.

311. Замечание 2. Совокупность следствий, которые можно извлечь из основного закона о свободной системе и о ее несвободных частях, образует содержание механики. Других причин движения, кроме тех, которые вытекают из основного закона, наша механика не знает. Знание основного закона, соответственно нашему пониманию последнего, есть не только необходимое, но также и достаточное условие для решения задач механики и это есть существенная часть нашего утверждения.

312. Замечание 3 (определение). Каждое движение какой-нибудь материальной системы или ее частей, которое происходит в согласии с основным законом, мы называем естественным движением системы в противоположность всем мыслимым и возможным движениям последней (257), (258). Механика, следовательно, имеет дело с естественными движениями свободных материальных систем и их частей.

Замечание 4. Мы считаем явления телесного мира механически, а следовательно, и физически объяснимыми, когда их можно рассматривать как необходимые следствия основного закона и независимых от времени свойств материальных систем. 313.

Замечание 5. Полное объяснение явлений телесного мира требует, таким образом: 1) их механического или физического объяснения; 2) объяснения основного закона; 3) объяснения не зависящих от времени свойств телесного мира. 314.

Однако второе и третье из этих объяснений мы не причисляем к области физики.

ОБОСНОВАННОСТЬ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

Основной закон мы рассматриваем как вероятный результат всеобщего опыта, говоря точнее, основной закон является гипотезой или утверждением, заключающим в себе большое количество опытов и не отвергающимся никаким опытом, и который, однако, высказывает больше, чем может быть выявлено в настоящее время путем надежного опыта. Что касается отношения естественных материальных систем к основному закону, то их можно разделить на три класса. 315.

1. Первый класс охватывает такие системы тел или части систем, которые удовлетворяют условиям свободной системы по непосредственному результату опыта и в отношении которых основной закон находит применение без дальнейших оговорок. Сюда относятся, например, твердые тела, движущиеся в пустом пространстве, или идеальные жидкости, движущиеся в замкнутых сосудах. Из опытов над такими системами тел и выводится основной закон. В отношении этого первого класса систем основной закон представляет голый факт опыта. 316.

2. Второй класс охватывает такие системы тел, которые тогда и только тогда подчиняются предпосылкам основного закона или которые тогда и только тогда следуют основному закону, когда к непосредственному чувственному опыту прибавляются некоторые гипотезы о их природе. 317.

а) Сюда принадлежат, во-первых, такие системы, которые, по-видимому, не удовлетворяют условию непрерывности в отдельных положениях, т. е. те системы, в которых происходят удары в самом широком смысле слова.

Здесь достаточна в высшей степени вероятная гипотеза, что все прерывности являются кажущимися и исчезают, как только мы принимаем во внимание достаточно малые пространственные и временные элементы.

б) Сюда, во-вторых, принадлежат такие системы, в которых действуют силы дальнодействия, силы теплоты и другие не всегда полностью понятые причины движения.

Если мы приводим в состояние покоя осязаемые тела таких систем, то они не остаются в этом состоянии, но после освобождения снова начинают двигаться; следовательно, они не подчиняются, видимо, основному закону. Однако здесь можно ввести гипотезу, что осязаемые тела не являются единственными массами, их видимые движения не являются единственными движениями таких систем, но могут существовать еще другие скрытые движения в системах, которые снова сообщаются осязаемым телам, как только мы их вновь освободим. Об этих скрытых движениях можно всегда сделать такие предположения, чтобы полные системы подчинялись основному закону.

В отношении этого второго класса естественных систем основной закон носит характер довольно вероятной и, насколько можно судить, всегда допустимой гипотезы.

318. 3. Третий класс содержит такие системы тел, движения которых нельзя представить как необходимые следствия основного закона и для которых не могут быть даны определенные гипотезы, подчиняющие их основному закону. Сюда относятся, например, такие системы, которые содержат живые существа. Однако наше незнание всех принадлежащих сюда систем настолько велико, что мы не имеем основания утверждать, что невозможно введение соответствующих гипотез и что явления в этих системах противоречат основному закону.

В отношении этого третьего класса системы тел основной закон носит, таким образом, характер лишь допустимой гипотезы.

Примечание. Если допустимо принять, что в природе нет никаких свободных систем, которые не подчинялись бы основному закону, то допустимо рассматривать вообще каждую систему именно как такую свободную систему или как часть такой системы; при этих предпосылках в природе не будет в действительности существовать никакой системы, движения которой не определились бы при помощи ее связей и основного закона. 319.

ОГРАНИЧЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

В системе тел, которая подчиняется основному закону, не существует никаких новых движений, а также никаких причин новых движений, но только продолжение уже существующих движений, определенных простейшим способом. Едва ли можно отказаться от того, чтобы не признать такую систему тел неживой, или мертвой. 320.

Если бы мы захотели распространить это положение на всю природу как всеобщую свободную материальную систему и сказать, что вся природа следует с одинаковой скоростью по прямейшему пути, то мы оказались бы в противоречии со здравым смыслом и естественным чувством.

Поэтому более разумно ограничить вероятную значимость основного закона неживой системой. Это совпадает с утверждением, что основной закон, примененный к системам третьего класса (318), является маловероятной гипотезой.

В дальнейшем это соображение не принято во внимание (и нет необходимости принимать его во внимание), потому что, как мы видели, основной закон и в отношении этих систем представляет гипотезу, если и не вероятную, то во всяком случае допустимую. 321.

Если бы можно было доказать, что живые системы противоречат основному закону, то они выделились бы в результате этого из механики. Одновременно наша механика потребовала бы тогда некоторого дополнения в отношении тех несвободных систем, которые сами хотя и являются неживыми, однако представляют собой части таких свободных систем, которые содержат живые существа. Это дополнение могло бы быть дано согласно опытам в следующем виде: живые системы не могут оказывать на неживые системы иного влияния, чем то, которое могло бы быть оказано неживой системой. В соответствии с этим возможно заменить каждую живую систему неживой, которая может представить ее в рассматриваемой проблеме и задание которой необходимо для того, чтобы рассматриваемую проблему сделать чисто механической.

322. Примечание. В обычном представлении механики подобная оговорка считается излишней, и принимается за истину тот факт, что основной закон одинаково охватывает как живую, так и неживую природу. Это допустимо в обычном изложении, так как здесь мы оставляем для сил, входящих в основные законы, самое широкое поле действия и оставляем за собой право провести позже исследование за пределами механики — являются ли силы живой и мертвой природы различными, и какие свойства отличают одни от других. В нашем же изложении следует соблюдать большую осторожность, так как большое число опытов, которые прежде всего относятся к неживой природе, уже включено в основной закон, и возможность более позднего разграничения становится значительно более узкой.

АНАЛИЗ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

323. Выбранная формулировка основного закона намеренно примыкает непосредственно к формулировке первого закона движения Ньютона. Эта формулировка содержит три независимых положения, а именно:

1) свободная система не следует другим возможным путям, кроме прямейшего пути;

2) различные свободные системы описывают за одинаковые промежутки времени пропорциональные друг другу длины путей;

3) измеряемое часами время (298) возрастает пропорционально длине пути какой-нибудь движущейся свободной системы.

Только первые два положения содержат опытные факты большой общности. Третье же оправдывает лишь наше произвольное установление об измерении времени и содержит специальный опыт, а именно, что хронометр в определенном отношении ведет себя как свободная система, хотя, строго говоря, он не является таковым.

МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

Если ставится определенный вопрос относительно движения 324.
материальной системы, то из следующих трех случаев неизбежно должен иметь место один.

1. Вопрос может быть поставлен таким образом, что основной закон является достаточным для определенного ответа на него. В этом случае проблема является определенной механической проблемой, решение которой получается в результате применения основного закона.

2. Вопрос может быть поставлен таким образом, что основной 325.
закон непосредственно не является достаточным для определенного ответа на него, однако постановка вопроса допускает введение одного или нескольких предположений, при помощи которых делается возможным применение основного закона.

Если возможно одно такое допущение и если мы предполагаем, что проблема является механической, то это допущение правильно; следовательно, проблема может рассматриваться как определенная механическая проблема, решение которой получается в результате применения дополнительного допущения и основного закона.

Если возможно несколько допущений и если мы предполагаем, что проблема вообще является механической, то должно иметь место одно из этих допущений; проблема может рассматриваться как неопределенная механическая проблема и применение основного закона к различным возможным допущениям дает возможное решение.

3. Вопрос может быть поставлен таким образом, что основной 326.
закон не является достаточным для ответа и что никакие допущения, при помощи которых применение основного закона сделалось бы возможным, не могут быть добавлены. В этом случае в самой постановке вопроса должно содержаться противоречие с основным зако-

ном или со свойствами систем, к которым относится вопрос; следовательно, поставленный вопрос вообще не может рассматриваться как механическая проблема.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА

327. Замечание. Если из данных уравнений условий системы вместе с основным законом вытекают уравнения, которые имеют форму уравнений условий, то для определения движения системы безразлично, рассматриваем ли мы эти первоначальные уравнения условий или рядом с ними и вместо них выведенные уравнения условий в качестве уравнений связей системы.

Действительно, если мы отбросим из ряда первоначальных уравнений условий все те, которые вытекают аналитически из оставшихся и из выведенных уравнений условий, то оставшимся первоначальным и выведенным уравнениям удовлетворяют только возможные перемещения, хотя, в общем, и не все перемещения, которые были возможны в соответствии с первоначальными уравнениями. Путь, который был прямейшим при первоначальном более широком многообразии, будет тем более таковым при теперешнем более ограниченном многообразии. И так как среди этого более ограниченного многообразия должны оказаться естественные пути, то они будут являться прямейшими среди тех, которые возможны согласно теперешним уравнениям условий, что и требовалось доказать.

328. Следствие 1. Если из опыта мы знаем, что система удовлетворяет фактически некоторым уравнениям условий, то для применения основного закона безразлично, являются ли эти связи первоначальными, т. е. необъяснимыми дальше физически (313), или они являются такими связями, которые могут быть представлены как необходимые следствия других связей и основного закона, которые, следовательно, допускают механическое объяснение.

329. Следствие 2. Если из опыта мы знаем, что определенные уравнения условий материальной системы удовлетворяются только приближенно, а не точно, то так же допустимо рассматривать эти уравнения условий как приближенное представление истинных

связей; тогда мы будем получать, в результате применения основного закона, приближенные представления о движении системы, хотя несомненно, что эти приближенные уравнения условий представляют не первоначальную непрерывную закономерную связь, а могут рассматриваться только как приближенные следствия неизвестных связей и основного закона.

Примечание. На следствии 2 основывается каждое практическое применение нашей механики. Ибо для всех связей между обычными ощущаемыми массами, которые открывает физика и использует механика, достаточно точное исследование показывает, что они имеют только приближенное значение и поэтому могут быть только производными связями. Мы вынуждены искать в мире атомов последние первоначальные связи, а они нам неизвестны. Но если бы даже они были и известны, то мы должны были бы отказаться от их использования для практических целей и должны были бы поступить так, как мы поступаем. Ибо действительное овладение каждой проблемой требует всегда ограничения рассмотрения чрезвычайно малым числом переменных, в то время как обращение к связям атомов сделало бы необходимым введение бесконечного числа переменных. Тот факт, что мы можем, однако, применять основной закон в указанном нами смысле, не является наряду с основным законом новым фактом опыта, но является необходимым следствием самого основного закона [27]. 330.

Раздел 3

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНЫХ СИСТЕМ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

I. ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Теорема. Естественное движение свободной системы является однозначно определенным через задание положения и скорости системы в определенное время, ибо через положение и направ- 331.

ление скорости путь системы однозначно определен (161). Постоянная скорость системы на ее пути определяется величиной скорости в начальный момент.

332. Следствие 1. Посредством наличного состояния (261) свободной системы однозначно определяются ее будущие состояния и ее предшествующие состояния во все моменты времени.

333. Следствие 2. Если в каком-нибудь положении скорость системы может обращаться (что допустимо с точки зрения уравнений условий), то система будет пробегать положения своего предыдущего движения в обратной последовательности.

334. Замечание 1. В свободной голономной системе (123) всегда существует естественное движение, которое переводит систему в заданное время из произвольно заданного начального положения в произвольно заданное конечное положение. Ибо естественный путь между обоими положениями всегда возможен (192); на этом пути всякая скорость является допустимой, следовательно, также и такая, которая позволяет системе пройти заданный отрезок в заданное время.

335. Примечание. Замечание 1 остается верным, если вместо времени перехода поставить скорость системы на ее пути или энергию системы.

336. Замечание 2. Свободная система, которая не является голономной, не может быть переведена из каждого возможного начального положения в каждое возможное конечное положение при помощи естественного движения (162).

337. Теорема. Естественное движение свободной голономной системы определяется через задание двух положений, в которых система должна находиться в два определенные момента времени, ибо через это задание определяется путь системы и скорость на этом пути.

338. Примечание 1. Определение естественного движения через задание двух его положений является, вообще говоря, многозначным; оно будет однозначным, если расстояние обоих положений не превышает известной конечной меры, а длина описанного пути должна быть порядка этого расстояния (167, 172, 176, 190).

Примечание 2. Естественное движение свободной голономной системы определяется двумя положениями системы и промежутком времени перехода, или скоростью системы на ее пути, или энергией системы. 339.

II. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Теорема. Энергия находящейся в произвольном движении свободной системы не изменяется со временем. 340.

Ибо энергия определяется (282) массой системы, которая не меняется, а также скоростью, которая тоже не меняется.

Примечание 1. Из трех отдельных положений, на которые мы разложили основной закон (323), мы используем для доказательства данной теоремы лишь второе и третье. 341.

Мы можем сделать третье ненужным и сформулировать теорему независимо от определенного характера измерения времени, если мы представим ее в такой форме: отношение энергий каких-нибудь двух любых движений свободной системы не изменяется со временем.

Примечание 2. Закон сохранения энергии есть необходимое следствие основного закона. Наоборот, из закона сохранения энергии вытекает второе отдельное положение этого закона, но не первое, и, следовательно, не весь закон. Можно было бы мыслить естественные системы, для которых имела бы силу теорема о сохранении энергии и которые, тем не менее, не двигались бы по прямейшим путям. Например, можно было бы мыслить, что теорема о сохранении энергии имеет значимость также для живых систем и все-таки последние, несмотря на это, не подчинялись бы нашей механике. Наоборот, возможно представить естественную систему, которая движется по прямейшему пути и для которой, однако, закон сохранения энергии не применим. 342.

Примечание 3. В последнее время высказывают мнение, что энергия движущейся системы связана с определенным местом и перемещается от места к месту. Поэтому энергию сравнивают с материей как в этом смысле, так и в смысле неразрушимости. 343.

Такое понимание энергии очевидно далеко уклоняется от представлений развиваемой здесь механики. С равным правом, однако не с большим, можно сказать: энергия движущейся системы существует в месте системы, как можно сказать: скорость движущегося тела связана с местом последнего. Этот последний способ выражения, однако, никогда не применяется.

III. НАИМЕНЬШЕЕ УСКОРЕНИЕ

344. Теорема. Свободная система движется так, что величина ее ускорения в каждый момент является наименьшей; речь идет об ускорениях, которые согласуются с мгновенным положением, мгновенной скоростью и связями системы. Ибо квадрат величины ускорения равен, согласно (280) и (281),

$$v^4c^2 + \dot{v}^2.$$

Так как теперь для естественного движения $\dot{v}=0$ и, следовательно, v имеет постоянное значение, а c имеет наименьшее значение, совместимое с данным направлением движения и связями системы, то ускорение само принимает наименьшее значение, согласующееся с указанными ограничивающими обстоятельствами.

345. Примечание 1. Сформулированное в предыдущей теореме свойство естественного движения определяет это движение однозначно, и поэтому эта теорема может полностью заменить основной закон. Ибо если выражение $v^4c^2+\dot{v}^2$ должно быть наименьшим, то прежде всего должно быть $\dot{v}=0$, следовательно, система проходит путь с постоянной скоростью; далее, или $v=0$, но тогда система находится в покое, или c должно иметь наименьшее возможное для направления пути значение, тогда путь будет прямейшим.

346. Примечание 2. Теорема (344), представленная как основной закон, имеет перед используемой формой также и то преимущество, что она формулирует закон как единое неделимое утверждение, а не как внешнее объединение в одно предложение отдельных положений. Однако используемая форма имеет то преимущество, что она позволяет сделать смысл нашего закона более ясным и отчетливым.

IV. КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

Теорема. Естественный путь свободной голономной системы 347.
между какими-нибудь двумя достаточно близкими положениями короче, чем какой-нибудь другой возможный путь между теми же положениями. Ибо в голономной системе прямейший путь между достаточно близкими положениями является одновременно кратчайшим (190), (176).

Примечание 1. Если отбросить ограничения в отношении 348.
достаточной близости положений, то уже нельзя утверждать, что естественный путь короче, чем все другие пути, а также, что он короче, чем все соседние пути; однако всегда имеет место утверждение, содержащееся в предыдущей теореме, что вариация длины пути исчезает (190), (171) при переходе к любому близкому возможному пути.

Примечание 2. Предыдущая теорема соответствует прин- 349.
ципу наименьшего действия в форме Якоби. Ибо если мы назовем через m_ν — массу, ds_ν — длину пути какой-либо ν-той точки из n точек системы в определенный момент времени, то теорема выражает, что вариация интеграла

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu ds_\nu^2}$$

исчезает при естественном движении системы, а это и есть форма Якоби для принципа наименьшего действия.

Примечание 3. Для того чтобы представить отношение 350.
между теоремой (347) и принципом Якоби, мы можем сказать: соответственно обычному пониманию механики, эта теорема представляет собой частный случай теоремы Якоби, а именно случай, когда силы не действуют.

По нашему мнению, наоборот, предпосылки полной теоремы Якоби следует считать более узкими, а теорема Якоби является специальной формой выражения нашей теоремы.

351. Примечание 4. Теорема (347) не содержит теорему о сохранении энергии ни как предпосылку, ни как следствие, являясь полностью от нее независимой. Вместе с теоремой об энергии она может вполне заменить основной закон, однако лишь для голономных систем. Применяя эту теорему к другим системам, мы также получим определенные движения, но эти движения будут противоречить основному закону (194) и, следовательно, дали бы неправильное решение поставленных механических проблем.

V. КРАТЧАЙШЕЕ ВРЕМЯ

352. Теорема. Естественное движение свободной голономной системы приводит систему из данного начального положения в достаточно близкое конечное положение за более короткое время, чем какое-нибудь другое возможное движение с одинаковым постоянным значением энергии.

Ибо если для всех сравниваемых движений энергия и, следовательно, скорость вдоль пути одинаковы, то время движения пропорционально длине пути. Следовательно, оно наименьшее для кратчайшего пути, которым является естественный путь.

353. Примечание. Если отбросить ограничения относительно достаточной близости положений, то время перехода не будет больше с необходимостью наименьшим, но оно всегда сохраняет свойство быть одинаковым для естественного пути и всех бесконечно близких к нему возможных путей (348).

354. Следствие 1. Для естественного пути свободной голономной системы между данными достаточно близкими концевыми положениями временной интеграл энергии меньше, чем для каких-нибудь других возможных движений с тем же самым постоянным значением энергии. Ибо указанный интеграл равен произведению из данного постоянного значения энергии на промежуток времени перехода.

355. Примечание 1. Теорема (352), в форме следствия (354), соответствует принципу наименьшего действия Мопертюи. Если нужно более точно выразить отношение этой теоремы к принципу Мопертюи, то мы должны воспользоваться (350).

Примечание 2. Следствие (354), а также теорема (352) предполагают для сравниваемых друг с другом движений постоянство энергии со временем. Вместе с предположением, что естественное движение находится среди сравниваемых, они достаточны для определения естественного движения и могут заменить основной закон, но только для голономных систем. Их предпосылки, примененные к другим системам, привели бы к неправильным механическим решениям. 356.

Следствие 2. Свободная голономная система из своего начального положения в заданное время переносится естественным движением на большее прямейшее расстояние, чем каким-нибудь возможным движением, которое происходит с тем же постоянным значением энергии. 357.

VI. НАИМЕНЬШИЙ ВРЕМЕННОЙ ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

Теорема. Временной интеграл энергии при переходе свободной голономной системы из данного начального положения в достаточно близкое конечное положение меньше для естественного движения, чем для любого другого возможного движения, которое переводит систему в одинаковое время из данного начального положения в заданное конечное положение. 358.

Именно, если мы сравним сначала движения на одном и том же пути длины S, то среди них временной интеграл энергии достигает минимума для тех движений, для которых скорость v является постоянной. Ибо, так как сумма величин vdt имеет заданное значение S, то сумма величин v^2dt достигнет тогда и лишь тогда наименьшего значения, если все v равны. Если, однако, скорость v постоянна, то временной интеграл энергии равен $\frac{1}{2}mS^2/T$, где T есть продолжительность перехода. Так как T дано, то для различных путей системы временной интеграл энергии получается как квадрат длины пути; первая величина, таким образом, как и последняя, имеет минимальное значение для естественного пути.

359. Примечание 1. Если отбросить ограничения о достаточно близких положениях, то временной интеграл энергии не необходимо имеет минимум, однако его вариация всегда исчезает при переходе к другим рассматриваемым движениям (348).

360. Примечание 2. Предыдущая теорема (358) соответствует принципу Гамильтона. Если мы желаем точно сформулировать отношение этой теоремы к принципу Гамильтона, то должны поступить так же, как в (350).

361. Примечание 3. Теорема (358) и следствие (354) согласованы между собой в том, что они среди известных классов возможных движений выделяют естественное движение благодаря одному и тому же признаку, именно, минимальному значению временного интеграла энергии. Однако они существенно различаются друг от друга вследствие того, что рассматривают совершенно различные классы возможных движений.

362. Примечание 4. Теорема о сохранении энергии есть необходимое следствие теоремы (358) и поэтому теорема эта, будучи представлена как принцип, может полностью заменить основной закон, однако лишь применительно к голономным системам. Если отбросить ограничение о голономности системы, то мы получим также определенные, но находящиеся в противоречии с основным законом, движения материальных систем.

363. Обзор (347)—(362). Если мы используем (347), (352), (354), (358), выражающие свойства естественного движения, как принципы для полного или частичного определения этого движения, то мы делаем происходящие в настоящее время изменения в состоянии системы зависимыми от таких особенностей движения, которые могут наступить лишь в будущем и которые часто в жизни человека являются желательными для достижения определенной цели. Это обстоятельство иногда приводило физиков и философов к тому, чтобы усмотреть в законах механики выражение сознательного намерения в отношении будущих целей, свя-

занного с предвидением наиболее целесообразных средств. Такое понимание, однако, не необходимо и даже недопустимо.

Что такое понимание этих принципов не необходимо, 364. вытекает из того, что свойства естественного движения, являющиеся как бы проявлением цели, на самом деле устанавливаются нами как необходимые следствия закона, в котором не содержится никакого выражения предвидения будущего.

Что указанное понимание принципов недопустимо, следует из 365. того, что свойства естественного движения, которые являются обозначением стремления к будущему результату, имеются не у всех естественных движений. Если бы природа действительно имела цель достигать кратчайшего пути, наименьшей затраты энергии, кратчайшего времени, то невозможно было бы понять, как могут существовать системы, в которых эта цель хотя и достижима, но природа постоянно терпит неудачу в этом отношении.

Если желают видеть выражение определенной воли в том, 366. что системы среди всех возможных элементов пути выбирают всегда прямейший, то это слишком свободное понимание. В этом случае выражение определенной воли можно было бы видеть в том, что естественная система среди всех возможных движений выбирает не произвольные движения, но только такие, которые отмечены особыми признаками и которые определимы заранее.

Аналитическое представление. Дифференциальные уравнения движения

Объяснение. Под дифференциальными уравнениями дви- 367. жения системы мы понимаем дифференциальные уравнения, в которых время является независимым переменным, а координаты системы — зависимыми переменными, и которые вместе с начальным положением и начальной скоростью однозначно определяют движение системы (331).

Задача 1. Представить дифференциальные уравнения движе- 368. жения свободной системы в прямоугольных координатах последней.

В (155) мы имели дифференциальные уравнения прямейшего пути системы в прямоугольных координатах. В эти уравнения мы введем вместо длины пути время t в качестве независимой переменной. По основному закону $ds/dt = v$ независимо от t и, следовательно, от s; поэтому мы имеем

$$\dot{x}_\nu = x'_\nu \cdot v, \quad \ddot{x}_\nu = x''_\nu \cdot v^2.$$

Если мы умножим уравнение (155d) на mv^2 и напишем для сокращения X_ι вместо $mv^2\Xi_\iota$, то получим для решения задачи $3n$ уравнений

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} X_\iota = 0, \tag{a}$$

которые вместе с i уравнениями (ср. (155b))

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu}\ddot{x}_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n}\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu}\dot{x}_\nu \dot{x}_\mu = 0 \tag{b}$$

определяют $3n + i$ величин $\ddot{x}_\nu$ и X_ι как однозначные функции x_ν и $\dot{x}_\nu$.

369. Примечание 1. Уравнения движения свободной системы в форме (368) называются обычно уравнениями Лагранжа первого рода.

370. Примечание 2. Каждое отдельное уравнение (368) дает, после того как определим X_ι, компоненту ускорения системы вдоль определенной прямоугольной координаты системы.

371. Задача 2. Выразить дифференциальные уравнения движения свободной системы в обобщенных координатах p_ρ.

Дифференциальные уравнения прямейшего пути, выраженные через p_ρ, мы находим в (158c). В эти последние уравнения вместо длины пути введем время как независимую переменную, а также заметим, что по основному закону

$$\dot{p}_\rho = p'_\rho v, \quad \ddot{p}_\rho = p''_\rho v^2.$$

Следовательно, если мы уравнения (158) умножим на mv^2 и заменим $P_\varkappa$ через $mv^2\Pi_\varkappa$, то получим r уравнений

$$m\left\{\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma}\ddot{p}_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{r}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\right)\dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau\right\} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = 0, \tag{a}$$

которые вместе с k уравнениями (ср. (158b))

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\ddot{p}_\rho + \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{\partial p_{\varkappa\rho}}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\rho \dot{p}_\sigma = 0 \tag{b}$$

определяют $r + k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$ как однозначные функции p_ρ и $\dot{p}_\rho$.

Примечание. Используя соотношение (277), мы запишем уравнения движения (371a) в форме 372.

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = 0.$$

Если мы предположим, что величины $P_\varkappa$ определены, то каждое из этих уравнений определяет компоненту ускорения системы вдоль координаты p_ρ, выраженную в функции мгновенных положений и скоростей системы.

Следствие 1. Если мы выразим при помощи (291a) компоненту ускорения через энергию, то уравнения движения свободной системы примут вид 373.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\rho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = 0.$$

Примечание 1. Дифференциальные уравнения в этой форме называются обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода (ср. (369)). 374.

Примечание 2. Если координата p_ρ является свободной, то она не встречается в уравнениях условий системы (140); соответ- 375.

ствующие величины p_{χ_ρ} равны нулю, и уравнения движения, отнесенные к v_ρ, принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot p_\rho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} = 0.$$

В голономной системе (144) всегда можно уравнения движения представить в этой простой форме.

376. Следствие 2. Уравнения движения свободной голономной системы, для которой имеем r свободных координат p_ρ, можно записать в виде $2r$ уравнений (289), (375)

$$q_\rho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot p_\rho}, \tag{a}$$

$$\dot q_\rho = \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

из которых первые содержат лишь определения, а последние содержат опытные факты. Уравнения движения в этой форме можно понимать как $2r$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2r$ величин p_ρ и q_ρ. Эти уравнения вместе с $2r$ начальными значениями определяют величины p_ρ и q_ρ как функции времени.

377. Примечание 1. Уравнения (376a и b) можно назвать уравнениями движения в форме Пуассона.

378. Примечание 2. Из уравнений (376a и b) следует два соотношения:

$$\frac{\partial_p \dot q_\rho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p q_\sigma}{\partial p_\rho} \text{ и } \frac{\partial_p q_\rho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot q_\sigma}{\partial \dot p_\rho},$$

которые обладают простым физическим смыслом. Оба соотношения содержат элементы опыта и действительны для всякого возможного движения системы; а следовательно, могут быть использованы при определенных обстоятельствах для проверки основного закона.

Третье аналогичное соотношение, выведенное только из (376a), было бы только следствием наших определений.

Следствие 3. Уравнения движения свободной голономной 379.
системы для любых из r координат p_ρ можно записать в форме $2r$ уравнений (289), (290), (292), (375):

$$\dot p_\rho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\rho}, \tag{a}$$

$$\dot q_\rho = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

из которых первые содержат лишь определение, а последние экспериментальные факты. Уравнения движения в этой форме можно рассматривать как $2r$ дифференциальные уравнения первого порядка, которые вместе с $2r$ начальными данными определяют величины p_ρ и q_ρ как функции времени.

Примечание 1. Уравнения (379, a и b) обычно называют урав- 380.
нениями движения свободной системы в форме Гамильтона.

Примечание 2. Из уравнений (379) следуют два взаимных 381.
соотношения:

$$\frac{\partial_q \dot q_\rho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_q \dot q_\sigma}{\partial p_\rho}, \tag{a}$$

$$\frac{\partial_q \dot p_\rho}{\partial p_\sigma} = -\frac{\partial_q \dot q_\sigma}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

которые обладают простым физическим смыслом. Оба соотношения содержат элементы опыта и выделяют естественные движения из всех возможных движений. Они могут, таким образом, при особых обстоятельствах подтвердить обратной проверкой основной закон. Третье аналогичное соотношение, которое может быть выведено только из (379a), было бы только следствием наших определений и, таким образом, не имело бы механического смысла. Нужно отметить, что уравнения (378a) и (381a) представляют различные утверждения, а не одно и то же в различной форме.

Внутреннее принуждение системы

Теорема. Система материальных точек, между которыми 382.
не существует связей, остается в состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямого пути. Ибо для такой системы прямой путь есть одновременно прямейший.

383. Следствие 1. Свободная материальная точка пребывает в состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямого пути (закон инерции Галилея или первый закон Ньютона).

384. Следствие 2. Ускорение системы материальных точек, между которыми не существует связей, равно нулю. Связи между точками материальной системы можно, таким образом, понимать как причину, вследствие которой ускорение отличается от нуля.

385. Определение. Изменение, которое вызывается в ускорении совокупностью связей материальной системы, называется принуждением. Это изменение называют также внутренним принуждением или просто принуждением системы. Принуждение измеряется разностью между действительным ускорением системы и ускорением того естественного движения, которое имело бы место при снятии всех уравнений условий системы. Оно равно разности первых и последних.

386. Следствие 1. Внутреннее принуждение системы есть, как и ускорение, векторная величина, отнесенная к системе.

387. Следствие 2. В свободной системе внутреннее принуждение равно ускорению системы. Здесь оно является просто ускорением, но в другом понимании (382).

388. Теорема 1. Величина принуждения для естественного движения свободной системы в каждый данный момент меньше, чем для какого-нибудь другого возможного движения, которое в рассматриваемый момент имеет общими с естественным движением положение и скорость. Ибо это утверждение различается лишь по форме от теоремы (344) (см. (387)).

389. Следствие 1. Каждая новая связь, прибавляемая к существующим, увеличивает принуждение системы. Снятие какой-нибудь связи изменяет естественное движение так, что принуждение уменьшается.

390. Примечание 1. Теорема (388) соответствует принципу наименьшего принуждения в форме Гаусса. Чтобы точно выразить отношение к нему, следует поступить так же, как и в (350).

Примечание 2. Принцип Гаусса и закон инерции (383) 391.
вместе могут вполне заменить основной закон и притом для всех систем, ибо они вместе выражают теорему (344).

Теорема 2. Принуждение при естественном движении сво- 392.
бодной системы расположено всегда перпендикулярно к каждому возможному или виртуальному перемещению (111) системы из ее положения в данный момент.

Ибо компоненты принуждения вдоль координат p_ρ свободной системы (по 387) равны f_ρ. Следовательно, их можно записать в соответствии с (372) в форме

$$-\frac{1}{m}\sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa,$$

т. е. они являются перпендикулярными, в соответствии с (250), каждому возможному перемещению системы.

Символическое выражение. Если обозначить через δp_ρ 393.
изменение координат p_ρ для какого-нибудь произвольного возможного или виртуального перемещения системы, то уравнение

$$\sum_{\rho=1}^{r} f_\rho \delta p_\rho = 0 \qquad \text{(a)}$$

дает символическое выражение теоремы (249). Ибо это уравнение заменяет эту теорему (249) и является символическим, поскольку оно употребляется как символ для бесконечно многих уравнений. Если мы применяем прямоугольные координаты и обозначим через δx_ν изменение x_ν для какого-нибудь возможного или виртуального перемещения, то это уравнение принимает следующий вид:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu = 0. \qquad \text{(b)}$$

Примечание 1. Теорема (392) соответствует принципу 394.
д'Аламбера. Уравнения (393a и b) соответствуют обычному изложению этого принципа. Чтобы точно выразить отношение между

этим принципом и теоремой, мы должны были бы поступить так, как в (350).

395. Примечание 2. Из условия, что принуждение расположено перпендикулярно к каждому виртуальному перемещению системы, вытекают согласно (250) уравнения движения свободной системы в форме (372).

Принцип д'Аламбера, следовательно, может сам по себе всегда заменить основной закон, и при этом для всех систем.

Однако использованный нами основной закон имеет перед последним принципом преимущество, состоящее в том, что смысл его более простой и ясный.

396. Следствие 1. В свободной системе ускорение всегда направлено перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы из ее мгновенного положения.

397. Следствие 2. При движении свободной системы ускорение всегда расположено перпендикулярно к направлению действительного мгновенного движения.

398. Следствие 3. При движении свободной системы компоненты ускорения в каждом возможном направлении постоянно равны нулю.

399. Следствие 4. Компоненты ускорения свободной системы в направлении любой свободной координаты системы постоянно равны нулю.

400. Теорема. Свободная система движется так, что компоненты ускорения в направлении каждой координаты абсолютного положения всегда равны нулю, какова бы ни была внутренняя связь между точками системы. Ибо какой бы ни была связь системы, каждая координата ее абсолютного положения есть свободная координата (142).

401. Следствие. Если мы выберем координаты свободной системы произвольно, однако так, чтобы среди них находилось шесть координат абсолютного положения (19), то мы можем без знания связи системы или без полного знания ее всегда написать шесть дифференциальных уравнений движения системы.

402. Особый выбор координат. Сделаем следующий выбор координат абсолютного положения, что всегда допустимо для каждой системы [28].

Обозначим через α_1, α_2, α_3 средние арифметические значения тех прямоугольных координат всех материальных частиц, которые соответственно параллельны x_1, x_2, x_3. Величины α_1, α_2, α_3 мы рассматриваем как прямоугольные координаты точки осредненного положения системы, которую мы называем центром тяжести системы.

Проведем через центр тяжести три прямые, параллельные трем осям координат; через эти три прямые и все материальные частицы проведем плоскости и обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 среднее арифметическое значение углов всех плоскостей, проходящих через эти прямые с какой-нибудь одной из них. Шесть величин α и ω являются независимыми друг от друга переменными, изменение которых с необходимостью влечет изменение положения системы и которые не определяются только конфигурацией системы. Мы можем, следовательно, эти шесть величин принять в качестве координат абсолютного положения (21) и мы делаем их таковыми, если наряду с ними введем еще координаты конфигурации.

Если мы как-либо изменим α и ω, в то время как остальные координаты будем считать фиксированными, то система будет двигаться, как твердое тело.

Поэтому мы получаем из чисто геометрических оснований для изменения прямоугольных координат, если ν будет пробегать все значения от 1 до n (13), следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} dx_{3\nu} &= d\alpha_1 + (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\,d\omega_3 - (x_{3\nu-2} - \alpha_3)\,d\omega_2, \\ dx_{3\nu-1} &= d\alpha_2 + (x_{3\nu-2} - \alpha_3)\,d\omega_1 - (x_{3\nu} - \alpha_1)\,d\omega_3, \\ dx_{3\nu-2} &= d\alpha_3 + (x_{3\nu} - \alpha_1)\,d\omega_2 - (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\,d\omega_1. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Отсюда, если рассматривать x_ν как функции всех этих координат, найдем значения частных производных x_ν по α и ω; так например,

$$\frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_1} = 1, \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_3} = 0, \tag{b}$$

$$\frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_1} = 0, \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_2} = -(x_{3\nu-2} - \alpha_3), \qquad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_3} = x_{3\nu-1} - \alpha_2. \tag{c}$$

403. Следствие 1. На основе замечания, что ускорения системы по координатам α_1, α_2, α_3 должны равняться нулю (400), получены три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = 0.$$

Ибо, по (242) и (275), ускорение по координате α_1 центра тяжести равняется

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu,$$

следовательно, согласно (402b) оно равняется

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_{3\nu};$$

соответствующие выражения имеются для α_2 и α_3.

404. Примечание. Три уравнения (403) после двукратного интегрирования выражают ту теорему, что центр тяжести свободной системы должен находиться в равномерном и прямолинейном движении, т. е. выражают так называемый закон движения центра тяжести.

405. Следствие 2. На основании замечания, что ускорения системы по координатам ω_1, ω_2, ω_3 должны исчезнуть (400), мы получим три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}) = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu}) = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-1}) = 0,$$

ибо согласно (242) и (275) ускорение по ω_1 равно

$$\sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial x_\nu}{\partial \omega_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu.$$

Следовательно, на основании (402c), оно равно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{m} \{(x_{3\nu-2} - \alpha_3)\ddot{x}_{3\nu-1} - (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\ddot{x}_{3\nu-2}\}$$

или, в результате использования (403),

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{m} (x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}).$$

Аналогичные выражения имеем и для ускорения по ω_2 и ω_3.

Примечание. Уравнения (405) содержат так называемый 406.
закон площадей.

Интегрирование этих трех уравнений приводит непосредственно к следующим дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-2}\dot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\dot{x}_{3\nu-2}) = \text{const},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu}\dot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\dot{x}_{3\nu}) = \text{const},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_{3\nu-1}\dot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\dot{x}_{3\nu-1}) = \text{const},$$

геометрический смысл которых состоит в следующем (чем и оправдывается название закона): если мы соединим начало координат с каждой материальной частицей системы радиусом-вектором, то сумма проекций площадей, описываемых этими радиусами-векторами, на три координатные плоскости возрастает пропорционально времени.

Примечание 1 (от (402) до (406)). Закон сохранения центра 407.
тяжести и закон площадей мы ввели как особые случаи общей

теоремы (400). Мы не имели бы на это никакого права, если бы (как это иногда делается) рассматривали в качестве существенного содержания этих законов тот факт, что они дают интегралы уравнений движения.

Такая точка зрения кажется нам уже потому недопустимой, что результат теоремы площадей лишь в переносном смысле можно назвать интегралом. В качестве существенного содержания этих принципов мы рассматриваем (как нам кажется, с большим правом) то, что они дают соотношения, имеющие всеобщее значение независимо от особенностей связей системы.

408. Примечание 2 (от (402) до (406)). При выводе теоремы о центре тяжести и теоремы площадей как особого случая теоремы (400) мы не воспользовались всеми свойствами, которыми обладают по определению α и ω.

Указанные теоремы мы могли бы вывести также и при использовании других координат, например, координат, которые имеют с α и ω одинаковые направления, но не тождественны им.

Вообще при произвольном выборе координат мы не всегда получим шесть таких уравнений, которые давали бы новый физический смысл или были полностью независимыми от (405) и (403); это были бы уравнения, которые получаются из уравнений (403) и (405) в результате введения выбранных координат. Однако для всех этих различных форм теорема (400) дает общее выражение и физический смысл.

Голономные системы

409. Замечание. Если для голономной системы известно прямейшее расстояние (217), то уравнение прямейшего пути можно представить в конечной форме (225). Эти пути являются естественными путями, если система свободная, и все движения, при которых она перемещается вдоль этого пути с постоянной скоростью, являются естественными движениями.

Уравнения движения свободной голономной системы можно представить, следовательно, в конечной форме.

Задача. Представить уравнения движения свободной голономной системы при помощи прямейших расстояний. 410.

Пусть S есть прямейшее расстояние системы, представленное как функция свободных координат $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$, ее начального и конечного положений; t_0 — момент времени, в который система проходит начальное положение, а t_1 — момент времени, в который она проходит конечное положение.

Тогда $t_1 - t_0$ есть продолжительность перехода, следовательно,

$$v = \frac{S}{t_1 - t_0} \tag{a}$$

есть постоянная скорость системы на ее пути.

Следовательно, ее энергия будет

$$E = \frac{1}{2} m \frac{S^2}{(t_1 - t_0)^2}, \tag{b}$$

и ее количества движения $q_{\rho 0}$ и $q_{\rho 1}$ в моменты времени t_0 и t_1 будут:

$$\left.\begin{aligned} q_{\rho 0} &= m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\rho\rho 0}} \cos \widehat{s p_{\rho 0}}, \\ q_{\rho 1} &= m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\rho\rho 1}} \cos \widehat{s p_{\rho 1}}. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Для уравнений прямейшего пути мы имеем две формы уравнений (224a) и (226a). Если мы умножим последние на $mS/(t_1 - t_0)$ или, что то же самое (в соответствии с b), на $\sqrt{2mE}$, то получим следующие четыре группы r уравнений:

$$q_{\rho 1} = \frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{d}$$

$$q_{\rho 0} = -\frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{e}$$

$$q_{\rho 1} = \sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{f}$$

$$q_{\rho 0} = -\sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\rho 0}}. \tag{g}$$

Следовательно, наша задача вполне разрешается и притом несколькими способами. Ибо если мы рассматриваем t_1 как переменное время и, следовательно, $p_{\rho 1}$ — как координаты положения, изменяющегося со временем, то r уравнений (e) определяют r координат как конечные функции t_1.

То же самое дают уравнения (g), если мы прибавим к ним еще соотношения между E и t_1, т. е. уравнения (b). $2r$ величин $p_{\rho 0}$ и $q_{\rho 0}$ играют при этом роль $2r$ произвольных постоянных. При подобном же методе рассмотрения уравнения (d) или (f) и (b) дают нам уравнения движения системы, а именно, как дифференциальные уравнения первого порядка, в которых r величин $p_{\rho 0}$ играют роль произвольных постоянных.

Или, если рассматривать, что является не менее допустимым, момент t_0 как переменное время, следовательно, положение 0 как переменное положение, то уравнения (d), а также и (f) и (b) представляют уравнения движения в конечной форме с моментом времени t_0 как независимым переменным и с $p_{\rho 0}$ как зависимыми переменными. $p_{\rho 1}$ и $q_{\rho 1}$ являются $2r$ произвольными постоянными. Одновременно уравнения (e), а также (g) и (b) представляют, кроме того, уравнения движения в виде дифференциальных уравнений первого порядка, в которых $p_{\rho 1}$ играет роль r произвольных постоянных.

411. Следствие 1. Если положим

$$\sqrt{2Em} \cdot S = V \tag{a}$$

и будем рассматривать V как функцию $p_{\rho 0}$, $p_{\rho 1}$, то можно естественные движения системы представить в виде

$$q_{\rho 1} = \frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{b}$$

$$q_{\rho 0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{c}$$

$$t_1 - t_0 = \frac{\partial V}{\partial E}. \tag{d}$$

Ибо уравнения (b) и (c) совпадают с уравнениями (410 f и g) и уравнения (d) следуют из уравнения (a) и (410 b).

Примечание. Функция V является Гамильтоновой характеристической функцией системы. Такая функция имеется, следовательно, лишь для голономных систем. Характеристическая функция, соответственно ее механическому смыслу, дает удвоенное значение временно́го интеграла энергии, который имеет место, когда система с заданной энергией переходит из данного начального в заданное конечное положение, и который рассматривается как функция этой энергии и координат начального и конечного положения. Ибо, согласно уравнениям (411a) и (410b), функция V по своему значению определяется уравнением 412.

$$V = 2E(t_1 - t_0),$$

формальное же ее выражение будет дано тогда, когда мы в правой части уравнения продолжительность перехода $t_1 - t_0$ выразим как функцию E, $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$.

Теорема. Характеристическая функция V свободной голономной системы удовлетворяет дифференциальным уравнениям первого порядка 413.

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma 1}} = E,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma 0}} = E.$$

Они получаются умножением уравнений (227) для прямейшего расстояния на $2mE$ с учетом уравнения (411a).

Следствие 2. Если положим 414.

$$\frac{mS^2}{2(t_1 - t_0)} = P, \tag{a}$$

и будем рассматривать P как функцию $p_{\rho 0}$, $p_{\rho 1}$, t_0 и t_1, то уравнения

$$q_{\rho 1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}} \tag{b}$$

и

$$q_{\rho 0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}$$

будут представлять естественные движения системы.

Энергию E можно получить из P непосредственно уравнениями

$$E = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0}. \qquad \text{(d)}$$

Ибо уравнения (b) и (c) соответствуют уравнениям (410 d и e), а уравнения (d) следуют из уравнений (a) и (410b).

415. Примечание. Введенная функция P является Гамильтоновой главной функцией системы. Она обозначена самим Гамильтоном через S. Такая функция существует лишь для голономной системы.

Главная функция, соответственно ее механическому смыслу, дает значение временного интеграла энергии при переходе системы в заданное время из заданного начального в заданное конечное положение, рассматриваемое как функция времени перехода, а также координат начального и конечного положения. Ибо, согласно уравнениям (414a) и (410b), функция P, что касается ее величины, выражается уравнением

$$P = E(t_1 - t_0),$$

а что касается ее формы, то она получается тогда, когда в правой части мы представим E как функцию $p_{\rho 1}$, $p_{\rho 0}$, t_1 и t_0.

416. Теорема. Главная функция свободной голономной системы удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 1}} = -\frac{\partial P}{\partial t_1},$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 0}} = \frac{\partial P}{\partial t_0}.$$

Последние получаются, если уравнения (227) мы умножим на (410b):

$$\frac{mS^2}{2(t_1 - t_0)^2} = E,$$

и примем во внимание соотношения (414 a и d).

Примечание к (411)—(416). Подобно тому как в (232)—(236) 417.
мы рассматривали, исходя из дифференциальных уравнений (227), функции, родственные прямейшему расстоянию и эквивалентные ему в аналитическом отношении, но не имевшие столь же простого геометрического смысла, мы можем точно так же, исходя из дифференциальных уравнений (413) и (416), придти к функциям, родственным характеристической и главной функциям, полезным в аналитическом отношении и даже имеющими известные преимущества перед последними, но физический смысл которых несколько затуманен математической формой выражения. Эти функции уместно было бы назвать главной и характеристической функциями Якоби.

Впрочем ясно, что даже в характеристической и главной функциях содержится только слегка завуалированный простой смысл прямейшего расстояния, так что введение этих функций наряду с прямейшим расстоянием имеет небольшое значение для вполне известных свободных систем.

Динамические модели

Определение. Материальная система называется динами- 418.
ческой моделью другой системы, если можно представить связи первой системы через такие координаты, что удовлетворяются следующие условия:

1) число координат первой системы равно числу координат второй системы;

2) при подходящем согласовании координат обеих систем существуют одинаковые уравнения условий;

3) при указанном согласовании координат выражения для величины перемещений в обеих системах являются соответственно согласованными.

Согласованные друг с другом координаты обеих систем называются соответственными.

Соответственными положениями, перемещениями и т. д. называются такие положения, перемещения и т. д. обеих систем, к которым принадлежат одинаковые значения соответственных координат и их изменения.

419. Следствие 1. Если одна система есть модель другой системы, то и наоборот — вторая система есть модель первой.

Если две системы являются моделями третьей, то они являются также моделями одна другой. Модель модели данной системы является также моделью первоначальной системы.

Все системы, которые являются моделями друг друга, называются динамически подобными.

420. Следствие 2. Свойство одной системы быть моделью другой не зависит от выбора координат одной или другой системы, хотя при специальном выборе координат это свойство выступает с большей отчетливостью.

421. Следствие 3. Система еще не вполне определяется только тем, что она является моделью заданной системы. Бесконечно многие, физически полностью различные системы могут быть моделью одной и той же системы. Одна и та же система может быть моделью бесконечного множества систем, совершенно различных между собой.

Ибо координаты масс обеих систем, которые являются моделями друг друга, могут быть по своему числу совершенно различными и совершенно различными функциями соответственных координат.

422. Следствие 4. Модели голономной системы являются сами голономными системами. Модели неголономных систем сами являются неголономными системами.

423. Замечание. Чтобы голономная система была моделью другой, достаточно выбрать такие свободные координаты обеих систем, чтобы выражения перемещения обеих систем были одинаковыми.

Теорема. Если две модели имеют в определенное время 424.
соответственные друг другу состояния, то они имеют соответственные состояния и в каждый другой момент времени.

Ибо благодаря уравнениям условий системы, выражению для величины перемещения (164) и начальным значениям координат и их изменений (332) изменение этих координат является определенным в любое время, какой бы функцией координат ни являлось положение масс системы.

Следствие 1. Чтобы предвидеть характер естественного 425.
движения материальной системы, достаточно знание модели этой системы. Модель при известных условиях может быть значительно проще самой системы, движение которой она представляет.

Следствие 2. Если некоторые величины есть соответствен- 426.
ные координаты материальных систем, являющихся моделями друг друга, и если доступны наблюдению только эти соответственные координаты, то все эти системы не являются различными друг от друга в отношении ограниченного наблюдения, но проявляются как одинаковые системы, каким бы различным в них ни было число и связь материальных точек.

Поэтому невозможно только из наблюдения естественного движения свободной материальной системы, т. е. без прямого определения ее масс (300), получить более полное знание связи системы, чем это требуется для того, чтобы отнести модель к самой системе.

Примечание 1. Если мы допустим, что кроме непосред- 427.
ственно, т. е. определяемых весами, масс, в системах природы могут существовать еще другие гипотетические массы (301), то вообще невозможно проникнуть глубже в познание связей естественной системы, чем это требуется для того, чтобы отнести модель к самой системе. Невозможно будет, вообще говоря, продвинуться в познании связей естественных систем дальше указания модели действительных систем.

Фактически мы не можем знать, совпадают ли системы, которые мы рассматриваем в механике, с действительными системами природы, которые мы желаем познать, в чем-либо другом, кроме того, что одни являются моделями других.

428. Примечание 2. Отношение динамической модели к системе, моделью которой она считается, такое же, как отношение образов, которые создает наш ум о вещах, к самим вещам. Именно, если мы будем рассматривать состояние модели как отображение состояния системы, то следствия отображения, которые должны наступить по законам этого отображения, будут одновременно отображением следствий, которые должны появиться у первоначального предмета по законам этого первоначального предмета. Соответствие между умом и природой может, таким образом, сравниваться с соответствием между двумя системами, которые являются моделями одна другой, и мы можем даже дать себе отчет об этом соответствии, если примем, что ум имеет способность образовывать действительные динамические модели вещей и оперировать с ними.

Раздел 4.

ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

429. Предварительное замечание 1. По нашему представлению каждая несвободная система есть часть большей свободной системы. Несвободные системы, для которых это положение не выполняется, не могут быть получены. Такую несвободную систему мы будем называть частичной системой, а свободную систему, часть которой она составляет, будем называть полной системой.

430. Предварительное замечание 2. Рассматривая часть свободной системы как несвободную систему, мы предполагаем, что остальная система нам неизвестна, так что непосредственное применение основного закона становится невозможным. Этот недостаток нашего знания мы должны восполнить посредством каких-нибудь специальных указаний. Такие указания можно

сделать различным образом. Не исчерпывая всех возможностей, мы укажем только две формы, которые имели до сих пор в развитии механики особое значение.

Первая форма есть та, при которой мы обозначаем движение несвободной системы как ведомое; вторая форма является такой, при которой мы говорим, что движение несвободной системы подвергается влиянию сил.

I. ВЕДОМАЯ НЕСВОБОДНАЯ СИСТЕМА

Определение. Ведомым движением несвободной системы называется каждое движение, которое система имеет тогда, когда остальные массы полной системы совершают вполне определенные предписанные движения. Систему, которая выполняет ведомое движение, называют ведомой системой. 431.

Добавление 1. Возможным движением ведомой системы называется каждое движение последней, которое не противоречит связям полной системы и определенным движениям остальных масс системы. 432.

Добавление 2. Естественным движением ведомой системы называется каждое движение последней, которое вместе с определенными движениями остальных масс образует естественное движение полной системы. 433.

Задача. Представить аналитически возможное движение ведомой системы. 434.

Пусть r величин p_ρ будут обобщенные координаты рассматриваемой частичной системы и $\mathfrak{r}$ величин $\mathfrak{p}_\rho$ — какие-нибудь координаты остальных масс полной системы. $r+\mathfrak{r}$ величин p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ есть координаты полной системы, связи которых представляются уравнениями вида

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\chi\rho}\dot{p}_\rho + \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{p}_{\chi\rho}\dot{\mathfrak{p}}_\rho = 0, \qquad (a)$$

где $p_{\chi\rho}$ и $\mathfrak{p}_{\chi\rho}$ могут быть функциями как p_ρ, так и $\mathfrak{p}_\rho$.

Если теперь движения масс, координаты которых $\mathfrak{p}_\rho$ определены, то тогда все $\mathfrak{p}_\rho$ являются известными функциями времени.

В таком случае часть уравнений (a) выполняется тождественно при помощи этих функций, а часть принимает форму r уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{x\rho}\dot{p}_{\rho} + p_{xt} = 0 \qquad \text{(b)}$$

или

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{x\rho}dp_{\rho} + p_{xt}dt = 0,$$

которые называются уравнениями условий ведомой системы и в которых $p_{x\rho}$ и p_{xt} являются теперь функциями лишь p_{ρ} и времени t. Все возможные движения ведомой системы удовлетворяют этим уравнениям и все движения, которые им удовлетворяют, есть возможные движения.

435. Примечание 1. Если ведомая система есть система голономная, то дифференциальные уравнения (b) и (c) можно заменить таким же числом конечных уравнений между r координатами и временем t. Возможные положения ведомой голономной системы можно представить через координаты, которые не подчиняются другим условиям, кроме того, что некоторые из них являются заданными функциями времени.

436. Примечание 2. Уравнения условий ведомой системы вообще содержат, следовательно, время и поэтому они не удовлетворяют требованию закономерности (119).

Наоборот, если мы рассматриваем теперь любую систему, уравнения которой, согласно обычному способу выражения механики, содержат в явном виде время и, выражаясь нашим языком, являются незакономерными, то ее можно рассматривать в качестве ведомой системы, следовательно, в качестве системы, которая вместе с другими неизвестными массами удовлетворяет условиям закономерности.

Если это предположение допустимо, то проблема делается определенной механической проблемой (325).

Если же это предположение при особых формах уравнений условий недопустимо, то эти уравнения условий содержат уже противоречие с основным законом или с его предпосылками, и все

отнесенные к системе вопросы не составят, следовательно, механической проблемы (326).

Примечание 3. К ведомым системам основной закон непосредственно неприложим, ибо понятие прямейшего пути определено лишь для закономерных связей (120). 437.

Внутренние связи ведомой системы, однако, незакономерны и, следовательно, должны быть найдены другие признаки, которые отличали бы естественные движения ведомой системы от других возможных движений.

Теорема 1. Ведомая система, подобно свободной системе, движется так, что величина ее ускорения остается для действительного движения меньше, чем для любого другого движения, которое удовлетворяет уравнениям условий системы и которое в данный момент совпадает по положению и скорости с действительным движением. 438.

Ибо квадрат величины ускорения (275) полной системы равен сумме квадратов соответствующих величин для рассматриваемой частичной системы и для остальной части полной системы, умноженных на массы этих частичных систем и деленных на массу полной системы. Эта сумма по (344) должна быть минимальной.

Второе слагаемое уже известно и предполагается такой функцией времени, для которой выполняется минимум суммы (436). Следовательно, этот минимум достигается тогда и только тогда, когда первое слагаемое есть также минимум.

Теорема 2. Подобно свободной системе, ведомая голономная система движется так, что временной интеграл энергии при переходе между двумя достаточно близкими соседними положениями для действительного движения меньше, чем для какого-нибудь другого движения, которое удовлетворяет уравнениям условий и переводит систему за равное время из заданного начального положения в конечное. 439

Ибо временной интеграл энергии полной системы равен сумме соответствующих величин для рассматриваемой частичной системы и для остальной части полной системы. Эта сумма по (358) должна быть минимальной.

Второе слагаемое предполагается уже определенным и таким, которое обеспечивает минимум суммы; этот минимум выполняется лишь тогда, когда первое слагаемое также делается минимумом.

440. Примечание 1. Обе предыдущие теоремы (438) и (439) содержат, очевидно, приспособление теорем (344) и (358) к особым предпосылкам этого раздела. При помощи обычного способа выражения механики мы можем их содержание выразить в такой форме: закон наименьшего ускорения и принцип Гамильтона сохраняют значение и в том случае, когда уравнения условий системы явно содержат время.

441. Примечание 2. Законы сохранения энергии, кратчайшего пути и кратчайшего времени (340), (347), (352) не могут быть прямо применены к условиям ведомой системы. В обычном способе выражения механики это положение принимает такую форму: принцип энергии и принцип наименьшего действия теряют свое значение, если уравнения условий системы явно содержат время.

442. Задача. Составить дифференциальные уравнения движения ведомой системы.

Пусть m — масса, p_ρ — координаты и f_ρ — ускорения вдоль p_ρ ведомой системы. Пусть далее $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{p}_\rho$ — те же величины для остальных материальных точек полной системы.

Величины p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ могут служить также координатами полной системы. В этом случае компоненты ускорения полной системы вдоль этих координат можно обозначить как f'_ρ и $\mathfrak{f}'_\rho$. Тогда движение полной системы однозначно определяется через h уравнений условий вида (434a) и через $r+\mathfrak{r}$ уравнений движения вида (372):

$$(m+\mathfrak{m})\, f'_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{h} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = 0, \tag{a}$$

$$(m+\mathfrak{m})\, \mathfrak{f}'_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{h} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho} P_\varkappa = 0. \tag{b}$$

По предположению мы считаем $\mathfrak{p}_\rho$ уже известными функциями времени, при помощи которых уравнения (b) выполняются тождественно и при введении которых в h уравнений условий полной

системы последние переходят в k уравнений условий (434b) ведомой системы. Далее мы имеем, согласно (255),

$$(m+\mathfrak{m})\, f'_\rho = m f_\rho. \tag{c}$$

В соответствии с этим мы получаем r уравнений движения

$$m f_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = 0, \tag{d}$$

и k уравнений условий

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} \dot{p}_\rho + p_{\varkappa t} = 0; \tag{e}$$

$(r+k)$ этих уравнений уже не содержат неизвестных масс полной системы и, следовательно, они достаточны для определения $r+k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$. Таким образом, эти $(r+k)$ уравнений и представляют решение поставленной задачи.

Следствие 1. Дифференциальные уравнения движения ведомой системы имеют ту же форму, что и дифференциальные уравнения свободной системы. 443.

Говоря языком обычной механики, можно сказать, что законность этой формы не зависит от того, содержат ли уравнения условий время в явном виде или нет. Поэтому уравнения движения ведомой системы допускают такие же преобразования, как и уравнения движения свободной системы ((368) и далее). Однако эта форма теряет применимость, когда все координаты предполагаются свободными.

Следствие 2. Естественное движение ведомой системы является однозначно определенным посредством задания положения и скорости системы в определенный момент времени (ср. (331)). 444.

Замечание. Подобно свободной системе, в ведомой системе принуждение равно ее ускорению. 445.

Ибо если совокупные уравнения условий ведомой системы снимаются, то материальные точки системы делаются свободными точками и ускорение естественного движения системы становится равным нулю (385).

446. Теорема 1. Для естественного движения ведомой системы, как и для свободной системы, величина принуждения в каждый момент меньше, чем для какого-нибудь другого возможного движения, которое в рассматриваемый момент времени имеет положение и скорость, одинаковые с естественным движением. Теорема эта следует из (445) и (438).

447. Теорема 2. Как при естественном движении свободной системы, так и при естественном движении ведомой системы направление принуждения перпендикулярно к каждому возможному или виртуальному перемещению системы из ее мгновенного положения. Эта теорема следует из (445) и (442), как и в (392).

448. Примечание Обе предыдущие теоремы (446) и (447) содержат приспособление теорем (388) и (392) к особым условиям ведомой системы. Их содержание на языке обыкновенной механики выражается так: принцип наименьшего принуждения Гаусса и принцип д'Аламбера сохраняют свое значение и для случая, когда уравнения условий содержат явно время.

449. Замечание. Если координаты $\mathfrak{p}_\rho$ полной системы, входящие вместе с p_ρ в уравнения (437а), являются постоянными, то уравнения условий ведомой системы принимают вид

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\chi\rho}\dot{p}_\rho = 0,$$

где $p_{\chi\rho}$ времени не содержит. Ведомая система в этом случае является закономерной, однако, вообще говоря, она остается несвободной, ибо $p_{\chi\rho}$ могут быть функциями абсолютного положения, в то время как в уравнениях условий свободной системы они не зависят от абсолютного положения.

В таких несвободных закономерных системах понятие прямейшего пути сохраняет свое значение. Поэтому и основной закон применим к таким системам и, следовательно, для них сохраняют свое значение все теоремы для движений свободных систем, за исключением тех, которые относились к абсолютному положению, т. е. все, за исключением теоремы (400) и ее следствий [29].

II. СИСТЕМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ [30]

Определение. Две материальные системы называются не- 450.
посредственно или прямо соединенными, если одна или несколько координат одной системы длительно равны одной или нескольким координатам другой.

Две системы называются соединенными, если их координаты можно выбрать так, что соединение систем будет прямым. Соединенные системы, не подходящие под данное определение, называются косвенно соединенными.

Следствие 1. Соединение двух систем есть взаимоотношение 451.
между обеими системами, которое существует независимо от нашей воли и, в частности, от выбора координат. Однако является ли существующее соединение прямым или косвенным, зависит от выбора координат, и, следовательно, это вопрос нашего произвольного определения.

Следствие 2. Соединение, существующее между двумя 452.
системами, можно путем определенного выбора координат представить в виде прямого соединения. Дальше мы всегда будем предполагать наличие этого свойства, если специально не оговорено противоположное.

Координаты двух соединенных систем, которые всегда равны, мы называем их общими координатами.

Следствие 3. Каждая из двух соединенных систем является 453.
в результате существования этого соединения несвободной системой. Совокупность двух или нескольких несвободных систем образует свободную систему. Если противоположное специально не отмечается, то дальше мы будем предполагать, что две соединенные системы уже образуют свободную систему, без необходимости привлекать третьи системы.

Аналитическое представление. Если p_ρ есть коорди- 454.
ната одной, а $\mathfrak{p}_\rho$ — координата другой системы, то соединение между обеими системами выражается в том, что для одной или многих пар значений индексов ρ и σ, координаты p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ делаются равными. Мы можем, однако, без ущерба для общности распределить

индексы таким образом, что совпадающие координаты в обеих системах получают один и тот же индекс. Тогда системы будут соединенными в том случае, когда для одного или нескольких значений ρ имеется постоянно

$$\mathfrak{p}_\rho - p_\rho = 0. \tag{a}$$

Отсюда следует еще два уравнения:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\rho = \dot{p}_\rho = 0, \tag{b}$$

$$d\mathfrak{p}_\rho - dp_\rho = 0. \tag{c}$$

455. Определение. Под силой мы понимаем самостоятельно рассматриваемое действие, которое одна из двух соединенных систем оказывает на движение другой вследствие основного закона.

456. Следствие. Каждой силе всегда необходимо соответствует «противосила» (противодействие). Ибо система, обозначенная в определении второй, оказывает на первую систему влияние, которое по самому определению является силой. Сила и противосила равноправны в том смысле, что каждая из них может быть понимаема и как сила и как «противосила».

457. Задача. Получить аналитическое выражение для влияния, которое одна из двух соединенных систем оказывает на движение другой.

Пусть m — есть масса, а r — величина p_ρ координаты первой системы, и пусть k уравнений условий этой системы будут

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho}\dot{p}_\rho = 0. \tag{a}$$

Пусть далее $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{p}_\rho$ суть те же величины для второй системы и $\mathfrak{k}$ уравнений условий ее имеют вид

$$\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}\dot{\mathfrak{p}}_\rho = 0. \tag{b}$$

Пусть, кроме того, между обеими системами существует несколько, например h уравнений соединения в форме

$$\dot{\mathfrak{p}}_\rho - \dot{p}_\rho = 0. \tag{c}$$

Рассмотрим теперь действительное движение первой системы под влиянием второй и будем представлять ее как ведомую систему. Так как координаты p_ρ не встречаются в уравнениях (c), то ускорения вдоль них выражаются уравнением (442)

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa = 0. \tag{d}$$

Однако для тех p_ρ, которые встречаются в (c), мы должны учитывать также уравнения (c) и, следовательно, умножить коэффициент при $\dot{p}_\rho$ в них, т. е. — 1, на неопределенный множитель, который обозначим P_ρ, и прибавить это произведение к левой части уравнения. Тогда получим

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}P_\varkappa - P_\rho = 0. \tag{e}$$

Введение h величин P_ρ в уравнения движения увеличивает число неизвестных на h. Для определения этих h величин имеется необходимое число уравнений условий, увеличенных на h уравнений (c), в которых $\dot{\mathfrak{p}}_\rho$ мы должны написать, как явно заданные функции времени. Если же мы примем, что P_ρ даны нам непосредственно как функции времени, тогда знание второй системы h уравнений (c) вообще не требуется и $k+r$ уравнений (a), (d), (e) достаточны для однозначного определения $k+r$ неизвестных $P_\varkappa$ и $\ddot{p}_\rho$. Таким образом, h множителей P_ρ выражают полностью действие второй системы на первую, и их совокупность можно рассматривать как аналитическое выражение для этого действия.

Добавление 1. Если мы хотим представить действие первой системы на вторую в симметричном виде, то нужно записать уравнения соединения в таком виде: 458.

$$\dot{p}_\rho - \dot{\mathfrak{p}}_\rho = 0. \tag{a}$$

Тогда для всех $\mathfrak{p}_\rho$, не входящих в (a), имеем уравнения движения в виде

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho}\mathfrak{P}_\varkappa = 0, \tag{b}$$

в то время как для остальных $\mathfrak{p}_\rho$ они имеют вид

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\chi=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\chi\rho}\mathfrak{P}_\chi - \mathfrak{P}_\rho = 0, \tag{c}$$

где под $\mathfrak{P}_\rho$ следует понимать неопределенные множители уравнений (a).

Совокупность всех $\mathfrak{P}_\rho$ дает нам выражение действий, которое первая система оказывает в каждый момент на движение второй.

459. Добавление 2. Очевидно мы можем все уравнения движения первой системы записать в виде

$$mf_\rho + \sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho}P_\chi - P_\rho = 0, \tag{a}$$

и все уравнения движения второй системы в виде

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\chi=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\chi\rho}\mathfrak{P}_\chi - \mathfrak{P}_\rho = 0, \tag{b}$$

если мы устанавливаем, что для всех несоединенных координат величины P_ρ и $\mathfrak{P}_\rho$ должны быть равны нулю.

Совокупность величин P_ρ и $\mathfrak{P}_\rho$ теряет при этом значение как система множителей уравнений (457c) и (458a), но она сохраняет значение как выражение действия, которое одна система оказывает на другую.

460. Аналитическое представление силы. Мы можем поэтому, в соответствии с определением (455), установить, что совокупность величин P_ρ, однозначно определяемых по (459) для всех p_ρ, образует аналитическое определение для силы, с которой система $\mathfrak{p}_\rho$ действует на систему p_ρ.

Соответственно, совокупность величин $\mathfrak{P}_\rho$ образует аналитическое выражение для силы, с которой система p_ρ действует на систему $\mathfrak{p}_\rho$.

Отдельные величины P_ρ и $\mathfrak{P}_\rho$ называются компонентами силы вдоль соответствующих координат p_ρ или $\mathfrak{p}$ или короче — силой вдоль этих координат.

На основании этого определения мы приходим к соответствию с существующим обозначением механики, и необходимость обеспечить это соответствие достаточно оправдывает то, что мы среди многих допустимых определений выбрали именно это.

Следствие 1. Силу, с которой одна система действует на 461.
другую, можно рассматривать как векторную величину, отнесенную ко второй системе, а именно, как векторную величину, компоненты которой по общим координатам вообще отличны от нуля, а по координатам, не являющимся общими, исчезают, и, наконец, компоненты которой по направлениям, не выражающимся изменениями применяемых координат, остаются неопределенными.

Следствие 2. Силу, с которой одна система действует на 462.
другую, можно также рассматривать как векторную величину, отнесенную к первой системе, а именно, как векторную величину, компоненты которой по общим координатам вообще не равны нулю, а по необщим координатам исчезают и, наконец, по направлениям, которые не выражаются через изменения применяемых координат, остаются неопределенными.

Примечание. Рассматривая силу как векторную величину, 463.
отнесенную к системе, видим, что компоненты силы зависят от выбора координат и, следовательно, от нашего произвола. Это происходит потому, что от выбора координат зависит многообразие тех движений, которые мы рассматриваем вообще и в направлении которых мы хотим допустить возможное действие.

Замечание 1. Если некоторая система соединена последова- 464.
тельно с несколькими системами и испытывает от этих систем одинаковые воздействия, то ее движения будут одинаковые, как бы ни были различны между собой эти системы. Поэтому мы можем говорить, согласно определению (455), о движении под действием силы без упоминания других систем, которые ее производят и без которых она немыслима.

Замечание 2. Если некоторая система последовательно 465.
соединена с несколькими системами и совершает при этом одинаковые движения, то она действует на эти системы с одинаковой силой, хотя они могут быть совершенно различными.

Мы можем поэтому говорить, согласно определению (455), просто о силе, которую производит движущаяся система, без упоминания других систем, на которые эта сила действует и без которых она не была бы мыслимой.

466. Замечание 3. Так как все силы, о которых мы говорили, могут производиться только материальными системами, воздействующими на другие материальные системы вследствие основного закона, то все силы имеют известные общие свойства. Источником таких общих свойств являются основной закон и свойства материальных систем.

Действие и противодействие

467. Обозначения 1. Компоненту силы, с которой система $\mathfrak{p}_\rho$ действует на систему p_ρ, будем рассматривать как векторную величину, отнесенную к системе p_ρ, и обозначим ее через P_ρ.

Если мы будем рассматривать эту же силу как отнесенную к системе $\mathfrak{p}_\rho$, то будем обозначать компоненты ее по $\mathfrak{p}_\rho$ через $\mathfrak{P}'_\rho$. Тогда для всех общих координат имеем тождество

$$P_\rho = \mathfrak{P}'_\rho.$$

2. Компоненты силы, с которой система p_ρ действует на систему $\mathfrak{p}_\rho$ и рассматриваемой в качестве векторной величины, отнесенной к системе $\mathfrak{p}_\rho$, мы обозначили в (460) как $\mathfrak{P}_\rho$. Рассматривая ту же силу как векторную величину, отнесенную к системе p_ρ, мы можем ее компоненты по p_ρ обозначить через P'_ρ. Тогда для всех общих координат имеем тождественно:

$$\mathfrak{P}_\rho = P'_\rho;$$

таким образом, силы, действующие на систему, мы обозначаем буквами без штрихов, а силы, производимые системой, буквами со штрихами, поскольку они рассматриваются как векторные величины, отнесенные к самой системе.

468. Теорема. Сила и противосила всегда равны друг другу и противоположны.

Иначе говоря, компоненты обеих сил вдоль каждой из координат равны друг другу и противоположны, и именно, когда мы рассматриваем силу и противосилу как векторные величины, отнесенные к одной или к другой системе.

Действительно, мы можем обе соединенные системы (457) рассматривать как одну единую свободную систему. Масса ее есть $m + \mathfrak{m}$, а координаты p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$.

Уравнения условий ее суть уравнения (457a и b) и уравнения соединения даны в форме (457c). Если мы обозначим множители уравнений (a) через $P^0_\varkappa$, уравнений (b) через $\mathfrak{P}^0_\varkappa$ и уравнений (c) через P^0_ρ, то уравнения движения всей системы (442) принимают форму

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P^0_\varkappa - P^0_\rho = 0, \tag{a}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\varkappa\rho} \mathfrak{P}^0_\varkappa + P^0_\rho = 0, \tag{b}$$

в которых для координат, не входящих в уравнения соединений, множители P^0_ρ равны нулю.

Движение, представленное через эти уравнения, то же самое, которое мы рассматривали раньше как движение отдельных систем. Одно возможное решение настоящих уравнений мы получим, следовательно, если для f_ρ и $\mathfrak{f}_\rho$ подставим их прежние значения и положим

$$P^0_\varkappa = P_\varkappa, \quad \mathfrak{P}^0_\varkappa = \mathfrak{P}_\varkappa, \tag{c}$$

и, кроме того, в (a)

$$P^0_\rho = P_\rho \tag{d}$$

и в (b)

$$P^0_\rho = -\mathfrak{P}_\rho, \tag{e}$$

Однако, так как уравнениями (a) и (b) неопределенные множители определяются однозначно, то это возможное решение есть одновременно и единственное решение. Поэтому имеют силу уравнения (d) и (e). Из них следует:

$$P_\rho = -\mathfrak{P}_\rho, \tag{f}$$

или, при использовании обозначений (467),

$$P_\rho = -P'_\rho, \quad \mathfrak{P}_\rho = -\mathfrak{P}'_\rho,$$

что и доказывает нашу теорему.

469. Замечание 1. Теорема (468) соответствует третьей аксиоме Ньютона, называемой иногда принципом реакции. Однако содержание нашей теоремы не вполне совпадает с содержанием третьего закона Ньютона, и точнее их отношение можно выразить следующим образом: третья аксиома Ньютона полностью заключает в себе нашу теорему (468). Она содержит, однако, больше. Она применима, вообще говоря, также и к силам, действующим на расстоянии, например, к силам между телами, которые не имеют общих координат. Однако наша механика не исследует подобные действия.

Чтобы, например, указать следствие из нашей теоремы о том, что планета притягивает Солнце с равной силой, как и Солнце планету, необходимо иметь более детальное знание о природе связи между обоими телами.

470. Замечание 2. Можно отметить в качестве сомнительного следующее обстоятельство: может ли более широкая область применения принципа реакции по сравнению с объемом теоремы (468) отнесена по форме и содержанию к основным законам механики и не будет ли исчерпано существенное и имеющее общее значение содержание этого принципа уже в теореме (468).

Что касается формы, то, очевидно, формулировка третьего закона, поскольку он применяется к силам, действующим на расстоянии, дана не совсем ясно. Ибо если действие и противодействие прилагаются к различным телам, то не совсем ясно, что следует понимать под противоположным направлением. Это особенно ясно видно, когда речь идет о взаимодействии между элементами тока.

Что касается содержания, то применение принципа реакции к силам, действующим на расстоянии, представляет для обычной механики, очевидно, опытный факт, точное совпадение которого во всех случаях с фактами опыта становится сомнительным.

Так, например, в электродинамике почти установлено, что взаимодействие между движущимися магнитами не всегда точно подчиняется принципу реакции.

Сложение сил

Теорема. Если данная система одновременно соединена с несколькими системами, то сила, с которой действует совокупность остальных систем на данную систему, равна сумме сил, с которыми отдельные системы действуют на данную. 471

Именно, пусть первая система массы m с координатами p_ρ, уравнения условий которой выражены k уравнениями вида

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\chi\rho} \dot{p}_\rho = 0, \tag{a}$$

будет одновременно соединена с системами 2, 3 и т. д., координаты которых $\mathfrak{p}''_\rho$, $\mathfrak{p}'''_\rho$ и т. д.

Если мы сначала рассмотрим системы 2, 3 и т. д. как отдельные системы, то уравнения соединения для каждой общей координаты p_ρ запишутся так:

$$\dot{\mathfrak{p}}''_\rho - \dot{p}_\rho = 0, \tag{b}$$

$$\dot{\mathfrak{p}}'''_\rho - \dot{p}_\rho = 0, \tag{c}$$

и т. д.

Если мы теперь будем рассматривать совокупность систем 1, 2, 3 и т. д. как свободную и если мы опять обозначим множители уравнений (a) через P_χ, (b) через P''_ρ, (c) через P'''_ρ, то получим уравнения движения первой системы в виде

$$m f_\rho + \sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho} P_\chi - P''_\rho - P'''_\rho - \ldots = 0, \tag{d}$$

где P''_ρ, P'''_ρ и т. д. точно так же, как и P_χ, есть однозначно определенные величины. Величины P''_ρ, P'''_ρ и т. д. представляют компоненты сил, с которыми отдельные системы 2, 3 и т. д., действуют на систему 1. Если мы рассмотрим, с другой стороны, системы 2, 3, ... как одну систему, то одинаковые, в соответствии с уравнениями (b), (c) и т. д., величины $\mathfrak{p}''_\rho$, $\mathfrak{p}'''_\rho$ и т. д. можно рассматривать как единую координату $\mathfrak{p}_\rho$ последней и вместо тех уравнений соединений появляется тогда для каждой общей координаты $\mathfrak{p}_\rho$ одно уравнение

$$\dot{\mathfrak{p}}_\rho - \dot{p}_\rho = 0. \tag{e}$$

Если P_ρ является коэффициентом последнего и если обозначим через $P^0_\varkappa$ коэффициенты уравнений (a), которые соответствуют теперешней системе уравнений движения, то они получают форму

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P^0_\varkappa - P_\rho = 0. \tag{f}$$

P_ρ представляет компоненту совокупной силы, с которой совокупность остальных систем 2, 3, ... действует на первую систему.

Одно возможное решение уравнений (f) мы получаем поэтому, подставляя, на основе прежних решений,

$$P^0_\varkappa = P_\varkappa, \tag{g}$$

$$P_\rho = P''_\rho + P'''_\rho + \ldots \tag{h}$$

Однако так как существует одно единственное возможное решение, то предыдущее решение (h) и будет таковым. Следовательно, уравнение (h), которое содержит наше утверждение, имеет силу необходимости.

472. С л е д с т в и е 1. Любое количество сил, которые действуют на систему или от системы исходят, можно понимать как одну единственную силу, и именно как такую силу, которая, будучи рассматриваема в качестве векторной величины, отнесенной к системе, равна сумме данных сил. Если мы представляем таким способом несколько сил, то это значит, что мы их складываем. Результат сложения мы называем также результирующей отдельных сил.

473. С л е д с т в и е 2. Каждую силу, которая действует на систему или которая от системы исходит, можно понимать в виде суммы любого числа сил, а именно, такого количества сил, сумма которых как векторных величин, отнесенных к системе, равна данной силе

Такое представление сил мы назовем разложением силы. Силы, которые возникают в результате такого разложения, мы называем компонентами первоначальной силы.

П р и м е ч а н и е. Геометрические компоненты силы вдоль ко- 474.
ординат можно одновременно понимать как компоненты ее в смысле (473).

О п р е д е л е н и е. Сила, которая исходит от отдельной мате- 475.
риальной точки или которая действует на отдельную материальную точку, называется элементарной силой.

П р и м е ч а н и е. Элементарная механика под силами обыкно- 476.
венно понимает лишь элементарные силы. В противоположность этому, рассматривавшаяся нами до сих пор обобщенная форма сил называется Лагранжевой формой сил. Элементарные силы можно соответственно называть Галлилеевыми или Ньютоновыми силами.

С л е д с т в и е 1. Каждую элементарную силу можно предста- 477.
вить через геометрическое перемещение точки, т. е. через данный по величине и направлению отрезок. Ибо каждая элементарная сила есть векторная величина, отнесенная к отдельной точке.

С л е д с т в и е 2. Сложение элементарных сил, которые прила- 478.
гаются к той же самой точке, происходит по правилам геометрического сложения и разложения отрезков.

В частности, две силы, приложенные к одной точке, складываются в одну силу, которая по величине и направлению представляется диагональю параллелограмма, стороны которого представляют по величине и направлению данные силы (параллелограмм сил).

С л е д с т в и е 3. Каждая Лагранжева сила может быть пред- 479.
ставлена как сумма элементарных сил, а также и разложена на элементарные силы. Ибо каждое перемещение системы может быть понимаемо как сумма перемещений ее отдельных точек.

С л е д с т в и е 4. Компоненты сил вдоль прямоугольных коор- 480.
динат системы, на которую действует сила или от которой сила исходит, можно понимать непосредственно как элементарные силы, которые действуют на отдельные материальные точки системы.

Движение под действием сил

481. Задача 1. Определить движение материальной системы под действием заданной силы.

Решение следует непосредственно из (457). Если P_ρ — заданные компоненты действующей силы по p_ρ, то следует использовать r уравнений движения

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = P_\rho.$$

Эти уравнения вместе с k уравнениями условий системы достаточны для однозначного определения $r+k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$.

482. Примечание 1. Уравнения движения системы, на которую действуют силы, имеют в прямоугольных координатах форму $3n$ уравнений

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} X_\iota = X_\nu,$$

если под X_ν понимаются компоненты силы по x_ν, а в остальном используются обозначения (368).

483. Примечание 2. Если координата p_ρ является свободной координатой, то соответствующие уравнения принимают простую форму:

$$mf_\rho = P_\rho.$$

Если в голономной системе все координаты p_ρ свободные, то все уравнения движения системы принимают эту простейшую форму и этих r уравнений достаточно для определения r величин $\ddot{p}_\rho$.

484. Следствие. Естественное движение системы от определенного начального момента времени является однозначно определенным при помощи положения и скорости системы в этот начальный момент, а также через задание действующих на систему сил для каждого момента времени, начиная от начального (ср. (331), (444).

Теорема. Ускорение, которое сообщается системе несколь- 485.
кими силами, действующими на систему, равно сумме ускорений, которые производятся отдельно действующими силами. Ибо уравнения движения (481) являются линейными относительно f_ρ и $P_\varkappa$.

Если, следовательно, система значений $f_{\rho 1} P_{\varkappa 1}$, $f_{\rho 2} P_{\varkappa 2}$ и т. д. есть решение уравнений движения для сил $P_{\rho 1}$, $P_{\rho 2}$ и т. д., то система значений $f_{\rho 1} + f_{\rho 2} + \ldots$, $P_{\varkappa 1} + P_{\varkappa 2} + \ldots$ есть решение для силы $P_{\rho 1} + P_{\rho 2} + \ldots$

Примечание. Содержание предыдущей теоремы можно пред- 486.
ставить также в виде утверждения, что несколько одновременно действующих сил не мешают друг другу в отношении производимых ими ускорений. Не получив особого названия, эта теорема всегда принималась и использовалась как принцип со времени Галилея.

Ускорение, сообщаемое системе результирующей силой, равно 487.
сумме ускорений, которые были бы сообщены системе компонентами силы, если бы они действовали отдельно (472, 473).

Теорема. Если сила, как векторная величина, расположена 488.
перпендикулярно к каждому возможному перемещению материальной системы, то она не оказывает влияния на движение системы, и наоборот.

Ибо если π — одна из таких сил, то ее компоненты π_ρ по p_ρ имеют вид (250)

$$\pi_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} \gamma_\varkappa.$$

Если эта сила действует на систему наряду с силой P, то уравнения движения можно записать в форме

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} (P_\varkappa - \gamma_\varkappa) = P_\rho.$$

При решении этих уравнений относительно $\ddot{p}_\rho$ и $P_\varkappa$ только $P_\varkappa$ оказываются увеличенными на $\gamma_\varkappa$; $\ddot{p}_\rho$, которые одни определяют движение, остаются неизменными.

Наоборот, если прибавление компоненты π_ρ к правой части уравнения (481) не изменяет f_ρ, но изменяет лишь $P_\varkappa$, то π_ρ можно записать в форме

$$\pi_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa.$$

Сила π расположена, следовательно, перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы (250).

489. Примечание. Предыдущая теорема выражает условие, которому подчиняется та часть силы, рассматриваемой в качестве векторной величины, которая зависит от выбора координат и, следовательно, от нашего произвола (463); ибо эта часть безусловно не должна проявляться в действительном движении.

490. Следствие. Хотя из знания силы, действующей на систему, можно сделать однозначное заключение о движении системы, однако из движения системы нельзя сделать однозначного заключения о силе, которая влияет на систему.

491. Задача. Определить силу, которую производит материальная система при заданном движении.

По (467) мы обозначим через P'_ρ компоненты искомой силы по координате p_ρ; тогда из (468) и (481) следует:

$$P'_\rho = -mf_\rho - \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa,$$

где f_ρ мы рассматриваем как заданные величины, удовлетворяющие уравнениям условий. Величины $P_\varkappa$ так же определяются, если задана некоторая система, с которой соединена рассматриваемая.

Однако поскольку известно лишь движение системы p_ρ, величины $P_\varkappa$ остаются неизвестными. Таким образом, сила, которую производит движущаяся система, не вполне определяется заданием движения системы, но содержит неопределенное слагаемое, компоненты которого имеют форму

$$\pi_\rho = \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho}\gamma_\varkappa$$

и которое, следовательно, расположено перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы.

Примечание. Хотя не все компоненты силы, действующей на систему, однозначно определяются движением системы, однако компоненты силы в направлении каждого возможного перемещения системы однозначно определяются ее движением. 492.

Следствие. Компоненты силы, производимой движущейся системой, однозначно определяются ее движением в направлении каждой свободной координаты. А именно, если p_ρ свободная координата, то исчезают $p_{\varkappa\rho}$, а следовательно, и неопределенные члены и, таким образом, компоненты силы по p_ρ могут быть записаны в формах: 493.

$$P'_\rho = -mf_\rho = \qquad (291)\ (a)$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot p_\rho}\right) = \qquad (291a)\ (b)$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\rho} - \dot q_\rho = \qquad (291b)\ (c)$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_\rho} - \dot q_\rho. \qquad (294)\ (d)$$

Внутреннее принуждение

Теорема. Ускорение системы материальных точек, между которыми не существует связей, происходит в направлении действующей на систему силы и его величина равна величине силы, деленной на массу системы. 494.

Ибо если между n точками системы не существует связей, то для каждой из $3n$ прямоугольных координат системы имеем, согласно (482),

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot x_\nu = \frac{X_\nu}{m};$$

Левая часть уравнения представляет собой компоненту ускорения системы по x_ν (275).

Следствие. Ускорение отдельной материальной точки происходит в направлении силы, действующей на точку, и его вели- 495.

чина равна величине силы, деленной на массу точки (второй закон Ньютона).

496. Примечание. Если существуют связи между точками материальной системы, на которую действует сила, то ускорение системы отклоняется от ускорения, данного теоремой (494). Как причину этого отклонения мы можем, таким образом, рассматривать связи системы, а само отклонение можно обозначать согласно (385) как внутреннее принуждение системы.

497. Задача. Определить внутреннее принуждение системы, которая движется под действием сил.

Действительные компоненты ускорения системы по обобщенным координатам p_ρ есть f_ρ. Компонента, которая имела бы место по снятии уравнений условий, будет P_ρ/m (494), разность обеих величин, т. е.

$$z_\rho = f_\rho - \frac{P_\rho}{m}, \qquad \text{(a)}$$

и представляет, следовательно, компоненту принуждения по p_ρ.

Для определения величины принуждения вообще недостаточно знания компонент последнего по p_ρ (245).

Для прямоугольных координат получаем компоненты принуждения по x_ν в виде

$$z_\nu = \frac{1}{m}(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu). \qquad \text{(b)}$$

Таким образом величина z принуждения получается как положительный корень уравнения (244):

$$mz^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{1}{m_\nu}(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\ddot{x}_\nu - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)^2. \qquad \text{(c)}$$

498. Теорема 1. Величина принуждения для материальной системы, находящейся под действием сил, как и для свободной системы в каждый момент времени меньше для естественного движения, чем для какого-нибудь другого, которое в рассматриваемый

момент времени имеет то же самое положение и скорость, что и естественное движение.

Ибо необходимыми и достаточными условиями того, чтобы при данных значениях X_ν величина $\frac{1}{2}mz^2$ была минимальной, является, как и в (155), система $3n$ уравнений:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} X_\iota = 0,$$

где X_ι обозначают i неопределенных множителей, которые вместе с $3n$ величинами $\ddot{x}_\nu$ однозначно определяются из этих $3n$ уравнений и i уравнений условий системы.

Написанные уравнения дают те же самые значения $\ddot{x}_\nu$ и X_ι как уравнения движения естественного движения (482).

Примечание. Теорема (498) содержит полный Гауссов принцип наименьшего принуждения. Мы можем поэтому теорему (388) рассматривать как частный случай теоремы (498). Однако, согласно нашей точке зрения, мы предпочитаем рассматривать теорему (388) как общую, а теорему (498) как приспособление последней к особым более сложным условиям. 499.

Теорема 2. Направление принуждения при естественном движении системы под действием силы, как и при естественном движении свободной системы, расположено перпендикулярно к каждому возможному или виртуальному перемещению системы из ее мгновенного положения. Ибо вследствие (497а) и (481) компоненты принуждения по p_ρ можно записать в форме 500.

$$z_\rho = -\frac{1}{m}\sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho} P_\chi.$$

Принуждение, как векторная величина, расположено, следовательно (250), перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы.

Символическое выражение. Если обозначить через δp_ρ изменение координаты p_ρ для какого-нибудь любого возможного 501.

перемещения системы, то можно вышеприведенную теорему записать в виде символического уравнения (ср. (393))

$$\sum_{\rho=1}^{r}\left(f_\rho-\frac{p_\rho}{m}\right)\delta p_\rho=0, \qquad \text{(a)}$$

которое при применении прямоугольных координат принимает форму

$$\sum_{\nu=1}^{3n}(m_\nu\ddot{x}_\nu-X_\nu)\,\delta x_\nu=0. \qquad \text{(b)}$$

502. Примечание. Теорема (500) содержит полностью принцип д'Аламбера. Уравнения (501a) и (501b) выражают обычную формулировку последнего. Об отношении теоремы (500) к (392) можно заметить то же самое, как и в (499).

503. Следствие 1. Компонента ускорения материальной системы в направлении каждого возможного движения равна компоненте действующей силы вдоль того же направления, деленной на массу системы. Ибо компонента принуждения в направлении каждого возможного перемещения исчезает.

504. Следствие 2. Компонента ускорения материальной системы в направлении ее действительного движения равна компоненте действующей силы вдоль того же направления, деленной на массу системы.

505. Следствие 3. Компонента ускорения материальной системы по каждой свободной координате системы равна компоненте действующей силы вдоль того же направления, деленной на массу системы.

506. Теорема. При естественном движении системы под действием сил компонента ускорения по каждой координате абсолютного положения всегда равна компоненте действующей силы по тому же направлению, деленной на массу системы, какова бы ни была внутренняя связь системы.

507. Следствие 1. Если мы выберем координаты системы в остальном произвольные, так, чтобы среди них находились шесть координат абсолютного положения, то можно при знании действующих на систему сил, но без знания внутренних связей системы, написать шесть уравнений движения системы.

Следствие 2. Если мы примем, в частности, в отношении 508.
координат абсолютного положения то же условие, как в (402), и применим теорему (506) к направлению трех координат α_1, α_2, α_3, то получим три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\ddot{x}_{3\nu}=\sum_{\nu=1}^{n} X_{3\nu},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\ddot{x}_{3\nu-1}=\sum_{\nu=1}^{n} X_{3\nu-1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\ddot{x}_{3\nu-2}=\sum_{\nu=1}^{n} X_{3\nu-2}.$$

Эти три уравнения можно интерпретировать следующим способом: центр тяжести движется так, как будто вся масса системы сосредоточилась в нем и на него действуют все элементарные силы; это — так называемый расширенный принцип центра тяжести (ср. (404)).

Следствие 3. Применительно к направлению трех координат 509.
абсолютного положения ω_1, ω_2, ω_3 теорема (506) дает еще три уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1}-x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2})=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{3\nu-2}X_{3\nu-1}-x_{3\nu-1}X_{3\nu-2}),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-2}-x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu})=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{3\nu}X_{3\nu-2}-x_{3\nu-2}X_{3\nu}),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu}-x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-1})=\sum_{\nu=1}^{n}(x_{3\nu-1}X_{3\nu}-x_{3\nu}X_{3\nu-1}).$$

Эти три уравнения выражают так называемый расширенный принцип площадей (ср. (406)).

Энергия, работа

510. Определение. Увеличение энергии системы, являющееся следствием действия на систему силы, называется работой силы.

Работу, которую сила производит в определенное время, измеряется приращением энергии системы за это время. Возможное уменьшение энергии вследствие действия сил мы рассматриваем как отрицательное приращение. Работа силы, таким образом, может быть положительной или отрицательной.

511. Следствие. В то время как действующая на систему сила производит известную работу, развиваемая системой противосила производит всегда противоположно равную работу.

Ибо последняя работа равна приращению энергии той системы, с которой соединена рассматриваемая. Следовательно, сумма энергий обеих систем является постоянной.

512. Теорема. Работа, которая производится действующей на систему силой на определенном элементе пути, равна произведению из элемента пути и компоненты силы в его направлении.

Действительно, приращение энергии dE в течение времени dt, за которое описывается элемент пути ds, будет (283)

$$dE = mv\dot{v}dt = m\dot{v}ds.$$

Однако по (280) $\dot{v}$ есть компонента ускорения системы в направлении ее пути, следовательно, по (504) $m\dot{v}$ является компонентой силы в направлении пути.

513. Примечание. Работа с равным правом равна произведению величины силы на компоненту элемента пути вдоль направления силы.

514. Примечание 2. Если в течение прохождения элемента пути ds координата p_ρ испытывает изменение dp_ρ, то работа действующей силы представится уравнением

$$dE = \sum_{\rho=1}^{r} P_\rho \delta p_\rho.$$

Ибо компонента силы в направлении элемента пути равна (247)

$$\sum_{\rho=1}^{r} P_\rho \frac{dp_\rho}{ds}.$$

Следствие 1. Сила, которая действует на систему, производит положительную или отрицательную работу, смотря по тому, будет ли угол, который она образует со скоростью системы, меньше или больше прямого угла. 515.

Если сила расположена перпендикулярно к направлению движения, то она работы не производит.

Следствие 2. Сила, которая действует на покоящуюся систему, работы не производит. 516.

Равновесие, статика

Определение. Мы скажем, что две или несколько сил, которые действуют на одну и ту же систему, находятся в равновесии, если каждая из них уничтожает действие другой, т. е. если под влиянием обеих или всех этих сил система движется так, как если бы ни одна из них не существовала. 517.

Теорема. Две или несколько сил находятся в равновесии, если их сумма расположена перпендикулярно к каждому возможному (виртуальному) перемещению системы из ее мгновенного положения, и наоборот. Теорема следует непосредственно из (471) и (488). 518.

Символическое выражение. Если мы обозначим через P'_ρ, P''_ρ и т. д. компоненты отдельных сил по p_ρ, через δp_ρ — изменения p_ρ для какого-нибудь возможного перемещения системы, то можно требование предшествующей теоремы записать в виде символического уравнения 519.

$$\sum_{\rho=1}^{r} (P'_\rho + P''_\rho + \ldots)\,\delta p_\rho = 0.$$

Ср. (393), (501).

520. Примечание. Предыдущая теорема содержит принцип виртуальных скоростей (перемещений, моментов), а уравнение (519) дает обычную аналитическую формулировку этого принципа.

521. Следствие 1. Если несколько сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма производимых силами работ исчезает при каждом возможном (виртуальном) перемещении системы из ее мгновенного положения, и наоборот (принцип виртуальной работы).

Ибо если запишем уравнение (519) в форме

$$\sum_{\rho=1}^{r} P'_\rho \delta p_\rho + \sum_{\rho=1}^{r} P''_\rho \delta p_\rho + \ldots = 0,$$

то утверждение получается по (514).

522. Следствие 2. Если две или больше сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма их компонент вдоль каждого возможного движения системы исчезает.

523. Следствие 3. Если две или больше сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма их компонент вдоль каждой свободной координаты исчезает.

524. Теорема. Если две или больше сил, приложенных к системе, находятся в равновесии, то сумма их компонент в направлении каждой координаты абсолютного положения исчезает, какой бы ни была внутренняя связь системы.

525. Примечание. Без знания внутренних связей системы мы можем все же всегда написать шесть необходимых уравнений условий для равновесия системы. Если мы выберем в качестве координат абсолютного положения шесть величин α_1, α_2, α_3, ω_1, ω_2, ω_3, которые мы ввели в (402), то из предыдущей теоремы можно вывести те шесть уравнений, которые соответствуют принципам центра тяжести и площадей и которые Лагранж рассматривает в § 1 и 2 третьего раздела первой части Mécanique Analytique.

526. Замечание 1. Если две или больше сил находятся в равновесии в определенном положении системы при определенной скорости, то они будут находиться в равновесии в том же положении системы и при какой угодно другой скорости. Ибо условие равновесия не содержит действительных скоростей системы.

Замечание 2. Если две или больше сил находятся в равновесии будучи приложены к некоторой покоящейся системе, то система и далее пребывает в состоянии покоя, и наоборот, если система пребывает в покое, несмотря на действие двух или нескольких сил, то силы эти находятся в равновесии. 527.

Следствие 1. Если две силы, одновременно приложенные к покоящейся системе, не нарушают ее покоя, то они имеют противоположно равные компоненты в направлении каждого возможного движения системы. 528.

Если две силы, последовательно прилагаемые к одной и той же покоящейся системе и действующие одновременно с одними и теми же другими силами, не изменяют состояния покоя системы, то они имеют одинаковые компоненты вдоль каждого возможного движения системы. 529.

Примечание. На последних двух следствиях базируется статическое сравнение сил. 530.

Машины и внутренние силы

Определение. Система, масса которой рассматривается малой по сравнению с массами систем, с которыми она соединена, называется машиной. 531.

Таким образом, машина в отношении ее действий на движение других систем может быть вполне определена ее уравнениями условий; знание выражения энергии машины (в ее координатах) не необходимо.

Машина называется простой, если она имеет только одну степень свободы движения.

Теорема. Пока машина движется с конечной скоростью, силы, действующие на машину, взаимно уравновешиваются. 532.

Ибо если бы эти силы дали компоненту в направлении какого-нибудь возможного движения, то компонента ускорения в этом направлении, по причине исчезающе малых масс, была бы бесконечно большой (504).

533. Следствие. Между компонентами сил, действующих на машину по ее координатам, имеется некоторое количество однородных линейных уравнений, число которых равно числу свобод движения машины.

Простая машина представляется через одно единственное однородное линейное уравнение между силами, действующими по ее координатам.

534. Замечание 1. Если машины соединены по всем своим координатам с двумя или более материальными системами, то установленная таким образом механическая связь между последними может быть представлена аналитически при помощи однородных линейных дифференциальных уравнений между координатами связанных систем.

Ибо мы можем в уравнениях условий машины заменить координаты последней одинаковыми с ними координатами связанных систем.

Наоборот, мы можем поэтому каждую совокупность однородных линейных уравнений между координатами двух или нескольких систем рассматривать физически как механическую связь заданного вида, которую мы обозначаем как соединение этих систем посредством машины.

535. Следствие. Если две или больше систем связаны машиной, то работа, произведенная каждой системой, противоположна и равна сумме работ, произведенных остальными системами.

При соединении систем посредством машины работа, таким образом, не производится. Ибо силы, произведенные системами, поддерживают равновесие машины и, следовательно, сумма работ, совершенных ими, равна нулю.

536. Замечание 2. Каждая материальная система может быть представлена как составленная разнообразными способами из двух или большего количества систем, которые соединены посредством машины.

Ибо если мы разделим массу системы на несколько частей и если p'_ρ будут координаты первой части, p''_ρ — координаты второй части и т. д., то мы можем рассматривать уравнения условий полной системы, которые содержат только p'_ρ, как уравнения условий первой частичной системы, а те уравнения, которые содержат только p''_ρ, как уравнения условий второй частичной системы, и т. д.

Уравнения же условий полной системы, которые содержат смешанно p'_ρ, p''_ρ и т. д., понимаются как уравнения машин, соединяющих частичные системы.

Силы, которые производятся машинами и действуют на соединенные ими частичные системы, при указанной выше концепции мы обозначаем как внутренние силы системы.

Следствие 1. Каждая совокупность внутренних сил может 537.
заменить часть связей системы. А именно, если мы опускаем те уравнения условий всей системы, которые изображают машины между частичными системами, и сохраняем в то же время производимые машинами силы, то системы будут двигаться, как и раньше.

Следствие 2. Совокупная связь системы может быть разло- 538.
жена и заменена некоторым числом элементарных сил, которые действуют на отдельные материальные точки системы. Ибо мы можем рассматривать отдельные точки как частичные системы, а всю систему — как совокупность этих частичных систем, соединенных посредством машин.

Следствие 3. Внутренние силы, которые полностью или 539.
частично заменяют связь системы, будучи приложимы к первоначальной системе, находятся всегда в равновесии. Ибо по (532) они находятся в равновесии у машин, которые образуют части первоначальной системы.

Примечание. Именно в результате этого последнего сообра- 540.
жения и производится в обычном изложении переход от законов равновесия (принцип виртуальных скоростей) к законам движения (принцип д'Аламбера).

Измерение сил

Развитые выше соображения приводят к трем независимым 541.
методам непосредственного измерения тех компонент сил, которые вообще оказывают действие на физические явления. В результате применения каждого из этих трех методов силы могут быть пре-

вращены из расчетных величин в объекты непосредственного опыта, т. е. в знаки определенных связей между чувственными ощущениями и восприятиями вещей.

542. В первом методе силу определяют при помощи масс и движений системы, которой эта сила производится.

Физически этот метод называется измерением силы по ее происхождению. Он применяется, например, при предположении, что одинаково напряженные пружины, одинаковое количество взрывчатого вещества и т. д. при прочих равных условиях производят равные силы.

543. Во втором методе сила определяется при помощи масс и движений системы, на которую она действует. В физике этот метод обозначается как динамическое измерение силы. Он применялся, например, Ньютоном, когда он выводил силы, действующие на планеты, из их движения.

544. В третьем методе сила определяется тем, что ее приводят в равновесие с известными силами.

Этот метод называется статическим. На нем базируются, например, все измерения силы при помощи весов.

545. Примененные для определения одной и той же силы, при соблюдении выведенных нами отношений, эти три различных метода должны при всех условиях привести к одинаковым результатам, если, впрочем, основной закон, на который опираются наши соображения, действительно правильно охватывает весь возможный механический опыт.

Раздел 5.

СИСТЕМЫ СО СКРЫТЫМИ МАССАМИ

I. ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

546. Определение 1. Циклическими координатами системы называют свободные координаты системы, когда длина бесконечно малого перемещения системы не зависит от значения координат, а зависит лишь от их изменений.

Примечание 1. Циклические координаты существуют, ибо 547.
достаточно, например, взять прямоугольную координату системы, если она является свободной. Циклические координаты всегда могут быть введены, когда возможны такие бесконечно малые перемещения системы, которые не влекут за собой изменения распределения масс в пространстве, но только лишь циклические перестановки масс между собой. Отсюда и происходит их название. Однако циклические координаты могут появляться также и в других случаях, как это показывает пример прямоугольных координат.

Примечание 2. Энергия системы не зависит от значения ее 548.
циклических координат, но лишь от скорости изменения их со временем.

Определение 1. Материальная система называется цикли- 549.
ческой системой, если ее энергия является с достаточным приближением однородной квадратичной функцией скоростей изменения ее циклических координат [31].

Циклическая система называется моноциклической, дициклической и т. д., смотря по тому, имеет ли она одну, две и т. д. циклических координат.

В циклической системе не циклические координаты называются также параметрами; скорость изменения циклической координаты называется также циклической интенсивностью.

Примечание 1. Условие, которое нужно приблизительно 550.
выполнить для циклических систем, не может быть вообще строго выполнено за исключением случая, когда система обладает лишь циклическими координатами.

Ибо если некоторая величина является координатой системы, то ее изменение выражает перемещение по крайней мере одной материальной точки системы; энергия этой точки, следовательно, будет квадратичной функцией скорости изменения этой координаты; соответственно этому и для энергии системы имеет силу то же самое положение. Поэтому энергия любой системы со строгой необходимостью содержит скорости изменения всех величин, которые вообще являются координатами системы. Таким образом, энергия циклической системы содержит также скорости изменения ее параметров.

551. Примечание 2. Это условие для существования циклической системы может быть выполнено с любой произвольной степенью приближения, поскольку система вообще обладает циклическими координатами. А именно, оно выполняется в том случае, когда части энергии, которые содержат скорости изменения параметров, исчезающе малы по сравнению с частями, которые зависят от циклических интенсивностей, и это всегда может быть достигнуто тем, что скорости изменения параметров принимаются достаточно малыми или что циклические интенсивности принимаются достаточно большими.

Насколько малыми должны приниматься первые и насколько большими вторые, чтобы была достигнута определенная ступень приближения, зависит от частных значений коэффициентов в выражении энергии. В последующем всегда предполагается, что условие циклической системы выполнено с таким большим приближением, что мы можем сказать, что оно выполнено точно.

552. Обозначение. Обозначим циклические координаты системы через $\mathfrak{p}_\rho$, их число через $\mathfrak{r}$ и импульс системы по $\mathfrak{p}_\rho$ через $\mathfrak{q}_\rho$. Обозначим далее r нециклических координат через p_ρ и количество движения вдоль них через q_ρ. Массу циклической системы обозначим $\mathfrak{m}$.

Обозначим компоненты внешних сил, которые действуют на систему по P_ρ через p_ρ, а по $\mathfrak{P}_\rho$ — через $\mathfrak{p}_\rho$. Силы, которые производит сама система, имеют тогда компоненты вдоль координат p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$, в соответствии с (467), P'_ρ и $\mathfrak{P}'_\rho$.

553. Следствие. Энергию $\mathfrak{E}$ циклической системы можно записать в формах (286):

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{m} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\rho\sigma} \dot{\mathfrak{p}}_{\rho\sigma} \dot{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2\mathfrak{m}} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{b}_{\rho\sigma} \mathfrak{q}_\rho \mathfrak{q}_\sigma,$$

в которых $\mathfrak{a}_{\rho\sigma}$ и $\mathfrak{b}_{\rho\sigma}$ — функции только p_ρ, но не $\mathfrak{p}_\rho$ (548), в остальном, однако, они имеют те же свойства и соотношения, как $a_{\rho\sigma}$ и $b_{\rho\sigma}$ ((59) и дальше).

Если мы рассматриваем $\mathfrak{E}$ как функцию p_ρ и $\dot{\mathfrak{p}}_\rho$ (как это представляется первой формой уравнения), частная производная должна быть обозначена через $\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}$; если же мы рассматриваем $\mathfrak{E}$ как функцию p_ρ и $\mathfrak{q}_\rho$ (как это представляется второй формой), то частная производная энергии обозначается нами через $\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}$ (ср. (288)).

Следствие 2. Для всех значений ρ имеют место уравнения 554.

$$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial \dot{p}_\rho} = q_\rho = 0, \qquad (289) \quad (a)$$

$$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial q_\rho} = \dot{p}_\rho = 0, \qquad (290) \quad (b)$$

$$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\rho} = 0, \qquad (c)$$

$$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\rho} = 0. \qquad (d)$$

Эти уравнения содержат характеристические признаки циклических систем и на них основаны особые свойства последних.

Уравнение (b), по существу говоря, повторяет замечание (550) о том, что существует противоречие между допущением этой формы для энергии и тем фактом, что p_ρ есть величины, изменяющиеся со временем. Мы должны понимать это уравнение, сообразно с (551), в том смысле, что если $\mathfrak{E}$ весьма приближенно имеет выбранную форму, то p_ρ должны рассматриваться как медленно изменяющиеся величины.

Силы и силовая функция

Задача 1. Определить силу P'_ρ, которую производит циклическая система по ее параметру p_ρ. На основании уравнений (493с и d) и (554а) мы получим 555.

$$P'_\rho = \frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial p_\rho} = -\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial p_\rho}, \qquad (a)$$

или, в развернутой форме

$$P'_\rho = \frac{1}{2}\mathfrak{m} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau = -\frac{1}{2\mathfrak{m}} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial \mathfrak{b}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho} \mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau. \qquad (b)$$

556. Следствие. Силы циклической системы по ее параметрам не зависят от скоростей изменения этих параметров. Предполагают, однако, что эти скорости не превышают той величины, которая позволяет рассматривать систему как циклическую.

Таким образом, в электродинамике притяжения двух магнитов не зависят от скоростей их движений, однако только до тех пор, пока эти скорости значительно меньше величины скорости света.

557. Задача 2. Определить силу $\mathfrak{P}'_\rho$, которую производит циклическая система по ее циклическим координатам $\mathfrak{p}_\rho$.

На основании уравнений (493c) и (554c) получается:

$$\mathfrak{P}'_\rho = -\dot{\mathfrak{q}}_\rho, \tag{a}$$

или в развернутом виде, вследствие (270), имеем

$$\mathfrak{q}_\rho = \mathfrak{m} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\rho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma, \tag{b}$$

$$\mathfrak{P}'_\rho = -\mathfrak{m} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\rho\sigma}\ddot{\mathfrak{p}}_\sigma - \mathfrak{m} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau. \tag{c}$$

558. Следствие. Если на циклическую систему действует внешняя сила, компоненты которой по $\mathfrak{p}_\rho$ есть $\mathfrak{P}_\rho$, то циклические количества движения изменяются согласно уравнениям

$$\dot{\mathfrak{q}}_\rho = \mathfrak{P}_\rho.$$

559. Теорема. Если на циклические координаты циклической системы силы не действуют, то все циклические количества движения системы будут постоянны во времени. Ибо если $\mathfrak{P}_\rho$ равно нулю, то из предыдущего уравнения получается интегрированием

$$\mathfrak{q}_\rho = \text{const}.$$

560. Определение. Движение циклической системы, при котором циклическое количество движения остается постоянным, называется адиабатическим движением.

Движение циклической системы, при котором циклические интенсивности ее остаются постоянными, называется изоциклическим движением.

Адиабатической или, соответственно, изоциклической называется сама циклическая система в том случае, если она принуждена выполнять только адиабатическое или изоциклическое движение.

Примечание 1. Аналитическое условие адиабатического 561.
движения состоит в том, что для всех ρ

$$\dot{\mathfrak{q}}_\rho = 0, \quad \mathfrak{q}_\rho = \text{const}.$$

Аналитическое условие изоциклического движения состоит в том, что для всех ρ

$$\ddot{\mathfrak{p}}_\rho = 0, \quad \dot{\mathfrak{p}}_\rho = \text{const}.$$

Примечание 2. Движение циклической системы есть адиа- 562.
батическое, когда на циклические координаты продолжительно не действуют силы.

Движение циклической системы есть изоциклическое, когда она соединена по циклическим координатам с другими системами, которые обладают постоянными скоростями изменения соединенных координат.

Следовательно, для того чтобы движение было изоциклическим, нужно, чтобы соответствующие силы действовали на циклические координаты.

Определение. Если силы циклической системы вдоль ее 563.
параметров можно представить как частные производные некоторой функции этих параметров и постоянных величин, соответствующих этим параметрам, то эта функция называется силовой функцией циклической системы.

Теорема. Как для адиабатического, так и для изоцикличе- 564.
ского движения существует силовая функция.

Для адиабатического движения из (555c) вытекает уравнение

$$P'_\rho = -\frac{\partial}{\partial p_\rho} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{b}_{\sigma\tau} \frac{\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau}{2\mathfrak{m}}. \tag{a}$$

В этом уравнении величины $\mathfrak{q}_\sigma\mathfrak{q}_\tau/\mathfrak{m}$ есть постоянные, $\mathfrak{b}_{\sigma\tau}$ функции только параметров. Соответственно получаем для изоциклических движения из (555b):

$$P'_\rho = \frac{\partial}{\partial p_\rho} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\sigma\tau} \frac{\mathfrak{m}}{2} \mathfrak{p}_\sigma \mathfrak{p}_\tau. \qquad \text{(b)}$$

Здесь снова величины $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\sigma\mathfrak{p}_\tau$ есть постоянные, а $\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ функции только параметров.

565. Примечание. Силовую функцию для адиабатического и изоциклического движения мы различаем соответственно как адиабатическую и изоциклическую силовую функцию.

Существуют также другие формы движений, для которых имеются силовые функции, однако последние существуют не для любого движения.

566. Добавление 1. Силовая функция адиабатической системы равна уменьшению энергии системы, вычисленному из произвольно выбранного начального состояния. Поэтому она также равна произвольной, т. е. неопределимой, константе, уменьшенной на энергию системы.

567. Добавление 2. Силовая функция изоциклической системы равна приращению энергии системы, вычисленному от произвольно выбранного состояния. Поэтому она также равна энергии системы, уменьшенной на произвольную константу [32].

Взаимные соотношения

568. Теорема 1a. Если в адиабатической системе возрастание параметра p_μ увеличивает компоненту силы по другому параметру p_λ, то и наоборот, возрастание параметра p_λ увеличивает силу по p_μ.

А именно, при бесконечно малом возрастании параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково. Ибо в адиабатической системе мы можем рассматривать p в качестве достаточных независимых элементов

определения P'_ρ, и следовательно, уравнение (564a), имеющее силу для адиабатической системы, дает

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

что и доказывает утверждаемое.

Теорема 1b. Если в изоциклической системе возрастание 569.
параметра p_μ увеличивает компоненту силы по другому параметру p_λ, то и наоборот, возрастание параметра p_λ увеличивает силу по p_μ. А именно, при бесконечно малом возрастании параметра, количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково. Ибо и в изоциклической системе мы можем рассматривать p_ρ в качестве достаточных независимых элементов определения P'_ρ, и следовательно, уравнение (564b), имеющее силу для изоциклической системы, дает

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

что и требовалось доказать.

Надо заметить, что это уравнение отличается от предыдущего по смыслу, хотя по форме оно идентично.

Примечание. Чтобы обе предыдущие теоремы получили 570.
физическое применение, достаточно, чтобы в циклической системе два параметра и силы по ним были доступны для непосредственного наблюдения.

Теорема 2a. Если в циклической системе увеличение цикли- 571.
ческого количества движения $\mathfrak{q}_\mu$ при закрепленных параметрах имеет следствием увеличение силы по параметру p_λ, то адиабатическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение циклической интенсивности $\mathfrak{p}_\mu$, и наоборот. А именно, при бесконечно-малом изменении параметра количественные отношения между причиной и действием в обоих случаях будут одинаковы. Ибо мы имеем

$$P'_\lambda = -\frac{\partial_{\mathfrak{q}} \mathfrak{E}}{\partial p_\lambda}, \qquad (555a)$$

$$\mathfrak{p}_\mu = \frac{\partial_{\mathfrak{q}} \mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_\mu}; \qquad (290)$$

следовательно,

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \mathfrak{q}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda}. \tag{a}$$

В этом уравнении теорема находит правильное выражение.

572. Следствие. Если в некоторой моноциклической системе увеличение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}$ при фиксированных параметрах имеет следствием увеличение силы по параметру p_λ, то адиабатическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}$, и наоборот. Ибо в моноциклической системе увеличение циклической интенсивности и циклического количества движения непосредственно связаны и при постоянных параметрах существуют одновременно. Именно, для моноциклической системы имеем

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}},$$

где $\mathfrak{a}$ есть существенно положительная (62) функция параметров системы.

573. Теорема 2b. Если в циклической системе увеличение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ при заданных параметрах влечет за собой увеличение силы по параметру p_λ, то изоциклическое увеличение параметра p_λ вызывает увеличение циклического количества движения $\mathfrak{q}_\mu$, и наоборот. А именно, при бесконечно малом изменении параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково. Ибо мы имеем

$$P'_\lambda = \frac{\partial_{\mathfrak{p}} \mathfrak{E}}{\partial p_\lambda}, \quad (555a) \qquad \mathfrak{q}_\mu = \frac{\partial_{\mathfrak{p}} \mathfrak{E}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}; \tag{289}$$

следовательно,

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{q}_\mu}{\partial p_\lambda}. \tag{a}$$

Это уравнение и выражает теорему.

574. Следствие. Если в моноциклической системе увеличение циклического количества движения $\mathfrak{q}$ при фиксированных параметрах вызывает увеличение силы по параметру p_λ, то изоциклическое увеличение параметра вызывает увеличение циклического количества движения $\mathfrak{q}$, и наоборот.

Основание то же самое, что и в (572).

Примечание. Предыдущие теоремы 2a и 2b имеют физиче- 575.
ское применение тогда, когда можно наряду с циклической интенсивностью определить непосредственно и соответствующее циклическое количество движения, т. е. без знания коэффициентов $\mathfrak{a}_{\rho\sigma}$. Этот случай имеет место в электростатике.

Например, разность потенциалов проводников соответствует циклической интенсивности, а количество электричества в проводниках — циклическому импульсу, и обе величины могут быть определены независимо одна от другой.

Следствие требует лишь непосредственной определимости либо циклической интенсивности, либо циклического импульса.

Теорема 3a. Если в циклической системе действующая на 576.
циклическую координату $\mathfrak{p}_\mu$ сила имеет следствием временное возрастание силы по параметру p_λ, то адиабатическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение циклической интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$, и наоборот. А именно, при бесконечно малом изменении параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях будет одинаковым.

Ибо если мы представим себе, что в левой части уравнения (571a) изменения $\partial P'_\lambda$ и $\partial \mathfrak{q}_\mu$ возникли за время dt, и если мы разделим величины в числителе и в знаменателе на это время dt и примем во внимание (558), рассматривая изменение $\partial \mathfrak{q}_\mu$ как действие силы $\mathfrak{P}_\mu$, то получим

$$\frac{\dot{P}'_\lambda}{\mathfrak{P}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda}.$$

Это уравнение и выражает теорему.

Теорема 3. Если в циклической системе увеличение цикли- 577
ческой интенсивности $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ при фиксированных параметрах имеет следствием увеличение силы по параметру p_λ, то изоциклическое увеличение параметра p_λ вызывает уменьшение силы системы по циклической координате $\mathfrak{p}_\mu$, и наоборот.

А именно, при бесконечно малом изменении параметра количественное отношение между причиной и действием в обоих случаях одинаково.

Ибо если мы представляем в правой части уравнения (573a) изменения $\partial\mathfrak{q}_\mu$ и ∂p_λ возникшими за время dt, то можем написать:

$$\partial\mathfrak{q}_\mu = \frac{d}{dt}\,\partial\mathfrak{q}_\mu \cdot dt = \partial\dot{\mathfrak{q}}_\mu dt = -\partial\mathfrak{p}'_\mu dt, \tag{557a}$$

$$\partial p_\lambda = \frac{d}{dt}\,\partial p_\lambda dt = \partial\dot{p}_\lambda dt.$$

Следовательно, это уравнение получает вид

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial\mathfrak{p}_\mu} = -\frac{\partial\mathfrak{P}_\mu}{\partial\dot{p}_\lambda},$$

что и выражает нашу теорему.

578. Примечание. Теоремы 3a и 3b имеют физическое применение тогда, когда наряду с циклической интенсивностью доступна непосредственному наблюдению также соответствующая циклическая компонента силы.

Этот случай имеет место, например, в электродинамике, в которой теоремы 3a и 3b получают особую ясность и наглядность.

Энергия и работа

579. Теорема 1. При изоциклических движениях циклической системы работа, которую она воспринимает через соединение своих циклических координат, равняется удвоенной работе, которую она отдает через связи своих параметров. При изоциклическом движении $\dot{\mathfrak{p}}_\rho$ для всех ρ равны нулю.

Следовательно, по (514) и (557) работа, которую производят в единицу времени действующие на циклические координаты внешние силы, равна

$$-\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{P}'_\rho \mathfrak{p}_\rho = \mathfrak{m} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial\mathfrak{a}_{\rho\sigma}}{\partial p_\tau}\,\mathfrak{p}_\sigma \dot{p}_\tau \mathfrak{p}_\rho.$$

Однако отнесенная к единице времени работа, которую производит система своими силами по параметрам, находится при помощи (555) равной

$$\sum_{\rho=1}^{r} P'_\rho \dot{p}_\rho = \frac{1}{2}\,\mathfrak{m} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial\mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\,\mathfrak{p}_\sigma \mathfrak{p}_\tau \dot{p}_\rho.$$

Суммы обоих уравнений тождественны с точностью до обозначений, и члены первого уравнения поэтому в два раза больше, чем члены последнего.

Следствие. Если изоциклическая система производит работу 580. при помощи сил по своим параметрам, то энергия системы возрастает как раз на величину произведенной работы.

Если изоциклическая система воспринимает работу при помощи сил по ее параметрам, то энергия системы при этом уменьшается как раз на величину воспринятой работы.

Ибо приращение энергии системы равно разности работы, воспринимаемой через циклические координаты и отдаваемой через параметры.

Примечание. Если адиабатическая система совершает работу 581. при помощи сил, отнесенных к ее параметрам, то при этом энергия системы уменьшается как раз на величину совершенной работы.

Если адиабатическая система воспринимает работу при помощи сил, отнесенных к ее параметрам, то при этом энергия системы возрастает как раз на величину воспринятой работы. Ибо в адиабатической системе через циклические координаты работа не воспринимается (562).

Теорема 2. При адиабатическом перемещении циклической 582. системы циклические интенсивности всегда претерпевают изменения в том смысле, что силы по параметрам, вызванные этими изменениями, совершают отрицательную работу.

Пусть при перемещении координаты p_ρ претерпевают изменение δp, а интенсивности $\mathfrak{p}_\rho$ претерпевают изменения $\delta\mathfrak{p}_\rho$. Если бы имели место только последние изменения, то силы P'_ρ изменились бы на значение (555b):

$$\delta P'_\rho = \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\mathfrak{p}_\sigma\delta\mathfrak{p}_\tau$$

и именно эти $\delta P'_\rho$ являются теми силами, которые в нашей теореме обозначены как возникшие вследствие действия $\delta\mathfrak{p}_\tau$.

Производимая ими работа равна

$$\sum_{\rho=1}^{r}\delta P'_\rho\delta p_\rho = \mathfrak{m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}}\frac{\partial\mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\rho}\mathfrak{p}_\sigma\delta\mathfrak{p}_\tau\delta p_\rho = \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\tau=1}^{\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\mathfrak{p}_\sigma\delta\mathfrak{p}_\tau.$$

Теперь надо доказать, что эта работа необходимо является отрицательной.

Для адиабатического движения имеем

$$\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{m}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\mathfrak{p}_\sigma = \text{const},$$

следовательно,

$$\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\mathfrak{p}_\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\delta\mathfrak{p}_\sigma.$$

Если мы образуем эти уравнения для всех τ и умножим их соответственно на $\mathfrak{m}\delta\mathfrak{p}_\tau$ и сложим, то получим в левой части предыдущее выражение для рассматриваемой работы, а в правой — необходимо отрицательную величину (62), что и требовалось доказать.

583. Следствие. При адиабатическом перемещении циклической системы циклические интенсивности претерпевают всегда изменения в том смысле, что вызываемые этими изменениями силы стремятся затормозить образующееся движение. Фактически это только другая форма выражения предыдущей теоремы. Она соответствует в электродинамике формулировке закона Ленца.

584. Замечание. При каждом бесконечно малом движении моноциклической системы работа, воспринятая через циклические координаты, относится к энергии системы, как относится удвоенное приращение циклического количества движения к самому количеству движения. Ибо работа $d\mathfrak{Q}$, воспринятая в течение времени dt через циклическую координату $\mathfrak{p}$, равна

$$d\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\dot{\mathfrak{p}}dt = \dot{\mathfrak{p}}d\mathfrak{q}.$$

Энергию $\mathfrak{E}$ же системы можно записать так:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{p}}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}} = 2\frac{d\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. При любом движении моноциклической системы выражение 585.

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

есть полный дифференциал некоторой функции параметров и циклической интенсивности системы, и именно функции

$$2\log\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_0},$$

где $\mathfrak{q}_0$ означает циклическое количество движения в произвольно выбранном начальном положении. Эта функция называется также энтропией моноциклической системы.

Следствие 2. Значение интеграла, образованного для любого 586.
конечного движения моноциклической системы,

$$\int\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

зависит только от состояния системы в начальном и конечном положении движения, но не от состояний в промежуточных положениях. Значение этого интеграла становится равным нулю для каждого движения, которое приводит систему к ее начальному состоянию. Ибо значение этого интеграла равно разности энтропий в начальном и конечном состоянии движения.

587. Следствие 3. При адиабатическом движении моноцикличе-ской системы энтропия остается постоянной. Ибо для адиабати-ческого движения $\mathfrak{P}$, а также $d\mathfrak{Q}$ равны нулю. Адиабатическое движение моноциклической системы называется поэтому также изэнтропическим.

Временной интеграл энергии

588. Замечание 1. Если при адиабатическом движении цикли-ческой системы циклические координаты $\mathfrak{p}_\rho$ изменяются в извест-ное конечное время на значение $\bar{\mathfrak{p}}_\rho$, то временной интеграл энер-гии системы за этот промежуток времени равняется

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\rho \bar{\mathfrak{p}}_\rho,$$

ибо энергия системы может быть записана в форме (286)

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\rho \dot{\mathfrak{p}}_\rho.$$

Здесь для адиабатического движения $\mathfrak{q}_\rho$ являются постоян-ными.

589. Замечание 2. Вариация временного интеграла энергии адиа-батической системы при измененном движении системы зависит, во-первых, от вариации параметров в течение всего времени, за которое берется интеграл, и, во-вторых, от постоянных во вре-мени вариаций, которые испытывают постоянные во времени цик-лические количества движения.

590. Обозначения. Примем следующие обозначения: δ — вариа-ция, при которой циклические количества движения подвергаются произвольным изменениям; $\delta_{\mathfrak{q}}$ — вариация, при которой цикличе-ские количества движения не варьируются; наконец, $\delta_{\mathfrak{p}}$ — вариа-ция, при которой циклические количества движения имеют такую вариацию, что начальное и конечное значение циклических коор-динат остаются неизменными.

Следствие. Из обозначений следует для всех ρ 591.

$$\delta_{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}_\rho = 0, \quad \delta_{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho = 0.$$

Таким образом по (588) для произвольных вариаций парамет-ров получим

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\rho \delta_{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho, \tag{a}$$

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int \mathfrak{E}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}_\rho. \tag{b}$$

Примечание. В адиабатической системе всегда возможно, 592. и, вообще говоря, только одним способом, сообщить циклическим количествам движения при любой вариации параметров такие вариации, чтобы начальное и конечное значения циклических координат оставались постоянными. Ибо из общего соотношения

$$\dot{\mathfrak{p}}_\rho = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\mathfrak{q}_\sigma$$

следует для адиабатической системы, в которой $\mathfrak{p}_\rho$ изменяется от значения $\mathfrak{p}_{\rho 0}$ до значения $\mathfrak{p}_{\rho 1}$:

$$\mathfrak{p}_{\rho 1} - \mathfrak{p}_{\rho 0} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\,dt.$$

Следовательно, при любой вариации параметров и циклических количеств движения

$$\delta\mathfrak{p}_{\rho 1} - \delta\mathfrak{p}_{\rho 0} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{q}_\sigma \delta\int_0^1 \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\,dt + \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}} \delta\mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\rho\sigma}\,dt.$$

Эти уравнения образуют $\mathfrak{r}$ неоднородных линейных уравнений для $\mathfrak{r}$ величин $\delta\mathfrak{q}_\sigma$, которые, следовательно, всегда допускают одно и только одно решение, в частности и тогда, когда расположенные в левой части вариации исчезают.

Вариации, которые мы обозначаем через $\delta_{\mathfrak{p}}$, следовательно, всегда возможны при любой вариации параметров.

593. Теорема. При равных, в остальном произвольных, вариациях параметров в течение известного времени вариации временного интеграла энергии в адиабатической системе противоположны и равны, если один раз оставляют неизменными циклические количества движения системы, а другой раз их варьируют таким образом, что начальные и конечные значения циклических координат остаются неизменными.

Ибо для произвольной вариации имеем

$$\delta\int\mathfrak{E}dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}dt+\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\int\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial\mathfrak{q}_\rho}\,\delta\mathfrak{q}_\rho dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}dt+\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho\delta\mathfrak{q}_\rho.$$

В частности, для вариации, при которой начальные и конечные значения $\mathfrak{p}_\rho$ остаются неизменными,

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int\mathfrak{E}dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}dt+\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{p}}_\rho\delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_\rho.$$

Если вычтем удвоенное уравнение (591b), то получим

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}dt=-\delta_{\mathfrak{p}}\int\mathfrak{E}dt,$$

что и требовалось доказать.

Это положение родственно положениям (96) и (293).

II. СКРЫТЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Объяснения и определения

594. 1. Мы говорим, что система содержит скрытые массы, если при помощи доступных наблюдению координат системы определяются положения не всех масс системы, а лишь части их.

595. 2. Те массы, положения которых при полном задании наблюдаемых координат системы остаются неизвестными, называются

скрытыми массами, их движения — скрытыми движениями, а их координаты — скрытыми координатами.

В противоположность этому, остальные массы системы называются видимыми массами, их движения — видимыми движениями, а их координаты — видимыми координатами.

3. Задача, которую механика должна решить в отношении системы со скрытыми массами, состоит в следующем: определить движения видимых масс системы, а также изменения видимых координат системы, несмотря на отсутствие знания положения скрытых масс. 596.

4. Система, которая содержит скрытые массы, отличается от системы без скрытых масс только в отношении нашего знания системы. 597.

Все предыдущие положения нашей механики остаются поэтому применимыми к системам и со скрытыми движениями, если под массами, координатами и т. д. мы будем понимать совокупные массы, координаты и т. д.

Изменение этих положений становится необходимым только тогда, когда мы ограничиваем наши исследования лишь видимыми величинами.

Поставленная задача может поэтому быть сформулирована еще и так: какие изменения должны претерпеть изложенные положения нашей механики, если под массами, координатами и т. д. понимать лишь видимые массы, координаты и т. д.

Ясно, что задача, поставленная в той или другой форме, неразрешима без определенных данных о влиянии, которое оказывают скрытые массы на движение видимых масс. Однако получить такие данные возможно. Ведомая система, или система, подверженная действию сил, уже может рассматриваться как система со скрытыми массами, так как неизвестные массы ведомой системы, или системы, подвергающейся действию, рассматривают как скрытые. 598.

Однако вообще в этих случаях возможно физически различить массы ведомой или производящей силы системы, и тогда понимание их именно как скрытых будет зависеть от нас.

Между тем, теперь мы рассматриваем и такие случаи, в которых познание скрытых масс на самом деле невозможно ни при каком физическом наблюдении.

599. 6. Повторяющиеся движения, т. е. циклические движения, являются часто скрытыми движениями, так как они не вызывают изменения в распределении масс, т. е. в картине мира.

Таким образом, движение однородной жидкости в замкнутом сосуде является для наблюдения скрытым; оно делается видимым только тогда, когда от него отнимается свойство строго циклического движения введением в жидкость пыли или другим аналогичным способом.

Наоборот, скрытые движения почти всегда являются циклическими движениями. Неповторяющиеся движения влекут за собой всегда рано или поздно более или менее значительные изменения в распределении массы, т. е. в картине мира, и становятся в результате этого видимыми.

600. 7. Циклические движения также не могут долго оставаться скрытыми, поскольку мы получаем возможность оказывать влияние на отдельные циклические координаты и произвольно изменять циклические интенсивности. Многообразие нашего влияния на систему в этом случае столь же велико, как и действительное многообразие системы, и мы можем делать заключение в отношении одних, базируясь на других. Дело обстоит иначе, если свободное непосредственное действие на циклические координаты продолжительно исключено. Это может иметь место в адиабатических циклических системах (560), и поэтому в них мы должны главным образом искать движения, продолжительное время скрытые для нашего наблюдения. Такими случаями, прежде всего, мы и ограничиваем рассмотрение скрытого движения.

Наш метод исследования приводит к тому, что мы и в этих случаях рассматриваем скрытые движения так, как если бы они были видимыми, и затем дополнительно исследуем, какие из наших утверждений остаются по-прежнему применимыми, несмотря на предположение существования скрытых масс.

Консервативные системы

Определение 1. Материальная система, которая не содержит никаких других скрытых масс, кроме тех, которые образуют адиабатическую циклическую систему, называется консервативной системой. 601.

Это наименование возникло благодаря одному свойству таких систем, которое выявится позднее. Оно достаточно оправдывается уже потому, что примыкает к существующему способу выражения механики.

Примечание. Каждая консервативная система может рассматриваться как состоящая из двух частичных систем, из которых одна содержит лишь видимые, а другая лишь скрытые массы совокупной системы. Координаты частичной видимой системы, т. е. видимые координаты полной системы, являются одновременно параметрами скрытой частичной системы. Обозначим массу видимой частичной системы m, ее координаты p_ρ и количество движения по p_ρ через q_ρ. Массы скрытой частичной системы обозначим $\mathfrak{m}$, ее координаты через $\mathfrak{p}_\rho$ и количества движения через $\mathfrak{q}_\rho$. 602.

Определение 2. Под силовой функцией консервативной системы мы понимаем силовую функцию ее скрытой частичной системы (563). Следовательно, силовая функция консервативной системы вообще задана как функция видимых координат и постоянных величин, без того чтобы была явно определена связь этих постоянных величин с количеством движения частичной циклической системы. При этом на вид этой функции в нашем анализе не налагается никаких ограничений. Обозначим силовую функцию системы через U. 603.

Замечание. Следовательно, движение видимых масс консервативной системы вполне определяется, если силовая функция ее задана как функция ее видимых координат, и это задание делает ненужными какие бы то ни было сведения о скрытых массах системы. Ибо из заданной формы силовой функции вытекают полностью силы, которые производит скрытая частичная система 604.

на видимую, и эти силы вполне представляют влияние первой на последнюю ((457) и дальше).

605. Определение 2. Та часть энергии, которая вызвана движением видимых масс консервативной системы, называется кинетической энергией полной системы.

Наоборот, энергия скрытых масс называется потенциальной энергией всей системы.

Кинетическая энергия обозначается так же, как живая сила, которая по более старому способу выражения обозначала удвоенную кинетическую энергию.

606. Обозначения. Обозначим кинетическую энергию через T. T является соответственно этому однородной квадратичной функцией p_ρ, и с равным правом q_ρ; коэффициенты этой функции суть функции p_ρ; через $\partial_p T$ обозначим частную производную T, если p_ρ и $\dot{p}_\rho$ рассматривать как независимые друг от друга переменные; при помощи $\partial_q T$ обозначаем частную производную только тогда, когда p_ρ и q_ρ мы рассматриваем как независимые друг от друга переменные.

Энергию скрытой циклической частичной системы, т. е. потенциальную энергию полной системы, обозначим, принимая во внимание уже принятые обозначения (553), через $\mathfrak{E}$.

607. Примечание. Кинетическая и потенциальная энергии консервативной системы различаются не их природой, а лишь нашей точкой зрения или ограниченностью нашего знания о массах системы.

Та энергия, которая при известном состоянии нашего понимания и знания обозначается как потенциальная, при изменении нашего понимания и знания может оказаться кинетической.

608. Следствие 1. Энергия консервативной системы равна сумме ее кинетической и потенциальной энергий.

Мы обозначим совокупную энергию консервативной системы через E, и имеем тогда

$$E = T + \mathfrak{E}$$

Следствие 2. В свободной консервативной системе сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная во времени; кинетическая энергия возрастает только за счет потенциальной, и наоборот (340). 609.

Следствие 3. В свободной консервативной системе разность между кинетической энергией и силовой функцией постоянна во времени. Кинетическая энергия и силовая функция увеличиваются и уменьшаются одновременно и притом на равные величины (566). 610.

Следствие 4. Разность между кинетической энергией и силовой функцией консервативной системы мы называем математической или аналитической энергией системы. 611.

Мы обозначим математическую энергию через h. Она отличается от энергии системы только на постоянную, независимую от времени и положения системы, но вообще говоря, неизвестную.

Для математического применения она может вполне заменить энергию, однако она лишена физического смысла, которым обладает энергия.

Примечание. Выше данные определения можно выразить при помощи уравнения 612.

$$T - U = h \tag{a}$$

или, при другом написании,

$$U + h = T. \tag{b}$$

Если консервативная система — свободная, то в этом уравнении величина h является не зависящей от времени постоянной, и в этом случае уравнение обозначается как уравнение энергии для консервативной системы.

Из (b) и (608) можно произвести еще следующую связь:

$$U + h = E - \mathfrak{E}.$$

Определение 5. Временной интеграл кинетической энергии системы, взятый между двумя определенными моментами времени как пределами интегрирования называется действием или расхо- 613.

дом силы в течение данного промежутка времени. Действие при движении консервативной системы в течение заданного времени выражается интегралом

$$\int T dt,$$

взятым между начальным и конечным значениями данного промежутка времени.

614. Примечание. Если обозначим через ds элемент пути видимой частичной системы, v — скорость последней на ее пути, то действие можно также представить в форме интеграла

$$\frac{1}{2} m \int v ds,$$

взятого между положениями, в которых система находится в начале и конце рассматриваемого промежутка времени.

615. Примечание. Термин «действие» для интеграла, о котором идет речь, часто осуждался как неподходящий.

Однако непонятно, почему предложенный Якоби [33] термин «расход силы» был бы лучше, или какое имеет преимущество перед этими терминами первоначально выбранное Мопертюи [34] выражение «action». Все эти названия вызывают представление, не имеющее ничего общего с названным предметом.

Так же трудно понять, каким образом суммирование энергии, существовавшей в различные времена, могло бы дать нечто другое, кроме вычислительной величины, и поэтому не только трудно, но и невозможно найти для рассматриваемого интеграла подходящее обозначение в простом смысле.

Также и другие термины и обозначения, вводимые в этом разделе, оправданы внутренней целесообразностью в меньшей степени, чем небходимостью примкнуть возможно ближе к существующему способу выражения механики.

Дифференциальные уравнения движения

616. Задача. Найти дифференциальные уравнения движения консервативной системы.

Решение задачи состоит лишь в задании уравнений движения видимой частичной системы. Пусть масса этой частичной системы будет m, ее координаты p_ρ и пусть k уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\chi\rho} dp_\rho = 0 \qquad \text{(a)}$$

будут ее уравнениями условий. Так как p_ρ одновременно есть параметры скрытой частичной системы, то компоненты сил, которые эта последняя производит на видимую частичную систему, равны $\partial U/\partial p_\rho$ (563). Если на видимую частичную систему действуют через связи с другими видимыми системами еще другие силы, то компоненты их пусть будут P_ρ. Тогда, по (481), уравнения движения системы есть

$$mf_\rho + \sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho} P_\chi = \frac{\partial U}{\partial p_\rho} + P_\rho \qquad \text{(b)}$$

и эти r уравнений вместе с k уравнениями (a) достаточны для определения $r+k$ величин $\ddot{p}_\rho$ и P_χ.

Примечание 1. Если консервативная система свободная, 617.
т. е. если на нее не действуют внешние силы, то P_ρ равны нулю, и уравнения движения получают форму

$$mf_\rho + \sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho} P_\chi = \frac{\partial U}{\partial p_\rho}.$$

Примечание 2. Если, в частности, координата p_ρ является 618.
свободной координатой видимой частичной системы, то уравнения движения, которые принадлежат индексу ρ, принимают вид

$$mf_\rho = \frac{\partial U}{\partial p_\rho},$$

так как в этом случае все $p_{\chi\rho}$ исчезают.

Примечание 3. Подставляя в уравнения от (616) до (618) 619.
для ускорений по p_ρ их различные выражения по (291), мы получаем для этих уравнений ряд различных форм, соответствующих

тем формам, которые были получены для вполне известной системы в (368) и дальше.

620. Следствие 1. Если в голономной консервативной системе все p_ρ являются свободными координатами и если положим для краткости

$$T + U = L,$$

то уравнения движения системы можно представить в форме $2r$ уравнений:

$$q_\rho = \frac{\partial_p L}{\partial \dot{p}_\rho}, \tag{a}$$

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial_p L}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

которые могут быть понимаемы как дифференциальные уравнения первого порядка для $2r$ величин p_ρ и q_ρ и которые вместе с определенными начальными значениями однозначно определяют изменение этих величин.

Ибо если мы подставим значение L, развернем частные производные и примем во внимание, что U не содержит $\dot{p}_\rho$, что, следовательно,

$$\frac{\partial_p U}{\partial \dot{p}_\rho} = 0, \qquad \frac{\partial_p U}{\partial p_\rho} = \frac{\partial U}{\partial p_\rho},$$

то мы увидим, что уравнения (a) совпадают с вытекающим из определения соотношением между q_ρ и $\dot{p}_\rho$, а уравнения (b) — с уравнениями движения в форме (618) ((289) и (291)).

621. Примечание. Функция L, при помощи которой дифференциальные уравнения движения принимают простую форму уравнений (620a и b), мы называли до сих пор Лагранжевой функцией системы.

Следовательно эта функция существует только для голономной системы и в этом случае она равна разности кинетической и потенциальной энергий, если не принимать во внимание остающуюся произвольную константу.

Следствие. Если в голономной консервативной системе p_ρ являются свободными координатами и если положим для краткости 622.

$$T - U = H,$$

то уравнения движения системы можно представить в форме $2r$ уравнений

$$\dot{p}_\rho = \frac{\partial_q H}{\partial q_\rho}, \tag{a}$$

$$\dot{q}_\rho = -\frac{\partial_q H}{\partial p_\rho}, \tag{b}$$

которые могут быть рассматриваемы как дифференциальные уравнения первого порядка для $2r$ величин p_ρ и q_ρ и которые вместе с начальными значениями однозначно определяют изменение этих величин.

Ибо если мы подставим значение H и заметим, что U не содержит q_ρ, т. е., что

$$\frac{\partial_q U}{\partial q_\rho} = 0, \qquad \frac{\partial_q U}{\partial p_\rho} = \frac{\partial U}{\partial p_\rho},$$

то увидим, что уравнения (a) представляют вытекающие из определения соотношения между q_ρ и $\dot{p}_\rho$, в то время как уравнения (b) совпадают с уравнениями движения (618) системы, введенными из опыта (290), (294).

Примечание. Функция H, при помощи которой обычные дифференциальные уравнения движения принимают простой вид уравнений (622a и b), называется Гамильтоновой функцией системы. 623.

Эта функция имеет место, следовательно, лишь для голономных систем, и для таковых она равна сумме кинетической и потенциальной энергии, причем не принимается во внимание остающаяся произвольная константа; следовательно она равна совокупной энергии системы, не рассматривая произвольной постоянной.

Вообще для системы с любым, не обязательно циклическим скрытым движением допустимо определить Гамильтонову функцию при помощи уравнений (622a и b), именно как функцию видимых p_ρ и q_ρ, в результате использования которых (предполагая, что функция существует) уравнения движения принимают именно эту простую форму.

При таком более общем определении Гамильтонова функция не всегда равна сумме кинетической и потенциальной энергии.

624. Замечание. Из уравнений (620) и (622) можно для системы со скрытыми циклами получить взаимные свойства движения последних, которые мы имели для вполне известных систем в (378) и (281). Однако этот новый вывод не требуется, так как в сущности этих соотношений уже заключено, что каждое из них имеет силу независимо от того, являются ли встречающиеся в них координаты, моменты и т. д. видимыми или скрытыми координатами, моментами и т. д.

Интегральные предложения для голономной системы

625. Замечание 1. Интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

при переходе свободной голономной системы со скрытыми адиабатическими циклами между двумя достаточно близкими положениями 0 и 1 будет меньше для естественного движения системы, чем для любого возможного движения, которое в равное время переводит как видимые, так и скрытые координаты от начальных значений к конечным.

Ибо, так как $T - U$ равно энергии системы, увеличенной на одинаковую для всех возможных движений постоянную (611), то это замечание есть не что иное, как приспособление теоремы (358) к рассматриваемым условиям.

626. Примечание 1. Если отбросить ограничения на достаточную близость концевых положений, то можно лишь утверждать, что вариация интеграла исчезает при переходе к какому-нибудь другому сравниваемому движению. При использовании обозначе-

ний (590) наше утверждение может быть выражено в следующей форме

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0.$$

т. е. вариация выполняется при переходе от естественного движения к любому возможному, в то время как вариация начального и конечного моментов времени, а также начального и конечного значения видимых координат исчезает (ср. (359)).

Примечание 2. Замечание 1 однозначно отличает естествен- 627.
ное движение от любого возможного движения, и оно может поэтому служить для того, чтобы определить естественное движение, поскольку возможно фактически образовать вариацию требуемую замечанием 1.

Если, однако, как мы предположили, циклические координаты скрытые, то образование вариации $\delta_{\mathfrak{p}}$ невозможно, и хотя теорема не теряет своей правильности, но теряет свою применимость.

Теорема 1. Интеграл 628.

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

при переходе свободной голономной системы со скрытыми адиабатическими циклами между двумя достаточно близкими положениями всех видимых масс будет меньше для естественного движения, чем для любого возможного движения, которое за то же время и с теми же самыми импульсами скрытых циклических движений, переводит видимые координаты из заданного начального значения к заданному конечному значению.

Мы проведем доказательство, основываясь на замечании (625). Именно, мы сопоставляем, насколько это возможно по (592), с каждым из движений, изменяющихся согласно теореме, второе движение, при котором видимые координаты претерпевают то же самое изменение, а циклические количества движения изменяются так, что начальные и конечные значения циклических координат остаются первоначальными. Вариацию при переходе к движению первого типа мы должны обозначить, согласно (590), через $\delta_{\mathfrak{q}}$, а вариацию при переходе к соответствующему движению второго типа через $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Теперь мы имеем, во-первых, так как T зависит от видимых координат,

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int T dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int T dt. \tag{a}$$

Во-вторых, так как промежуток времени движения не варьируется и $-U$ отличается от энергии циклического движения (566) лишь на постоянную величину, то из (593) следует:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int U dt = -\delta_{\mathfrak{p}}\int U dt. \tag{b}$$

В результате сложения (a) и (b) получается

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int (T+U)\, dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int (T-U)\, dt. \tag{c}$$

Вариация в правой части (c) имеет всегда (626), (625), для естественного движения значение, равное нулю, и отрицательное значение для достаточно близких концевых положений, следовательно, также и вариация левой части (c).

Интеграл в левой части сам имеет, следовательно, для естественного движения и достаточно близких концевых положений минимальное значение, что и требовалось доказать.

629. Примечание 1. Если ограничение в отношении достаточно близких положений отбросить, то можно лишь утверждать, что вариация интеграла исчезает.

Аналитическое выражение этого положения, в противоположность (626), выражается нами так

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int_{t_0}^{t_1} (T+U) dt = 0.$$

630. Примечание 2. Выраженное в этой теореме свойство естественного движения однозначно отличает его от каждого другого возможного движения.

Вариация $\delta_{\mathfrak{q}}$ может быть образована, хотя циклические движения рассматриваются как скрытые, ибо их образование требует лишь, чтобы постоянные, встречающиеся в силовой функции, оставались неизменными. Поэтому теорема может применяться для определения естественного движения консервативной системы; ее значение, однако, строго ограничено голономными системами.

Примечание 3. Предыдущая теорема, изложенная в смысле примечания 2, называется принципом Гамильтона. Ее физическое значение, в соответствии с нашей точкой зрения, не может быть иным, чем значение теоремы (358), из которой мы вывели этот принцип. 631.

Сам принцип представляет собой преобразование, которому мы должны подвергнуть (358), чтобы оно, несмотря на наше незнание деталей циклического движения, оставалось применимым для определения движения видимой системы.

Замечание 2. Если мы обозначим через ds элемент пути видимых масс свободной голономной системы, которая содержит скрытые адиабатические циклы, то интеграл 632.

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}$$

при переходе между достаточно близкими положениями 0 и 1 будет меньше для естественных путей системы, чем для любого возможного пути, который переводит значения как видимых, так и циклических координат из заданного начального значения к заданному конечному значению.

Величина h должна при этом рассматриваться как изменяющаяся при переходе от одного естественного движения к другому постоянная, имеющая, однако, одинаковое значение для всех возможных путей, сравниваемых с данным естественным путем.

Ибо, введя время как вспомогательную величину и сделав при этом произвольное, однако, допустимое предположение, что система пробегает рассматриваемый путь с постоянной скоростью, и именно с такой скоростью, что константа h имеет значение аналитической энергии, найдем

$$T = U + h = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2}. \qquad \text{(a)}$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл равен

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} dt.$$

Следовательно, он равен, с точностью до множителя, промежутку времени перехода. Этот последний, являясь в соответствии с (352) следствием (347), имеет минимум для данного значения энергии, т. е. постоянной h. Наше замечание, следовательно, есть содержание теоремы (352), выраженной при помощи введенных обозначений.

633. Примечание 1. Если отбросим ограничение в отношении достаточной близости положений, то можно утверждать только об исчезновении вариации (353).

В нашем обозначении это можно представить в виде

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U + h}} = 0.$$

634. Примечание 2. При помощи свойств, рассмотренных в замечании 2, естественные пути, которые соответствуют различным значениям постоянной h, однозначно отличаются от любого возможного пути, и теорема может служить поэтому для определения естественных путей системы, если можно образовать вариации $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Если, однако, как мы предполагали, детали циклического движения скрыты, то это образование невозможно, и хотя замечание не теряет своей справедливости, однако теряет свою применимость для практических целей.

Теорема 2. При переходе свободной голономной системы, 635.
которая содержит скрытые адиабатические циклы, между двумя достаточно близкими положениями 0 и 1 видимых масс, интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{U + h}\, ds$$

будет меньше для естественных путей, чем для каких-либо других возможных путей, которые переводят с теми же значениями скрытых циклических количеств движения и постоянных h видимые координаты из заданных начальных значений в заданные конечные значения.

Мы снова приводим доказательство теоремы, относя его к замечанию (632). Пользуясь временем как вспомогательной величиной, делаем произвольное, однако допустимое предположение, что система проходит рассматриваемые пути с постоянной скоростью и притом такой, что постоянная h приобретает значение, равное математической энергии.

Тогда интеграл, о котором говорит теорема, можно записать в форме

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} (U + h)\, dt.$$

Далее мы снова сопоставляем, как это допустимо в соответствии с (592), каждому движению, изменяющемуся согласно условиям теоремы, второе, при котором видимые координаты претерпевают те же самые вариации, постоянная h, а также энергия E сохраняют свое значение, а циклическое количество движения варьируется и притом так, что начальные и конечные значения циклических координат остаются первоначальными. Вариацию в том виде, в котором она соответствует условиям теоремы, мы обозначаем снова через $\delta_{\mathfrak{q}}$, а вариацию, соответствующую второму движению, через $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Для произвольных вариаций $\delta \mathfrak{q}_\rho$ циклических количеств движения $\mathfrak{q}_\rho$ (566)

$$\delta \int (U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt + \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \int \frac{\partial (U+h)}{\partial \mathfrak{q}_\rho}\,\delta \mathfrak{q}_\rho dt =$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \delta \mathfrak{q}_\rho,$$

т. е., в частности, для вариации $\delta_{\mathfrak{p}}$

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int (U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \delta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}_\rho. \qquad \text{(a)}$$

Во-вторых, мы получаем из уравнения (612c), при учете соотношения (588) и неизменности E, уравнение

$$\int (U+h)\,dt = E\,(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \mathfrak{q}_\rho.$$

Следовательно, в результате вариации типа $\delta_{\mathfrak{p}}$

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int (U+h)\,dt = E\delta_{\mathfrak{p}}\,(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}} \bar{\mathfrak{p}}_\rho \delta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}_\rho. \qquad \text{(b)}$$

при вычитании (b) из (a) получится

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt = E\delta_{\mathfrak{p}}\,(t_1 - t_0) \qquad \text{(c)}$$

или, исключив с помощью (632a) время

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds = E\delta_{\mathfrak{p}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}\,. \qquad \text{(d)}$$

Вариация, стоящая справа, всегда имеет, по (632), для естественного движения исчезающее значение, а для достаточно близких концевых положений отрицательное значение. Так как E является необходимо положительной величиной, то стоящая слева вариация

имеет то же значение. Стоящий в левой части интеграл для естественного движения имеет, следовательно, при достаточно близких концевых положениях минимальное значение, что и требовалось доказать.

Примечание 1. Если опускается ограничение относительно 636.
достаточной близости положений, то можно лишь утверждать, что вариация интеграла исчезает.

Аналитическое выражение этого утверждения при нашем способе обозначений, в противоположность (633), можно записать так:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int_0^1 \sqrt{(U+h)}\,ds = 0.$$

Примечание 2. Для каждого значения постоянной h наша 637.
теорема однозначным образом отличает естественный путь по сравнению с каждым возможным путем. Свойство естественных путей, которое рассматривается в теореме, таким образом, можно применить для определения этих путей; причем, оно может быть использовано, хотя циклические движения предполагаются скрытыми. Ибо образование вариации $\delta_{\mathfrak{q}}$ требует лишь, чтобы постоянные, встречающиеся в силовой функции, оставались неизменными. Следовательно, вариация может быть образована несмотря на незнание деталей циклического движения.

Примечание 3. Теорема 2, понимаемая в смысле примеча- 638.
ния 2, есть принцип наименьшего действия в форме Якоби.

Ибо если мы назовем через m_ν массу ν-ой из видимых n точек системы, ds_ν — элемент пути этой точки, то

$$m ds^2 = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu ds_\nu^2,$$

и, следовательно, интеграл, для которого мы установили минимальное значение с точностью до множителя, будет

$$\int \sqrt{U+h}\,\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu ds_\nu^2},$$

что снова, с точностью до постоянного множителя, совпадает с интегралом Якоби.

Физическое значение принципа Якоби не может, по нашему представлению, быть другим, чем то, которое заключено в теореме (352) или (347), из которых он выведен. Он представляет собой преобразование, которое мы должны сделать с этими теоремами, чтобы они, несмотря на существующее незнание деталей циклического движения, были применимы для определения движения видимой системы. Теорема Якоби применима только к голономным системам.

639. Теорема 3. При перемещении свободной голономной консервативной системы между достаточно близкими соседними положениями, временной интеграл кинематической энергии меньше для естественного движения, чем для любого возможного движения, которое переводит систему от заданных начальных к конечным значениям видимых координат, и которое совершается с тем же постоянным во времени значением математической энергии.

Ибо если мы через h назовем заданное значение математической энергии, то для всех рассматриваемых путей (611)

$$T-U=h.$$

Следовательно, интеграл, о котором идет речь в теореме,

$$\int_{t_0}^{t_1} T\,dt,$$

совпадает с точностью до постоянного множителя с тем интегралом, о котором идет речь в теореме 2. Настоящая теорема является поэтому лишь другой формой изложения теоремы 2.

Следовательно, сделанные к теореме 2 примечания 1 и 2 находят и здесь применение, соответствующее их смыслу.

640. Примечание. Теорема (639) представляет первоначальную форму принципа наименьшего действия Мопертюи.

Эта форма имеет то преимущество перед формой Якоби, что ее можно выразить в простых словах, и поэтому она, очевидно,

содержит простой физический смысл. Однако она имеет по сравнению с формой Якоби тот недостаток, что в ней без необходимости содержится время, хотя сама формулировка ее определяет только путь системы, но не движение по нему: движение же определяется только дополнительным замечанием, согласно которому сравниваемые движения должны совершаться с постоянной энергией.

Обзор от (626) до (640). 1. Из нашего изложения для любого 641.
естественного движения свободной консервативной системы вытекает, что каждый из приведенных ниже интегралов принимает при определенных условиях указанное выше значение

$$\int (T-U)\,dt, \qquad \int (T+U)\,dt,$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U+h}}, \qquad \int \sqrt{U+h}\,ds,$$

$$\int T\,dt.$$

При этом оба интеграла, стоящие в верхней строке, относятся к движению системы, а остальные только к пути последней. Интегралы, стоящие в левом столбце, относятся к случаю, когда рассматриваются все, в том числе и циклические, координаты системы и когда считаются одинаковыми только такие положения, при которых циклические координаты имеют также одинаковые значения. Остальные интегралы относятся к случаю, когда циклические координаты системы скрытые и одинаковыми считаются уже такие положения системы, при которых только видимые координаты имеют одинаковые значения. Рассмотрение последнего интеграла предполагает применимость принципа сохранения энергии. Рассмотрение двух средних интегралов может проводиться независимо от применимости принципа сохранения энергии.

2. Физическое значение написанных слева интегралов чрезвычайно простое; относящиеся к ним утверждения являются непосредственным следствием основного закона. 642.

Интегралы, написанные выше справа, утратили простое физическое значение, однако утверждение о том, что они для естественного движения принимают значения, указанные выше, представляет собой все же форму основного закона, правда, запутанную и неотчетливую. Однако запутанной и неотчетливой форма основного закона стала в данном случае потому, что этот закон приспособлен здесь к запутанным и неотчетливым предпосылкам. Предложения, которые относятся к пятому из интегралов, имеют обманчивый вид простого самостоятельного физического положения.

Наш метод доказательства рассчитан не на то, чтобы быть по возможности простым, а на то, чтобы максимально ярко выразить указанную выше связь.

643. 3. Тот факт, что природа не устроена так, чтобы тот или другой из этих интегралов был минимальным, вытекает, во-первых, из того, что уже в голономных системах при произвольных конечных положениях системы минимум вообще не наступает и, во-вторых, из того, что существуют естественные системы, для которых минимум вообще никогда не наступает и для которых не исчезает даже вариация этих интегралов. Всеобщее значение законов естественных движений нельзя поэтому приписать ни одному из этих интегралов, и в этом мы усмотрели право считать обманчивой кажущееся простое значение последнего интеграла.

Конечные уравнения движения для голономных систем

644. Замечание 1. Если мы обозначим через V' значение интеграла

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}},$$

взятого вдоль естественного пути между двумя системами значений всех координат свободной голономной системы с адиабатическими циклами и понимаемого в качестве функции начальных и конечных значений указанных координат, т. е. $p_{\rho 0}$, $p_{\rho 1}$ и $\mathfrak{p}_{\rho 0}$, $\mathfrak{p}_{\rho 1}$ и величины h, то выражение

$$V'\sqrt{\frac{2E}{m+\mathfrak{m}}}$$

будет представлять прямейшее расстояние системы. При этом сохраняется обозначение, которым мы до сих пор пользовались в этом разделе.

Ибо, согласно (632), V' равно промежутку времени естественного перехода между заданными положениями при математической энергии h. Если, следовательно, S является прямейшим расстоянием между двумя положениями, то

$$E=\frac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{S^2}{V'^2},$$

откуда и вытекает утверждение.

Следствие. С помощью функции V' естественные пути рассматриваемой системы могут быть представлены в замкнутой форме. 645.

Ибо если мы обозначим, как и до сих пор, ds — элемент пути видимой частичной системы, $d\mathfrak{s}$ — элемент пути циклической частичной системы и $d\sigma$ — элемент пути полной системы, то будем иметь

$$(m+\mathfrak{m})\,d\sigma^2 = m\,ds^2 + \mathfrak{m}\,d\mathfrak{s}^2, \tag{a}$$

следовательно (57), применяя прежние обозначения,

$$d\sigma^2=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{m}{m+\mathfrak{m}}a_{\rho\sigma}dp_\rho dp_\sigma+\sum_{\rho=1}^{\mathfrak{r}}\sum_{\sigma=1}^{\mathfrak{r}}\frac{\mathfrak{m}}{m+\mathfrak{m}}\mathfrak{a}_{\rho\sigma}d\mathfrak{p}_\rho d\mathfrak{p}_\sigma. \tag{b}$$

Если, наконец, $\widehat{\sigma p_\rho}$ и $\widehat{\sigma \mathfrak{p}_\rho}$ есть углы, которые образует путь полной системы с координатами p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ полной системы, то уравнения естественных путей, вследствие (224) и (226), после деления обеих сторон на постоянный множитель, получаются в форме

$$\sqrt{a_{\rho\rho 1}}\cos\sigma p_{\rho 1}=\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{c}$$

$$\sqrt{a_{\rho\rho 0}}\cos\sigma p_{\rho 0}=-\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{d}$$

$$\sqrt{\mathfrak{a}_{\rho\rho 1}}\cos\sigma\mathfrak{p}_{\rho 1}=\sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho 1}}, \tag{e}$$

$$\sqrt{\mathfrak{a}_{\rho\rho 0}}\cos\sigma\mathfrak{p}_{\rho 0}=-\sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho 0}}. \tag{f}$$

Эти уравнения могут интерпретироваться двояко: они представляют уравнения естественных путей как в виде дифференциальных уравнений первого порядка, так и в конечной форме.

646. Примечание. Предыдущие уравнения от (c) до (f) являются правильными в любом случае, рассматриваются ли циклические координаты как наблюдаемые или как продолжительно скрытые. Однако эти уравнения теряют свою применимость, как только предполагается последнее. Ибо в этом случае выражение V' будет неизвестным и уравнения не могут быть записаны в развернутой форме.

647. Задача 1. Преобразовать предыдущие уравнения движения свободной голономной системы таким образом, чтобы они сохраняли свою применимость, если даже циклические движения системы считаются скрытыми.

Мы обозначаем через V значение интеграла

$$\sqrt{2m}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds\;,$$

взятого вдоль естественного пути между какими-нибудь двумя системами значений видимых координат. При определении этого естественного пути мы будем рассматривать встречающиеся в силовой функции циклические количества движения как неизменные постоянные, и следовательно V должна рассматриваться как

функция начальных и конечных значений только видимых координат и постоянной.

Согласно (635d), при переходе от одного естественного пути к другому с произвольно варьируемыми видимыми координатами

$$\delta_q\sqrt{2m}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds=2E\delta_{\mathfrak{p}}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{U+h}}, \tag{a}$$

следовательно, так же, в частности, при переходе от одного естественного к любому соседнему естественному пути

$$\delta_q V=2E\delta_{\mathfrak{p}}V'. \tag{b}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 1}}=2E\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho 1}},\qquad \frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}}=2E\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\rho 0}}. \tag{c}$$

С помощью этих уравнений мы можем исключить циклические координаты из правых частей уравнений (645c и d). Что касается левых частей, то мы должны заменить углы $\widehat{\sigma p_\rho}$ через $\widehat{s p_\rho}$. Теперь мы имеем, согласно (645b) и (75),

$$\sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{a_{\rho\rho}}\,d\sigma\cos\sigma p_\rho=\sum_{\sigma=1}^{r}\frac{m}{m+\mathfrak{m}}a_{\rho\sigma}dp_\sigma=$$

$$=\frac{m}{m+\mathfrak{m}}\sqrt{a_{\rho\rho}}\,ds\cos sp_\rho. \tag{d}$$

И затем из этих уравнений

$$U+h=T=\frac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2},$$

и (e)

$$E=\frac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{d\sigma^2}{dt^2},$$

разделив, получим

$$d\sigma = \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{\frac{E}{U+h}}\,ds \tag{f}$$

и, следовательно, из (d) и (f) найдем

$$\cos \sigma p_\rho = \sqrt{\frac{U+h}{E}}\cos s,\ p_\rho. \tag{g}$$

Подставляя теперь результат (c) в правые, а результат (g) в левые части преобразуемых уравнений, мы получим уравнения

$$\sqrt{a_{\rho\rho1}}\cos s p_{\rho1} = \frac{1}{\sqrt{2m\,(U+h)_1}}\,\frac{\partial V}{\partial p_{\rho1}}\,,$$

$$\sqrt{a_{\rho\rho0}}\cos s p_{\rho0} = -\frac{1}{\sqrt{2m\,(U+h)_0}}\,\frac{\partial V}{\partial p_{\rho0}}\,, \tag{h}$$

которые и представляют собой искомые преобразования. Ибо они не содержат более никаких величин, которые относятся к скрытым системам, и могут интерпретироваться каждым из двух способов таким образом, что они определяют естественные пути видимой частичной системы в виде либо дифференциальных уравнений первого порядка, либо в конечной форме.

648. Примечание. Функция V не содержит времени и дает только естественные пути системы, но не движение системы по этим путям.

Так как, однако, естественные пути проходятся с одинаковой скоростью и так как мы уже придали постоянной h, встречающейся в V, значение аналитической энергии, то в уравнение легко ввести время как независимую переменную. Связь же между временем и длиной пути, применявшейся до сих пор в качестве независимой переменной, задана уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = t_1 - t_0. \tag{a}$$

Мы получим в результате перемножения уравнений (647k)

$$\sqrt{2m\,(U+h)} = \sqrt{2mT} = m\frac{ds}{dt}\,,$$

и, принимая во внимание (75) и (270),

$$q_{\rho1} = \frac{\partial V}{\partial p_{\rho1}} \tag{b}$$

$$q_{\rho0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\rho0}} \tag{c}$$

Наконец, мы получим для значения самой функции

$$V = 2\int_t^{t_1} T\,dt. \tag{d}$$

По форме эти уравнения значительно проще, чем уравнения предыдущей задачи, однако последние имеют то преимущество, что они содержат на одну независимую переменную меньше.

Примечание 2. Функция V является той функцией, которая 649.
была названа Гамильтоном характеристической функцией консервативной системы. Это утверждение находится в соответствии с (412), ибо при сделанной там предпосылке, что все координаты системы видимые, функция, обозначенная теперь через V, переходит в функцию, обозначенную там этой же буквой.

Впрочем ясно, что характеристическая функция системы, согласно расширенному теперь определению, является чисто математической величиной, не имеющей физического значения. Ибо в зависимости от того, рассматриваем ли мы большие или меньшие части циклических движений как скрытые, мы можем установить для этой системы различные характеристические функции, которые имеют одинаковую аналитическую ценность, но различное значение для одинаковых движений системы.

Теорема. Характеристическая функция V консервативной 650.
системы удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma1}\,\frac{\partial V}{\partial p_{\rho1}}\,\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma1}} = (U+h)_1$$

и

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial V}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma 0}}=(U+h)_0$$

которые соответствуют дифференциальным уравнениям (227) для прямейшего расстояния.

Ибо эти уравнения получаются в результате подстановки направляющих косинусов из уравнений (647h) в уравнение (88), которому они удовлетворяют.

651. Замечание 2. Если мы обозначим через P' значение интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt,$$

взятого вдоль естественного пути между двумя системами значений всех координат свободной голономной системы с адиабатическими циклами и понимаемого как функция этих значений и продолжительности времени перехода, то P' будет отличаться от главной функции системы (415) только на произведение времени перехода на (неизвестную) постоянную. Ибо $T-U$ отличается от энергии системы только на (неизвестную) постоянную.

652. Следствие. С помощью функции P' могут быть представлены в замкнутой форме естественные движения.

Фактически различие между P' и определенной в (415) главной функцией не мешает непосредственному применению уравнений (414b и c), так что мы получаем:

$$q_{\rho 1}=\frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{a}$$

$$q_{\rho 0}=-\frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{b}$$

$$\mathfrak{q}_{\rho 1}=\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho 1}}, \tag{c}$$

$$\mathfrak{q}_{\rho 0}=-\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\rho 0}}. \tag{d}$$

Уравнения же (414d) требуют незначительного изменения. Вместо них мы получим

$$h=-\frac{\partial P'}{\partial t_0}=\frac{\partial P'}{\partial t_1}.$$

Примечание. Предыдущие уравнения от (a) до (d) правиль- 653.
ные в любом случае, независимо от того, могут ли наблюдаться в действительности все координаты или нет. Однако эти уравнения теряют свою применимость, когда циклические движения системы рассматриваются как скрытые.

Задача 2. Преобразовать предыдущие уравнения движения 654.
свободной голономной системы таким образом, чтобы они сохранили свою применимость, если даже циклические движения системы считаются скрытыми.

Мы обозначим через P значение интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt,$$

взятого вдоль естественного движения между двумя системами значений видимых координат, соответствующих моментам времени t_0 и t_1. При определении этого естественного движения циклические количества движения, содержащиеся в константах силовой функции, должны рассматриваться как неизменные, а P должна пониматься как функция только начальных и конечных значений видимых координат и моментов времени t_0 и t_1.

Теперь, согласно (628c), при переходе от естественного движения к произвольному соседнему движению одинаковой продолжительности имеет место уравнение

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int(T+U)\,dt=\delta_{\mathfrak{p}}\int(T-U)\,dt.$$

Если мы применим это уравнение к переходу от одного естественного движения к другому естественному движению одинаковой продолжительности, то оно даст нам

$$\delta_{\mathfrak{q}}P=\delta_{\mathfrak{p}}P'.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 0}}, \quad \frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\rho 1}}.$$

При помощи этих уравнений мы исключаем скрытые координаты из правых частей уравнений (652). Что касается левых частей этих уравнений, то достаточно замечания, что количество движения q_ρ всей системы по ее координатам p_ρ является одновременно количеством движения видимой частичной системы по координате p_ρ. В соответствии с этим мы получаем в качестве уравнений движения видимой частичной системы

$$q_{\rho 1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}}, \tag{a}$$

$$q_{\rho 0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}, \tag{b}$$

которые и являются искомыми преобразованиями.

655. Примечание 1. Введенная нами функция P является той функцией, которая обозначена Гамильтоном буквой S и названа главной функцией консервативной системы. Это утверждение находится в соответствии с (415), ибо при сделанной там предпосылке, что все координаты — видимые, функция, обозначенная здесь через P, переходит в функцию, обозначенную там той же буквой.

656. Примечание 2. Значение главной функции для определенного перехода соответствует характеристической функции в простой форме.

С помощью простого преобразования получим

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (2U+h)\,dt =$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\;ds - \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{h\,ds}{\sqrt{U+h}}.$$

Следовательно по (647), (644), получаем

$$P = V - h(t_1 - t_0),$$

причем мы должны полагать, что в правой части величина V представлена как функция от $(t_1 - t_0)$, $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$.

Следовательно, обратно

$$V = P + h(t_1 - t_0), \tag{b}$$

причем мы должны полагать, что в правой части величина $(t_1 - t_0)$ представлена как функция h, $p_{\rho 0}$ и $p_{\rho 1}$.

Примечание 3. Аналитическая энергия не входит в главную функцию. Она может быть все же выведена из последней при помощи уравнений (654a, b), (286c) и (612a). Она может быть выражена также непосредственно через P. Ибо если мы в правой части уравнения (656a) изменим только t_1 и t_0, но не $p_{\rho 1}$ и $p_{\rho 0}$ и если обозначим через dh соответствующее изменение h, то получим 657.

$$dP = \frac{\partial V}{\partial h}\,dh - h\,d(t_1 - t_0) - (t_1 - t_0)\,dh.$$

Следовательно, в соответствии с (648a),

$$dP = -h\,d(t_1 - t_0),$$

откуда следует

$$h = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0}.$$

Теорема. Главная функция P консервативной системы удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка 658.

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 1}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 1}} + \frac{\partial P}{\partial t_1} = U_1,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} b_{\rho\sigma 0}\frac{\partial P}{\partial p_{\rho 0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma 0}} - \frac{\partial P}{\partial t_0} = U_0,$$

которые соответствуют дифференциальным уравнениям (227) для прямейшего пути.

Ибо эти уравнения получаются, если мы выразим аналитическую энергию h через производные от P сначала непосредственно, при помощи уравнений (657), а затем косвенно, при помощи уравнений (612a) и (654a и b).

659. Обзор от (644) до (658). 1. В (644) — (658) даны четыре конечных представления движения голономной системы с адиабатическими циклами. В первом и третьем представлении все координаты рассматривались как доступные наблюдению. Во втором и третьем представлении циклические координаты рассматривались как скрытые.

Первое и второе представления, которые привели к характеристической функции, давали в сущности только путь системы и соответствовали принципу наименьшего действия.

Третье и четвертое представления, которые привели к главной функции, дали полностью это движение и соответствовали принципу Гамильтона.

660. 2. Все четыре представления имеют один и тот же простой физический смысл, и причина математической сложности их выражения для всех одинакова.

Простой физический смысл состоит в том, что естественные пути всегда прямейшие пути, и в чисто геометрической связи этих путей с прямейшим расстоянием в голономных системах. Причина математической запутанности состоит в том, что мы не всегда одинаково расценивали все существенные определяющие элементы движения, но исключали некоторые из них как скрытые. Мы можем также сказать, что неодинаковый подход к ним состоит в том, что мы вводили в качестве элементов определения для некоторых координат их начальные и конечные значения, а для других координат — начальные скорости.

Характер наших выводов был рассчитан не на то, чтобы быть возможно простым, но на то, чтобы выявить это отношение по возможности отчетливо.

661. 3. Можно дать дальнейшее представление движения голономной системы, исключая некоторые координаты или вводя для видимых координат вместо конечных и начальных значений другие величины в качестве определяющих элементов, или исходя из дифференциальных уравнений (650) и (658), аналогично тому,

как это имело место для прямейшего расстояния в (232) и дальше.

Эти представления в особых случаях имеют преимущество с математической точки зрения, как это показал Якоби. Однако чем дальше в этом направлении будут двигаться, тем больше будет скрываться физический смысл этих операций за их математической формой, тем больше используемые функции будут принимать характер вспомогательных конструкций, не обладающих физическим смыслом.

Неконсервативные системы

Объяснения и замечания. 1. Если материальная система не содержит никаких других скрытых масс, кроме тех, которые совершают адиабатически-циклические движения, то при подходящем выборе видимых координат всегда возможно превратить энергию, которая перешла в энергию скрытых масс, в энергию видимых масс. Имеющаяся уже налицо видимая энергия может, следовательно, продолжительно сохраняться в качестве видимой энергии. Это свойство является определяющим признаком консервативных систем. На том же основании мы обозначаем силы, производимые скрытыми массами таких систем, как консервативные силы. 662.

2. В противоположность этому, такие системы, для которых никакой выбор среди видимых координат не является достаточным, чтобы превращать обратно скрытую энергию в видимую, называются неконсервативными системами, а силы скрытых масс таких систем — неконсервативными силами. Неконсервативные системы, в которых энергия превращается преимущественно из энергии видимых масс в энергию скрытых масс, но не наоборот, называются диссипативными системами, а силы скрытых масс таких систем — диссипативными силами. 663.

3. В общем системы и силы природы неконсервативны, поскольку в рассмотрение принимаются скрытые массы. Это обстоятельство является неизбежным следствием того, что консерва- 664.

тивные системы образуют только исключительные случаи, полученные в качестве большего или меньшего приближения.

Следовательно, для любой естественной системы существует большая вероятность того, что она является неконсервативной. В соответствии с опытом, однако, системы сил природы являются диссипативными, поскольку вообще рассматриваются скрытые массы. Это обстоятельство находит достаточное объяснение в гипотезе, что в природе число скрытых масс и их свобод движения бесконечно бо́льшое по сравнению с числом видимых масс и их видимых координат, так что для всякого произвольно выбранного движения существует бесконечная вероятность против того, что энергия будет концентрироваться, переходя от указанного бесконечно большого количества скрытых масс к определенному малому количеству масс рассматриваемой видимой системы.

665. 4. Впрочем, разница между консервативными и диссипативными системами и силами заключается не в природе вещей, а базируется на добровольном ограничении нашего представления или на неизбежном ограничении нашего знания свободных систем. Если все массы природы рассматриваются как видимые массы, то эта разница отпадает, и все силы природы могут быть обозначены в этом случае как консервативные силы.

666. 5. Все консервативные силы представляются в общем как производные силовых функций, следовательно, как такие функции видимых координат системы, которые не зависят от времени. Неконсервативные силы зависят, кроме того, от первых и более высоких производных видимых координат по времени. При каждой аналитически заданной форме силы обоих видов может быть поставлен вопрос: совместима ли эта форма с предпосылками нашей механики и не противоречит ли она ей?

667. 6. На этот последний вопрос в общем нельзя дать ответа; в деталях он может рассматриваться со следующих точек зрения:

1) если может быть выявлена закономерная непрерывная система, которая производит силы данной формы, то доказано, что данная форма удовлетворяет требованиям нашей механики;

2) если может быть доказана невозможность обнаружить такую систему, то этим самым показано, что данная форма противоречит нашей механике;

3) если в природе может быть выявлена какая-нибудь система, которая, согласно опыту, производит силы данной формы, то это мы рассматриваем как доказательство того, что данная форма совместима с нашей механикой.

Если ни один из этих случаев не имеет места, то поставленный вопрос должен остаться открытым. Если бы нашлась форма силы, которую, согласно *п.* 2, следовало бы отвергнуть, однако, согласно *п.* 3, нужно было бы допустить, то вместе с этим была бы доказана недостаточность гипотезы, которая лежит в основе нашей механики, а вместе с этим недостаточность самой этой механики.

Раздел 6

О ПРЕРЫВНОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Объяснения и замечания. 1. Все системы материальных точек, к которым вообще может быть применен основной закон в соответствии со всеми предпосылками, должны иметь непрерывные связи. Коэффициенты всех уравнений условий таких систем являются, следовательно, непрерывными функциями положения (124). Однако это не мешает тому, что эти функции чрезвычайно быстро меняются вблизи некоторых положений, так что уравнения имеют вблизи этих положений коэффициенты, отличающиеся на конечную величину. 668.

2. Если рассматриваемая система проходит через такое положение, то полное знание ее движения требует полного знания уравнений условий во время быстрого изменения последних. Некоторые предположения о движении, могут быть однако, опущены, если форма уравнений условий системы дана только до и после места их быстрого изменения. Если мы ограничимся такого рода предложениями, то аналитически будет проще не принимать 669.

во внимание особый характер изменения, а рассматривать уравнения условий таким образом, как будто коэффициенты их были прерывными. В этом случае понимание системы как прерывной обусловлено добровольным ограничением нашего рассмотрения этой системы.

670. 3. Может также оказаться, что наши физические средства позволят в остальном полностью исследовать связь системы, но не достаточны для исследования ее в местах быстрого изменения, хотя мы убеждены и можем доказать физически, что эта связь и здесь непрерывная. Если это так, то мы вынуждены представить связь аналитически как прерывную, если не хотим отказаться от единого представления последней. В этом случае понимание системы как прерывной обусловлено неизбежной ограниченностью нашего знания системы.

671. 4. Если, наоборот, заданы аналитически коэффициенты уравнений условий системы как прерывные функции положения без указания, как эти функции определены, то мы предполагаем, что налицо один из двух упомянутых раньше случаев. Мы рассматриваем, следовательно, заданные уравнения только как неполное и приближенное описание истинной непрерывной формы связи. Следовательно, мы принимаем, как само собой разумеющееся, что от нас требуют не полного определения такой системы, а только установления тех положений, которые могут быть сформулированы, несмотря на неполное знание системы, при предпосылке, что в местах прерывности неизвестная связь является в действительности непрерывной.

672. 5. Если система с конечной скоростью проходит через некоторое место весьма быстрого изменения, то ее уравнения условий испытывают в течение исчезающе малого времени конечные изменения. Если система в течение всего времени движения является, как предполагается основным законом — закономерной, то она все же принимает такой вид, как будто во время прохождения через указанное положение ее закономерность была нарушена, хотя на самом деле это не имеет места. Следовательно, если аналитически нам была дана система, уравнения условий которой не зависят от времени, но в некоторый момент времени внезапно приобретают новую форму, то эти уравнения условий в данный момент времени мы рассматриваем только как приближенное выражение другой, нам неизвестной и возможно более сложной, однако непрерывной и закономерной связи. Следовательно, мы принимаем также, что от нас требуют не полного определения движения системы, а только установления тех положений, которые могут быть сформулированы несмотря на наше недостаточно полное знание системы, при предпосылке, что в момент прерывности истинная связь системы закономерная и непрерывная.

6. Понимая все прерывности положения и времени в указанном выше смысле, мы тем самым добровольно отказались от рассмотрения действительно прерывных систем. То, что прохождение системы через кажущееся положение прерывности не определяется полностью только основным законом, вполне соответствует физическому опыту, который говорит, что знания системы до и после места прерывности недостаточно, чтобы полностью определить изменение движения при переходе через это место. 673.

О СИЛЕ УДАРА ИЛИ ОБ УДАРЕ

Замечание. Если система проходит прерывные положения, 674.
то скорость ее претерпевает конечное изменение. Производные ее координат по времени мгновенно переходят к новому значению. Ибо непосредственно до и после места прерывности эти производные, а следовательно, и компоненты скорости, должны удовлетворять линейным уравнениям с коэффициентами, различающимися на конечную величину.

Следствие 1. При переходе через положение прерывности 675.
ускорение делается бесконечно большим, однако временной интеграл ускорения, взятый по времени перехода, вообще сохраняет конечное значение, ибо этот временной интеграл есть изменение скорости, которое, в общем, имеет конечное значение. 676.

Следствие 2. Если уравнения условий двух или нескольких соединенных систем терпят прерывность, то при переходе через эту прерывность силы, возникающие между системами, становятся бесконечно большими, однако временной интеграл силы, взятый по времени перехода, остается конечным. Ибо в общем случае компоненты ускорения прерывной системы по общим координатам делаются в смысле следствия 1 бесконечными. Так как, однако, коэффициенты уравнений условий во время прерывности остаются конечными, то сила будет порядка ускорения.

677. Определение. Ударной силой или, короче, ударом, называется временной интеграл от силы, с которой одна система действует на другую в течение времени перехода через положение прерывности, взятый по времени перехода через место прерывности.

678. Примечание. При конечных скоростях рассматриваемых систем могут встречаться конечные и бесконечные малые, однако не бесконечно большие, удары. Мы предполагаем в последующем конечные удары.

679. Следствие 1. Для каждого удара существует всегда противоудар. Он является временным интегралом силы, с которой вторая система, упомянутая в определении (677), действует на первую систему.

680. Следствие 2. Удар всегда исходит от одной системы, испытывающей прерывность движения и действующей на другую систему, которая также испытывает прерывность движения; он является немыслимым без двух таких влияющих друг на друга систем.

По тем же причинам, как и при рассмотрении сил, мы можем говорить просто об ударах, не упоминая о системах, которые их производят или на которые они действуют.

681. Следствие 3. Удар всегда можно рассматривать как векторную величину, отнесенную к системе, которая его производит, а также и как отнесенную к системе, на которую он действует. Его компоненты по общим координатам являются вообще отличными от нуля, по необщим координатам являются нулями, а в направлениях, которые не выражаются через изменения применяемых координат, остаются неопределенными. Такое же утвер-

ждение имеет место для сил, для которых удар есть временной интеграл.

Обозначение. Если система с координатами p_ρ испытывает прерывность в своем движении, то соответствующие компоненты ударов, которые действуют на систему вдоль p_ρ, обозначим через J_ρ. Компоненты ударов, которые система производит по p_ρ, обозначим через J'_ρ. 682.

Для второй системы, координаты которой мы обозначаем через $\mathfrak{p}_\rho$, можно обозначить соответственные величины через $\mathfrak{J}_\rho$ и $\mathfrak{J}'_\rho$ (ср. (467)).

Тогда имеем тождества

$$J_\rho = \mathfrak{J}'_\rho,$$
$$\mathfrak{J}_\rho = J'_\rho.$$

Теорема. Удар и противоудар всегда друг другу противоположны и равны, т. е. компоненты обоих по каждой координате противоположны и равны тогда, когда обе величины рассматриваются как векторные в отношении как одной, так и другой системы. 683.

Удар и противоудар могут рассматриваться как временные интегралы силы и противосилы (ср. (468)). С помощью введенных обозначений эта теорема может быть выражена уравнениями

$$J_\rho = -J'_\rho,$$
$$\mathfrak{J}_\rho = -\mathfrak{J}'_\rho.$$

Сложение ударов

Теорема. Если система одновременно соединена с многими системами, то удар, который производится совокупностью этих систем, равняется сумме ударов, которые производят отдельные системы. Ибо утверждение это в каждый момент удара имеет место для действующих сил (471), следовательно, и для интегралов последних. 684.

685. Следствие. Удары, производимые или испытываемые системой, можно преобразовать по правилам сложения и разложения вообще векторных величин. Мы говорим о компонентах ударов и о результирующей ударов в том смысле, в котором мы говорим о компонентах силы и о результирующей сил (ср. (472)—(474)).

686. Определение. Удар, действующий на отдельную материальную точку или исходящий от нее, называется элементарным ударом.

687. Следствие 1. Каждый удар, исходящий от одной материальной системы или действующий на нее, может быть разложен на некоторое число элементарных ударов (ср. (479)).

688. Следствие 2. Сложение и разложение элементарных ударов следует правилам сложения и разложения геометрических отрезков (параллелограм ударов) (ср. (478)).

ДВИЖЕНИЕ ПОД ВЛИЯНИЕМ УДАРОВ

689. Задача 1. Определить движение материальной системы под влиянием заданного удара.

Решение задачи состоит в задании изменений, которые испытывает вследствие удара скорость системы. Пусть рассматриваемая система та же самая, что и в (481); если P_ρ означает компоненту бесконечно большой силы, действующей в течение времени удара на систему, то в течение этого промежутка имеем по (481)

$$mf_\rho + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} P_\varkappa = P_\rho. \tag{a}$$

Умножим эти уравнения на dt и проинтегрируем по времени удара. Так как значения координат в течение этого времени постоянные, то

$$m\int f_\rho dt = q_{\rho 1} - q_{\rho 0}, \tag{b}$$

где индексом 0 мы характеризуем величины до удара и индексом 1 — после удара.

Мы имеем далее по (682)

$$\int P_\rho dt = J_\rho \tag{c}$$

и, положив для сокращения

$$\int P_\varkappa dt = J_\varkappa, \tag{d}$$

получим r уравнений вида

$$q_{\rho 1} - q_{\rho 0} + \sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} J_\varkappa = J_\rho. \tag{e}$$

Так как скорость системы перед и после удара должна удовлетворять связям системы, то из k уравнений условий получаем еще k уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} (\dot{p}_{\rho 1} - \dot{p}_{\rho 0}) = 0, \tag{f}$$

которые вместе с уравнениями (e) могут рассматриваться как $(k+r)$ неоднородных линейных уравнений для $(k+r)$ величин $\dot{p}_{\rho 1} - \dot{p}_{\rho 0}$ и $J_\varkappa$ или также для $(k+r)$ величин $q_{\rho 1} - q_{\rho 0}$ и $J_\varkappa$, которые, следовательно, однозначно определяют эти величины и вместе с этим изменения скорости системы.

Примечание 1. Если нам даны скорости системы перед 690.
ударом, т. е. величины $q_{\rho 0}$ и $\dot{p}_{\rho 0}$ известны, то мы можем уравнения (689e) вместе с k уравнениями (689f) или, что то же самое, с k уравнениями

$$\sum_{\rho=1}^{r} p_{\varkappa\rho} \dot{p}_{\rho 1} = 0$$

рассматривать как $r+k$ неоднородных линейных уравнений для $r+k$ величин $\dot{p}_{\rho 1}$ и $J_\varkappa$, которые однозначно определяют эти величины и, следовательно, скорости системы после удара.

Примечание 2. Если мы применим прямоугольные коорди- 691.
наты и обозначим компоненты удара по координате x_ν — посредством I_ν, то уравнения удара принимают форму $3n$ уравнений

$$m_\nu (\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}) + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} I_\iota = I_\nu, \tag{a}$$

которые вместе с i уравнениями, выведенными из уравнений условий

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu} (\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}) = 0, \qquad \text{(b)}$$

однозначно определяют $3n$ компонент $\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}$ изменения скорости и i вспомогательных величин I_ι.

692. Примечание 3. Если координата p_ρ свободная, то соответствующие величины $p_{\chi\rho}$ равны нулю; соответствующие уравнения удара по p_ρ принимают простой вид:

$$q_{\rho 1} - q_{\rho 0} = J_\rho.$$

Если в голономной системе все координаты свободные, то все уравнения принимают эту простую форму и получающиеся таким образом r уравнений достаточны для определения r величин $\dot{p}_{\rho 1} - \dot{p}_{\rho 0}$, которые есть известные линейные функции величин $q_{\rho 1} - q_{\rho 0}$, непосредственно определяемых этими уравнениями.

693. Следствие 1 (из (689)). Для того чтобы система из покоя мгновенно перешла к данной возможной скорости, достаточно сообщить системе удар, который по величине и направлению равен произведению данной скорости и массы системы.

Ибо если $q_{\rho 0} = 0$ и данные $\dot{p}_{\rho 1}$ удовлетворяют уравнениям условий, то равенства

$$J_\chi = 0 \text{ и } J_\rho = q_{\rho 1}$$

удовлетворяют уравнениям (689 e и f).

694. Следствие 2. Для того чтобы движущаяся система из своего мгновенного положения перешла внезапно к покою, достаточно сообщить системе удар, который по величине и направлению равен отрицательному произведению скорости системы на ее массу.

Ибо, если $q_{\rho 1} = 0$ и величины $\dot{p}_{\rho 0}$ удовлетворяют уравнениям условий системы, то допущение

$$J_\chi = 0$$
$$J_\rho = -q_{\rho 0}$$

удовлетворяет уравнениям (689 e и g).

Теорема. Изменения скорости, которые сообщают системе ряд одновременно действующих ударов, являются суммой изменений скорости, которые сообщаются системе отдельно действующими ударами. 695.

Как одновременно действующие при этом обозначаются все удары, которые происходят в исчезающе малое время, без учета их различия во времени.

Эта теорема (ср. (485)) вытекает из линейной формы уравнений (689 e и f); ее можно рассматривать также как непосредственное следствие теоремы (485).

Примечание. Содержание предыдущей теоремы может быть выражено также в часто употребляемой форме — многие одновременно действующие удары не мешают друг другу в отношении скоростей, которые они производят. 696.

Теорема. Если направление удара перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы, на которую он действует, то удар не влияет на движение системы, и наоборот, если производимый удар не влияет на движение системы, на которую он действует, то он перпендикулярен к каждому возможному перемещению последней. 697.

Теорема может рассматриваться как непосредственное следствие теоремы (488) или может быть соответствующим способом выведена из уравнения (689e).

Примечание. Хотя из задания ударов можно сделать однозначное заключение об изменении движения, однако из внезапных изменений движения нельзя сделать однозначное заключение об ударах, которыми они вызываются. 698.

Задача 2. Определить ударную силу, которую материальная система производит при заданном мгновенном изменении движения. 699.

По (682) компоненты искомого удара обозначаются через J'_ρ и по (683 и 689e) они равны

$$J'_\rho = -q_{\rho 1} + q_{\rho 0} - \sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho} J_\chi.$$

Здесь $q_{\rho 1}$ и $q_{\rho 0}$ определены условиями задачи. Однако J_x остаются не определенными, пока не дано движение второй системы, на которую действует удар. Решение задачи, таким образом, оказывается не определенным, поскольку остаются не определенными слагаемые, перпендикулярные к каждому возможному перемещению системы (250).

700. Примечание 1. Все компоненты удара, который производится системой при мгновенном изменении движения, вполне определяются последним в направлении любого возможного движения.

701. Примечание 2. Все компоненты удара, производимого системой при мгновенном изменении движения, вполне определяются последним в направлении любой свободной координаты.

702. Примечание 3. Если p_ρ является свободной координатой, то удар, производимый в направлении этой координаты, можно записать в следующих формах:

$$J'_\rho = -q_{\rho 1} + q_{\rho 0},$$

$$J'_\rho = -\left(\frac{\partial_\rho E}{\partial \dot{p}_\rho}\right)_1 + \left(\frac{\partial_\rho E}{\partial \dot{p}_\rho}\right)_0.$$

ВНУТРЕННЕЕ ПРИНУЖДЕНИЕ ПРИ УДАРЕ

703. Замечание 1. Если система материальных точек, между которыми не существует связей, испытывает удар, то возникающее изменение скорости имеет направление удара и величину, равную величине удара, деленной на массу системы.

704. Замечание 2. Если между точками системы, подвергающейся удару, существуют связи, то изменение скорости системы отклоняется от того, которое дано в предыдущем замечании. Следовательно, в качестве причины этого отклонения можно рассматривать связь системы.

705. Определение. Внутренним принуждением при ударе, или просто принуждением при ударе, мы называем изменение приращения скорости системы, которое обусловливается при ударе совокупными связями системы.

Принуждение при ударе измеряется разностью действительного приращения скорости системы и того приращения, которое возникло бы при снятии всех уравнений условий системы.

Следствие. Принуждение при ударе равно временному интегралу от внутреннего принуждения системы, взятого по всему промежутку удара. 706.

Задача. Определить принуждение системы при ударе. 707.

Обозначим компоненты принуждения по координатам p_ρ через Z_ρ. Умножив уравнения (497а) на mdt и проинтегрировав по времени удара, получим

$$mZ_\rho = q_{\rho 1} - q_{\rho 0} - J_\rho. \tag{a}$$

Компоненты принуждения по произвольным координатам, вообще говоря, недостаточны для определения величины принуждения.

Если же мы пользуемся прямоугольными координатами и обозначаем компоненты принуждения по координатам x_ν через Z_ν, то получим

$$mZ_\nu = m_\nu(\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}) - I_\nu. \tag{b}$$

Следовательно, величина принуждения Z представится положительным корнем уравнения

$$mZ^2 = \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \left(\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0} - \frac{I_\nu}{m_\nu}\right)^2.$$

Теорема 1. Величина принуждения при ударе меньше для естественного изменения движения, чем для любого возможного изменения движения. 708.

Действительно, необходимые и достаточные условия минимума величины $\frac{1}{2}mZ^2$ при заданных I_ν выражаются $3n$ уравнениями (ср. (155), (498))

$$m_\nu(\dot{x}_{\nu 1} - \dot{x}_{\nu 0}) - I_\nu + \sum_{\iota=1}^{i} x_{\iota\nu} I_\iota = 0,$$

где I_ι — неопределенные множители.

Эти уравнения вместе с i уравнениями

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{\iota\nu}(\dot{x}_{\nu1} - \dot{x}_{\nu0}) = 0$$

однозначно определяют $3n+i$ величин $\dot{x}_{\nu1} - \dot{x}_{\nu0}$ и I_ι. Так как полученные уравнения совпадают с уравнениями движения (691), то им удовлетворяют только естественные изменения скорости системы.

709. Примечание. Предыдущая теорема является применением принципа наименьшего принуждения Гаусса к специальным условиям удара.

710. Следствие. Если связи системы препятствуют тому, чтобы угол между ударом и соответствующим изменением скорости системы был равен нулю (703), то этот угол оказывается настолько малым, насколько это допускается связями системы.

Ибо если мы представим себе плоский треугольник, одна сторона которого выражает величину удара, деленную на массу системы, вторая сторона — любое возможное изменение скорости и третья сторона — величину, равную разности первых двух, т. е. величину принуждения, соответствующую данному возможному изменению скорости, то угол ε, заключенный между первыми двумя сторонами, представляет угол между ударом и изменением скорости (34). Среди всех возможных изменений скорости заданного возможного направления только то может быть естественным, для которого принуждение расположено перпендикулярно к соответствующему изменению скорости (708). Следовательно, если ограничиться только этими последними треугольниками, то все они должны быть прямоугольными.

У всех этих треугольников гипотенуза одинакова, а катет, противолежащий углу ε, принимает наименьшее значение только для естественного движения (708).

Отсюда следует, что для естественного изменения скорости сам угол ε принимает наименьшее значение.

Теорема 2. Направление принуждения при ударе расположено перпендикулярно к каждому возможному (виртуальному) перемещению системы из ее мгновенного положения. 711.

Ибо согласно (707) и (689) компоненты принуждения можно представить в форме

$$-\frac{1}{m}\sum_{\varkappa=1}^{k} p_{\varkappa\rho} J_\varkappa.$$

Следовательно, принуждение, как векторная величина, расположено перпендикулярно к каждому возможному перемещению системы (250).

Эта теорема может быть получена как прямое следствие теоремы (500).

Символическое выражение. Если обозначить через δp_ρ изменения координат p_ρ для любого возможного перемещения системы, то предыдущую теорему можно представить в форме символического равенства 712.

$$\sum_{\rho=1}^{r} (q_{\rho1} - q_{\rho0} - J_\rho)\,\delta p_\rho = 0, \tag{a}$$

которое для прямоугольных координат принимает форму

$$\sum_{\nu=1}^{3n} [m_\nu(\dot{x}_{\nu1} - \dot{x}_{\nu0}) - I_\nu]\,\delta x_\nu = 0. \tag{b}$$

Сравни (393) и (501).

Примечание. Предыдущая теорема является приспособлением принципа д'Аламбера к специальным условиям удара. Символическая форма (712) является обычным выражением принципа д'Аламбера применительно к явлениям удара. 713.

Следствие 1. Компонента произведенного ударом изменения движения в направлении любого возможного перемещения системы равна компоненте удара в том же направлении, деленной на массу системы. 714.

Следствие 2. Компонента произведенного ударом изменения движения в направлении любой свободной координаты равна компоненте удара в том же направлении, деленной на массу системы. 715.

716. Следствие 3. Компонента скорости системы, испытывающей удар, по каждой координате абсолютного положения изменяется на величину компоненты удара по соответствующей координате, деленной на массу системы. Связи системы при этом предполагаются произвольными.

717. Примечание. Даже без знания или без полного знания связей масс системы мы можем все же всегда написать шесть уравнений движения системы, испытывающей удар. Если в качестве координат абсолютного положения системы принять шесть величин α_1, α_2, α_3, ω_1, ω_2, ω_3, введенных в (402), то указанные шесть уравнений будут являться выражением закона движения центра тяжести и принципа площадей для специальных условий удара.

ЭНЕРГИЯ, РАБОТА

718. Определение. Увеличение энергии системы вследствие производимого удара называется работой удара.

Уменьшение энергии вследствие производимых ударов можно рассматривать как отрицательное увеличение ее. Поэтому работа удара может быть как положительной, так и отрицательной.

719. Следствие. Работа удара есть временной интеграл той работы, которая производится силой, временной интеграл которой является данным ударом.

720. Теорема. Работа удара равна произведению величины удара и среднего значения компоненты начальной и конечной скорости системы, взятой в направлении удара.

Ибо каким бы ни было изменение действующей силы в течение удара и изменение движения за это время, окончательное движение и, следовательно, работа удара будет такой же, как если бы сила действовала в направлении удара с постоянной средней величиной.

Если исходить из этой упрощающей предпосылки, то, во-первых, величина действующей силы будет равна величине удара, деленной на время удара и, во-вторых, скорость, изменяясь равномерно, имеет среднее значение, равное среднему арифметическому

ее начального и конечного значения. Компонента перемещения, пройденного системой в направлении удара за время удара, равна среднему значению скорости, умноженному на время удара. Если, согласно (513), теперь вычислить работу, произведенную ударом, то время удара исключается, что и требовалось доказать.

Примечание. Предыдущая теорема, при использовании вве- 721.
денных ранее обозначений, аналитически выражается положением, что работа удара равна

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho (\dot{p}_{\rho 1} + \dot{p}_{\rho 0}).$$

Следствие 1. Работа удара равна произведению удара и 722.
компоненты начальной скорости, взятой в направлении удара, увеличенному на половину произведения величины удара и компоненты изменения скорости в направлении удара.

Аналитически это значит, что работа удара равна

$$\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho \dot{p}_{\rho 0} + \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho (\dot{p}_{\rho 1} - \dot{p}_{\rho 0}),$$

что совпадает с предложением (721).

Следствие 2. Работа удара, приводящего покоящуюся си- 723.
стему в движение, равна половине произведения величины удара и компоненты произведенной скорости в направлении удара. Ибо, если $\dot{p}_{\rho 0} = 0$, то работа удара равна

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r} J_\rho \dot{p}_{\rho 1}.$$

Теорема. Заданный удар сообщает покоящейся системе 724.
движение в направлении наибольшей работы, т. е. в том направлении, при котором он производит бо́льшую работу, чем он произвел бы, если мы путем прибавления к первоначальным связям новых связей принудили бы систему паремещаться в другом направлении (так называемая теорема Бертрана).

В самом деле, если J есть величина удара, v — вызванная ударом скорость, ε — угол между ними, то для каждой первоначальной и так же добавочной связи, согласно (714),

$$v = \frac{J}{m} \cos \varepsilon.$$

Следовательно, работа удара, согласно (723), равна

$$\frac{1}{2} Jv \cos \varepsilon = \frac{J^2}{2m} \cos^2 \varepsilon.$$

Согласно (710), угол ε принимает для естественного движения наименьшее значение, совместимое с первоначальными связями. Таким образом, увеличивая связи, угол ε можно только увеличить, а $\cos^2 \varepsilon$, следовательно, уменьшить, что и доказывает нашу теорему.

725. Следствие. Энергия, которую производит удар, приложенный к покоящейся системе, тем больше, чем больше связей мы снимаем. Наибольшее возможное значение этой энергии, получающейся при снятии всех связей системы, равно квадрату величины удара, деленному на удвоенную массу системы.

СОУДАРЕНИЕ ДВУХ СИСТЕМ

726. Пояснение 1. Мы говорим, что две системы сталкиваются, если они вступают в такое взаимоотношение, как если бы они подверглись в течение весьма малого времени некоторому соединению. Путем подходящего выбора координат обеих систем (452) мы будем представлять это соединение в виде прямого соединения.

727. Пояснение 2. Такое кратковременное соединение мы будем понимать как длительное соединение обеих систем с третьей неизвестной системой такого рода, что она в общем не оказывает никакого влияния на движение данных систем. Однако в непосредственной близости от таких положений, в которых определенные координаты одной системы становятся равными определенным координатам другой, эта третья система принуждает указанные координаты первых двух систем оставаться равными в течение весьма малого промежутка времени. Эти временно равные координаты мы называем общими координатами обеих систем.

Пояснение 3. До и после соударения скорости измене- 728.
ния координат каждой из сталкивающихся систем подчинены уравнениям условий только своей собственной системы. Однако во время соударения скорости изменения общих координат соударяющихся систем должны удовлетворять еще условиям соединения.

Следовательно, эти скорости, как и сами координаты, должны сделаться соответственно равными и оставаться такими в течение малого времени соударения.

Однако, так как это время рассматривается как бесконечно малое, а механический процесс, протекающий в нем, — как совершенно неизвестный, то мы рассматриваем наши системы только до и после соударения и ожидаем, что от нас потребуют только таких заключений, которые можно сделать без знания процессов, происходящих в течение соударения.

Задача. По заданным движениям до соударения определить дви- 729.
жения двух соударяющихся систем после соударения, насколько это возможно без данных о явлениях во время самого соударения.

Пусть p_ρ обозначают r координат одной, а $\mathfrak{p}_\rho$ — $\mathfrak{r}$ координат другой системы. Число общих координат пусть будет s. Компоненты импульса, испытываемого первой системой, обозначим через J_ρ, а второй системой — через $\mathfrak{J}_\rho$.

Величины до и после соударения обозначим индексами 0 и 1.

Для всех координат первой системы имеют силу уравнения вида (689e), и соответствующие уравнения — для всех координат второй системы. Кроме того, удары, которые испытывают обе стороны, находятся в отношении удара и противоудара, т. е. для всех общих координат, в соответствии с (682) и (683)

$$J_\rho = -\mathfrak{J}_\rho,$$

и для всех необщих координат

$$J_\rho = 0, \qquad \mathfrak{J}_\rho = 0.$$

Если мы соединим оба соотношения, то получим для s общих координат s уравнений вида

$$q_{\rho 1} - q_{\rho 0} + \sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho} J_\chi = -\mathfrak{q}_{\rho 1} + \mathfrak{q}_{\rho 0} - \sum_{\chi=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\chi\rho} \mathfrak{J}_\chi, \tag{a}$$

а для $(r-s)+(\mathfrak{r}-s)$ необщих координат получим $r-s$ уравнений вида

$$q_{\rho 1} - q_{\rho 0} + \sum_{\chi=1}^{k} p_{\chi\rho} J_\chi = 0 \tag{b}$$

и $(\mathfrak{r}-s)$ уравнений вида

$$\mathfrak{q}_{\rho 1} - \mathfrak{q}_{\rho 0} + \sum_{\chi=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{p}_{\chi\rho} \mathfrak{J}_\chi = 0. \tag{c}$$

Уравнения (a), (b), (c) вместе с $k+\mathfrak{k}$ уравнениями условий обеих систем определяют движение обеих систем после удара, т. е. определяют скорости $\dot{p}_{\rho 1}$ и $\dot{\mathfrak{p}}_{\rho 1}$ и вспомогательные величины J_χ и $\mathfrak{J}_\chi$. Таким образом мы получили $r+\mathfrak{r}-s+k+\mathfrak{k}$ неоднородных линейных уравнений для определения $r+\mathfrak{r}+k+\mathfrak{k}$ неизвестных, решающих нашу задачу.

730. Примечание. Если p_ρ и $\mathfrak{p}_\rho$ являются свободными координатами системы, то уравнения соударения можно записать в более простой форме. Именно, для общих координат получаем s уравнений вида

$$q_{\rho 1} + \mathfrak{q}_{\rho 1} = q_{\rho 0} + \mathfrak{q}_{\rho 0} \tag{a}$$

для необщих координат первой системы $r-s$ уравнений вида

$$q_{\rho 1} = q_{\rho 0} \tag{b}$$

и для необщих координат второй системы $\mathfrak{r}-s$ уравнений вида

$$\mathfrak{q}_{\rho 1} = \mathfrak{q}_{\rho 0}. \tag{c}$$

Таким образом, мы получили вместе $r+\mathfrak{r}-s$ уравнений для определения $r+\mathfrak{r}$ неизвестных $\dot{p}_{\rho 1}$ и $\dot{\mathfrak{p}}_{\rho 1}$.

731. Следствие 1. Движения двух систем после их соударения не вполне определяются их движением до соударения и общими законами механики. Для полного их определения требуется знание других соотношений, полученное из иных источников. Число этих дальнейших соотношений должно равняться числу общих координат, появляющихся при столкновении.

Следствие 2. Если при соударении возможно указать наряду с соотношениями, которые вытекают из общих законов механики, еще столько линейных уравнений для компонент скорости после соударения, сколько появляется общих координат, то задание движения до соударения становится достаточным для однозначного определения движения после удара. 732.

Примечание. Особые соотношения, которые необходимы для определения движения при соударении и которые не вытекают из общих законов механики, определяются особенностями третьей скрытой системы, осуществляющей кратковременное соединение между двумя соударяющимися системами. 733.

Именно эта скрытая система воспринимает энергию, которую теряют соударяющиеся системы или которая является источником энергии, приобретаемой системами, испытывающими соударение. Первый случай имеет место, например, при неупругом соударении, при котором малую окрестность около точки приложения удара следует рассматривать как эту скрытую соединительную систему. Второй случай имеет место, например, при явлениях, вызывающих взрывы.

Однако рассмотрение этих особых условий не входит в задачу общей механики.

Заключительное замечание ко второй книге

Во второй книге мы не анализировали необходимые отношения между творениями нашего собственного ума, но рассматривали лишь опытные связи между предметами внешнего наблюдения. Поэтому необходимо было, чтобы наши рассмотрения опирались не только на законы нашего ума, но и на результаты прошедшего опыта. В качестве необходимого вклада опыта мы и взяли из нашего наблюдения природы основной закон. 734.

735. Вначале должно показаться, что основной закон является далеко недостаточным для того, чтобы охватить всю полноту фактов, которые дает нам природа и которые описываются существующей механикой. Ибо в то время, как основной закон предполагает непрерывные и закономерные связи, повседневный опыт ставит нас перед прерывными и незакономерными связями. Далее, в то время как основной закон четко предполагает только свободные системы, мы вынуждены рассматривать также и несвободные системы.

Больше того, даже закономерные непрерывные свободные системы не все подчиняются безоговорочно основному закону, но отчасти, видимо, противоречат ему. Однако мы могли изучать незакономерные и прерывные системы, рассматривая их незакономерность и прерывность как кажущиеся; мы могли также изучать движения несвободных систем, понимая их как части свободных систем; наконец, мы могли системы, видимо противоречащие основному закону, подчинить ему, допуская возможность существования скрытых масс. Таким образом, хотя мы не дополняли основной закон другими фактами опыта или другими произвольными понятиями, мы все же могли охватить всю область, которой вообще занимается механика.

Наша особая гипотеза не препятствует нам также понимать, что механика могла и должна была развиваться так, как она развивалась в действительности.

736. В результате этого мы можем утверждать, что основной закон является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы исчерпывающе представить участие опыта в общих законах механики.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ОТ РЕДАКЦИИ

Книга замечательного немецкого ученого Г. Герца «Принципы механики, изложенные в новой связи» является одним из самых глубоких и своеобразных исследований фундаментальных идей классической механики в мировой научной литературе.

Исключительная логическая стройность и завершенность, блестящее обобщение механики Ньютона, глубокая геометризация основ динамики характеризуют эту предсмертную работу Г. Герца.

Решение ряда конкретных задач неголономных систем, систем с циклическими переменными и т. д. представляет практический интерес и в настоящее время.

Книга Г. Герца, переведенная на французский и дважды на английский языки, впервые издается в русском переводе.

Настоящее издание включает полный перевод книги Герца «Принципы механики, изложенные в новой связи»; в приложении даны статьи Г. Гельмгольца и А. Пуанкаре о Герце; издание содержит также послесловие, примечания и библиографию научных трудов Г. Герца.

Перевод текста «Принципов механики, изложенных в новой связи» выполнен В. Ф. Котовым и А. В. Сулимо-Самуйло, перевод статьи Г. Гельмгольца — И. А. Перельмутером, перевод статьи А. Пуанкаре — Л. А. Райтман, послесловие написано А. Т. Григорьяном и Л. С. Полаком, примечания составлены Л. С. Полаком, библиография — Ю. Х. Копелевич. Редакция переводов выполнена Л. С. Полаком.

Г. ГЕЛЬМГОЛЬЦ [35]

Г. ГЕРЦ

1 января 1894 г. умер Генрих Герц. Всех тех, кто наблюдает за прогрессом человечества в его стремлении к максимальному развитию духовных сил, к господству духа над естественными страстями и над противоборствующими силами природы, глубоко потрясла весть о смерти этого любимца богов. Наделенный редчайшими дарами ума и характера, он собрал в своей, увы, столь короткой жизни урожай почти нежданных плодов, обрести которые тщетно стремились в течение истекающего столетия многие из самых одаренных его коллег. В старое классическое время сказали бы, что он пал жертвой зависти богов. Здесь, казалось, природа и судьба совершенно необычайным образом благоприятствовали развитию ума, который объединил в себе все дарования, необходимые для разрешения труднейших проблем науки.

Это был ум, в равной мере способный как к величайшей остроте и ясности логического мышления, так и к изумительной внимательности при наблюдении неприметных явлений. Непосвященный наблюдатель проходит мимо них, не обращая внимания, но тому, кто обладает более острым взором, они указывают путь, по которому он может проникнуть в новые неизведанные глубины природы.

Генрих Герц был, казалось, предназначен к тому, чтобы раскрыть перед человечеством многие новые, до сих пор скрытые тайны природы, но все надежды потерпели крушение из-за коварной болезни, которая, медленно, но неудержимо подкрадываясь, уничтожила эту столь драгоценную для человечества жизнь и жестоко разрушила все связанные с ней надежды.

Моя боль была особенно сильна, ибо среди всех своих учеников я всегда рассматривал Герца как того, которому был наиболее близок круг моих научных идей; с ним, казалось, я мог связывать свои надежды на их дальнейшее развитие и обогащение.

Генрих Рудольф Герц родился 22 февраля 1857 г. в Гамбурге. Он был старшим сыном в семье адвоката (впоследствии сенатора) д-ра Герца. До конфирмации он учился в одном из городских реальных училищ; затем, после года домашней подготовки к более серьезным занятиям, поступил в городскую гимназию Иоганнеум и окончил ее в 1875 г. с аттестатом зрелости. Уже мальчиком он приобрел уважение своих родителей и учителей благодаря своему чрезвычайно развитому чувству долга. Характер его дарования обнаружился уже очень рано. По собственному побуждению он, наряду со школьными предметами, занимался механическими работами на столярном верстаке и токарном станке. Кроме того, по воскресениям он посещал также ремесленную школу, чтобы приобрести навыки в геометрическом черчении. При помощи самых простых средств он попытался изготовить пригодные оптические и механические инструменты.

Когда после окончания школьного курса он должен был решить вопрос о выборе профессии, он выбрал профессию инженера. По-видимому, сомнения в способностях к теоретической науке объясняются его скромностью, которая и в последующие годы была его характернейшей чертой. Он, наверное, чувствовал себя увереннее в успехе при занятии своими любимыми механическими работами, всю важность которых уже тогда хорошо понимал. Возможно, на него оказал также влияние господствующий в его родном городе практический образ мысли. Впрочем, такого рода робость можно наблюдать как раз у молодых людей выдающихся способностей. Они имеют четкое представление о трудностях, которые надо преодолеть для достижения представляющейся их умственному взору высокой цели. Они должны сначала практически испытать свои силы, прежде чем сумеют обрести необходимую для их трудного дела уверенность в себе. Но и в своем последующем развитии богато одаренные натуры обычно тем более недовольны результатами своей работы, чем ярче их способности и выше идеалы. Наиболее одаренные достигают самых значительных высот, очевидно, потому, что они наиболее непримиримы к любым несовершенствам и неутомимо работают над их устранением. Этот период сомнения длился у Генриха Герца целых два года. Наконец, осенью 1877 г. он решился избрать своей профессией научную деятельность, ибо по мере обогащения своих знаний он пришел к внутреннему убеждению, что только в научной работе он сможет найти постоянное удовлетворение.

Осенью 1878 г. он приехал в Берлин, где я впервые познакомился с ним как с практикантом в руководимой мною физической лаборатории университета. Уже в то время, когда он выполнял элементарные учебные работы, я увидел, что имею дело с учеником совершенно необычайного дарования. Когда в конце летнего семестра я должен был предложить тему для студенческой работы в области физики на соискание премии, я выбрал вопрос из области электродинамики, будучи уверен, что Герц заинтересуется этим вопросом и успешно его разрешит, что впоследствии и подтвердилось.

Законы электродинамики выводились тогда большинством физиков в Германии из гипотезы В. Вебера, который пытался свести объяснение электрических и магнитных явлений к некой модификации ньютоновского предположения о силах, непосредственно и прямолинейно действующих на расстоянии. Зависимость этих сил от расстояния должна была, по мнению этих физиков, следовать тому же закону, что и сила тяготения, установленная Ньютоном, а также измеренная Кулоном сила, действующая на расстоянии между любыми двумя наэлектризованными частицами, а именно: эти силы должны были быть обратно пропорциональны квадрату расстояния между двумя взаимодействующими зарядами и прямо пропорциональны произведению обоих зарядов. При этом взаимодействие между одноименными зарядами проявляется в отталкивании, а между разноименными — в притяжении. Кроме того, в гипотезе Вебера делалось предположение, что распространение этой силы

в бесконечном пространстве происходит мгновенно с бесконечной скоростью. Единственное различие между гипотезами Вебера и Кулона состояло в том, что, по предположению Вебера, скорость, с которой приближаются друг к другу или удаляются друг от друга два электрических заряда, а также их ускорения могут оказывать влияние на величину силы, возникающей в результате взаимодействия между обоими электрическими зарядами.

Наряду с гипотезой Вебера появились и другие подобные гипотезы. Общим для них было то, что величина кулоновской силы считалась изменяющейся под влиянием какой-либо компоненты скорости движущихся электрических зарядов. Подобные гипотезы выдвигались Ф. Э. Нейманом, его сыном К. Нейманом, Риманном, Гросманом, позднее Клаузиусом. Намагниченные частицы соответствовали по этим гипотезам осям электрических круговых токов, направление которых было ранее установлено Ампером. Из этого пестрого собрания гипотез отнюдь не следовало ясных выводов. Для того чтобы их сделать, необходимо было обратиться к сложным расчетам, к разложению отдельных сил на их различно направленные компоненты и т. д. Так область электродинамики превратилась в то время в бездорожную пустыню. Факты, основанные на наблюдениях, и следствия из весьма сомнительных теорий — все это было вперемежку соединено между собой.

Стремясь разобраться в этой путанице, я взял на себя задачу расчистить, насколько это в моих силах, область электродинамики, расследовать различающиеся между собой выводы из разных гипотез и там, где это возможно, при помощи надлежащим образом поставленных опытов, сделать выбор между этими теориями. Результатом моей работы был следующий общий вывод: все явления, которые вызываются циркуляцией по металлической цепи полностью замкнутых токов, обладающих тем общим свойством, что во время их течения не происходит сколько-нибудь значительного изменения концентрации электрических зарядов в различных частях цепи, можно вывести в равной мере исходя из всех названных гипотез. Выводы, которые можно сделать на основании этих явлений, согласуются как с законами электромагнитных действий Ампера, так и с законами индуцированных электрических токов, открытыми Фарадеем и Ленцем и обобщенными Ф. Э. Нейманом. Что касается цепей не полностью замкнутых, то тут, напротив, следствия, вытекающие из различных названных выше гипотез, существенно различаются между собой. Упомянутое согласование различных существовавших тогда теорий с явлениями, наблюдаемыми у полностью замкнутых токов, легко объясняется тем, что замкнутые токи можно поддерживать какой угодно силы и сколь угодно времени, и во всяком случае достаточно долго, чтобы развитые ими силы имели бы возможность проявить свое действие. Благодаря этому фактическое действие этих токов и законы этого действия были хорошо известны и точно установлены. Поэтому, если бы какая-либо новая теория не соответствовала какому-нибудь из известных явлений этой хорошо разработанной области, то это было бы быстро замечено и использовано для опровержения этой теории. Напротив того, у открытых концов незамкнутого проводника, разделенных изолирующей средой, при движении электричества вдоль проводника скапливаются электрические заряды; это происходит потому, что на концах проводника накопляется электричество, которое не может пройти через изолятор.

В исключительно короткий промежуток времени отталкивающая сила скопившегося у конца проводника электричества, направленная против продолжающего притекать одноименного электричества, увеличивается до такой степени, что приток нового электричества прекращается и после момента покоя наступает быстрое обратное движение скопившегося электричества.

Для каждого, кто знал в то время действительное положение дел, было ясно, что полного понимания теории электромагнитных явлений можно будет достичь только путем точного исследования процессов, связанных с этими мгновенными незамкнутыми токами. В. Вебер сделал попытку устранить или уменьшить известные трудности, возникающие для его гипотезы, ссылаясь на возможность того, что электричество обладает, подобно тяжелым телам, известной степенью инерции. На первый взгляд, всякий раз при включении и выключении тока возникают явления, создающие видимость

инерции электричества. Но эти явления происходят в силу так называемой электродинамической индукции, т. е. вследствие взаимного воздействия друг на друга близко расположенных проводников; законы этих явлений хорошо известны уже со времени Фарадея. Настоящая инерция должна была бы быть пропорциональна массе приведенного в движение электричества, не завися при этом от положения проводника. Если бы что-либо подобное существовало, то оно должно было бы дать о себе знать путем замедления колебательных движений электричества, которые возникают при внезапном прекращении электрического тока в проводнике.

Можно было ожидать, что этот путь приведет к определению верхнего предела величины этой инерции, и поэтому я поставил задачу произвести опыты для выяснения величины экстратоков. Исходя из этих опытов, должен был по крайней мере быть установлен верхний предел для подвижной массы. Как наиболее пригодные для этих опытов были предложены экстратоки в спиралях из двух проволок, в которых токи протекают в противоположных направлениях. В решении этой задачи состояла первая большая работа Генриха Герца. Он дал точный ответ на поставленный вопрос и показал, что не более $^1/_{20}$—$^1/_{30}$ доли экстратока в спирали с двойной проволокой можно приписать действию инерции электричества. Эта работа получила премию.

Но Герц не ограничился только этими опытами. Он установил, что при прямолинейно растянутых проводах действие индукции можно рассчитать гораздо точнее, чем при проводнике в виде спирали со многими витками, потому что в последнем случае нельзя было точно учесть условия, налагаемые расположением витков. Поэтому при своих дальнейших опытах он пользовался цепью, составленной из прямоугольников, сделанных из прямой проволоки, и нашел, таким образом, что экстраток, вызванный инерцией, составляет не более $^1/_{250}$ части индуцированного тока.

Исследования влияния центробежной силы в быстро вращающемся диске на движение протекающего через него электрического тока привели Герца к еще более точному определению верхнего предела инерции электричества. Эти опыты ясно и убедительно показали Герцу огромную подвижность электричества и помогли ему найти пути, которые привели его к важнейшим открытиям.

В Англии благодаря Фарадею были распространены совершенно другие представления о существе электричества. Идеи Фарадея, изложенные труднопонятным, абстрактным языком, медленно прокладывали себе дорогу, до тех пор, пока они не нашли в Кларке Максвелле замечательного интерпретатора. Главное стремление Фарадея при объяснении электрических явлений состояло в том, чтобы исключить все предположения, связанные с допущением процессов или веществ, недоступных непосредственному наблюдению. Прежде всего он отверг, как это сделал в начале своей деятельности Ньютон, гипотезу о существовании сил, действующих на расстоянии. Вопреки ранее распространенным теориям, он считал немыслимым, чтобы могли существовать прямые и непосредственные воздействия между двумя телами, разделенными пространством, и при этом не происходило бы никакого изменения в промежуточной среде. Поэтому он прежде всего искал следов изменений в среде, лежащей между наэлектризованными или намагниченными телами. Ему удалось доказать наличие магнитных или диамагнитных свойств почти во всех телах, считавшихся ранее немагнитными. Он доказал также, что под влиянием электрических сил хорошо изолирующие тела претерпевают изменения. Эти изменения он назвал «диэлектрической поляризацией изоляторов».

Нельзя было не признать того, что притяжение между двумя наэлектризованными проводниками или между двумя противоположными магнитными полюсами в направлении их силовых линий должно существенно усилиться тогда, когда между ними помещают диэлектрически или магнитно поляризованную среду. Наоборот, поперек силовых линий должно возникнуть отталкивание. После этих открытий уже нельзя было отрицать того, что часть магнитного и электрического действия на расстоянии осуществляется при посредстве промежуточной поляризованной среды; но могла все же еще оставаться и другая часть, которая бы обусловливалась силой, непосредственно действующей на расстоянии.

Фарадей и Максвелл склонялись к более простому предположению, что вообще не существует сил, действующих на расстоянии, и Максвелл дал математическую формулировку этой гипотезы, которая, конечно, требовала полного изменения ранее существовавших представлений. На основании этой гипотезы надо было искать только в изоляторах причину изменений, вызывающих электрические явления. Возникновение и исчезновение поляризации в изоляторах должно было быть причиной движений электричества, происходящих, казалось бы, в проводниках. Незамкнутых токов более не существовало, ибо скопление электрических зарядов у концов проводника вызывало диэлектрическую поляризацию изолятора, разделяющего эти концы, которая являлась эквивалентом движущегося электричества и замыкала ток.

Фарадей с его чрезвычайно верным и глубоким пониманием геометрических и механических вопросов осознал, что вытекающая из этих предположений зависимость электрического действия от расстояния в точности совпадает с той зависимостью, которая была установлена старой теорией. Максвелл это подтвердил и развил с помощью математического анализа в полную теорию электродинамики. Я сам хорошо понял то, что вытекает из этих фактов, установленных Фарадеем, и прежде всего исследовал вопрос, существуют ли вообще силы, действующие на расстоянии, и, следовательно, должны ли они быть приняты во внимание. Мне казалось, что в такой запутанной области сомнение соответствует научной осторожности и может привести к решающим опытам. Таково было состояние вопроса, когда Генрих Герц после окончания своей вышеупомянутой конкурсной работы взялся за его исследование.

По мнению Максвелла, для его теории было существенным и решающим, вызывает ли возникновение и исчезновение диэлектрической поляризации в изоляторе те же самые электродинамические действия в окружающей среде, какие вызывает в проводнике гальванический ток. Решение этого вопроса мне казалось работой выполнимой и достаточно важной, чтобы стать темой одной из больших конкурсных задач Берлинской Академии.

Каким образом из ростков, взращенных современниками, развились дальше открытия Герца; об этом он рассказал сам во введении к своей книге «Исследование распространения электрической силы», и при этом так наглядно и интересно, что никто не мог бы прибавить к этому что-либо существенное. Это сообщение представляет выдающуюся ценность, будучи глубоко искренним и подробным изображением того, как совершалось одно из важнейших и плодотворнейших открытий. К сожалению, мы обладаем лишь весьма немногими подобными документами о внутренней психологической истории науки, и мы чрезвычайно благодарны автору за то, что он позволил нам заглянуть так глубоко в мастерскую своей мысли и даже в историю своих временных заблуждений. Следовало бы только прибавить несколько слов о последствиях этих новых открытий.

Теории, правильность которых впоследствии подтвердил Герц, выдвигались, о чем я уже говорил, еще до него Фарадеем и Максвеллом как возможные или даже в высшей степени вероятные, однако опытных доказательств их достоверности еще не было. Герц сумел представить эти доказательства. Только необычайно внимательный наблюдатель, который сразу видит значение каждого нежданного и до него не замеченного явления, мог обратить внимание на те в высшей степени неприметные явления, которые вывели его на верную дорогу. Было бы совершенно бесперспективной задачей попытаться обнаружить быстро меняющиеся токи длительностью в десятитысячные или даже миллионные доли секунды, пользуясь гальванометром или каким-либо другим применявшимся тогда прибором. Для того чтобы конечные силы сообщили телам какую-либо скорость или переместили тело, обладающее какой-либо массой, хотя бы даже такой незначительной, какой обладают магнитные иглы гальванометров, необходимо определенное время. Но электрические искры между концами провода могут стать заметными, если напряжение на концах такого провода хотя бы на миллионную долю секунды будет достаточно высоким, чтобы искра могла прорвать тончайший слой воздуха.

Благодаря своим прежним исследованиям Герц был уже хорошо знаком с регулярностью и необычайной скоростью этих очень быстрых

Г. ГЕРЦ

колебаний электричества, и его попытки таким путем открыть и сделать видимыми эти мимолетнейшие движения электричества удались ему сравнительно скоро. Он очень быстро нашел способы, при помощи которых смог добиться такой регулярности колебаний в незамкнутых проводах, что сумел исследовать их зависимость от самых различных привходящих обстоятельств, установить законы их появления, длину их волн в воздухе и скорость их распространения.

Знакомясь с этими исследованиями Герца, нельзя не восхищаться проницательностью его теоретических соображений и его экспериментальным искусством, счастливейшим образом дополнявшими друг друга. Этими работами Герц дал физике новое представление о чрезвычайно интересных явлениях природы. Сейчас не может быть сомнения в том, что световые колебания в эфире, наполняющем мировое пространство, являются электрическими колебаниями, что сам эфир обладает свойствами изолятора и магнитной среды. Электрические колебания в эфире образуют промежуточную ступень между сравнительно медленными движениями, какими являются, например, упругие колебания звучащего намагничиваемого камертона, с одной стороны, и грандиозно быстрыми колебаниями света — с другой. Но можно доказать, что скорость их распространения, их природа как поперечных колебаний, связанная с этим возможность явлений поляризации, преломления и отражения — все это имеет тот же характер, что и у света и тепловых лучей. Электрические волны не обладают только способностью воздействовать на глаз, но этой способности нет также и у темных тепловых лучей, число колебаний которых для этого недостаточно велико.

Несомненно большим достижением является приведение убедительных доказательств того, что свет — эта столь важная и таинственная сила природы — ближайшим образом родственен второй, столь же таинственной и, вероятно, имеющей еще большее применение, силе — электричеству. Для теоретической науки, возможно, еще важнее то, что теперь стало понятным, как силы, о которых существовало представление, что они непосредственно действуют на расстоянии, распространяются путем воздействия одного слоя промежуточной среды на ближайший. Конечно, остается еще неразрешенной загадка тяготения, ибо силу тяготения мы еще не можем представить себе иначе, как силу, действующую на расстоянии.

Своими открытиями Генрих Герц обеспечил себе прочную славу в науке. Но память о нем сохранится не только благодаря его работам. Все, кто его знал, никогда не забудут привлекательных черт его характера, его неизменную скромность, радостное признание чужих заслуг, преданную благодарность по отношению к своим учителям. Стимулом к деятельности у него было всегда только стремление к истине, которой он и следовал с величайшей серьезностью и полным напряжением. Никогда не проявлялось у него ни малейшего следа жажды славы или личной заинтересованности. Даже в тех случаях, когда он имел некоторые права претендовать на открытие, он часто предпочитал молча отступать на второй план. Обычно тихий и молчаливый, он умел разделить веселье в дружеском кругу и оживить беседу метким словом. Он, пожалуй, никогда не имел личных врагов, хотя иногда произносил суровый приговор небрежно сделанным работам или хвастливым домогательствам, которые выдавались за науку.

Внешние события его жизни были следующие: в 1880 г. он поступил в качестве ассистента в физическую лабораторию Берлинского университета. В 1883 г. прусское министерство культа предложило ему доцентуру в Киле, при этом ему было указано на возможность скорого повышения в должности. В 1885 г. он был приглашен в качестве ординарного профессора физики в Высшую техническую школу в Карлсруэ. Здесь он сделал свои главные открытия, здесь же он женился на Елизавете Доль, дочери своего коллеги. Спустя два года он получил приглашение в Боннский университет на место ординарного профессора физики, в 1889 г. он принял это приглашение. В последующие, увы, столь краткие годы жизни, он получил от современников все внешние знаки признания и почитания. В 1888 г. ему была присуждена медаль Маттеучи итальянским обществом наук, в 1889 г. — премия La Caze Парижской Академии наук и в том же году Венской Императорской Академией — премия Баумгартнера. В 1890 г. Лондонское Королевское общество присудило ему медаль Румфорда, а в 1891 г. Королевская Академия в Турине —

премию Бресса. Академии Берлина, Мюнхена, Вены, Геттингена, Рима, Турина и Болоньи, а также многие другие ученые общества избрали его своим членом-корреспондентом, и прусское правительство наградило его орденом короны.

Недолго пришлось ему пользоваться плодами своей растущей славы. Он заболел мучительным костным недугом. В ноябре 1892 г. состояние здоровья Герца стало угрожающим. Произведенная тогда операция на короткое время ослабила его страдания. Герц смог продолжить чтение своих лекций, хотя это стоило ему огромного напряжения, до 7 декабря 1893 г. 1 января 1894 г. смерть освободила его от страданий.

Сколь большое внимание уделял Герц наиболее общим вопросам науки, вновь показывает последний памятник его земной деятельности — лежащая перед нами книга «Принципы механики». Он попытался дать в этой книге последовательное, исполненное внутреннего единства изложение системы механики и вывести все отдельные законы этой науки из одного основного закона. Подобную возможность логически можно рассматривать только как вероятную гипотезу. При этом Герц возвращается к старейшим теоретическим воззрениям, которые можно рассматривать как наиболее простые и естественные, и ставит вопрос, нельзя ли из них последовательно и убедительно вывести все недавно установленные всеобщие принципы механики, даже в тех случаях, когда эти принципы выступали до сих пор как индуктивные обобщения.

Первоначальное развитие научной механики связано с исследованиями равновесия и движения твердых тел, находящихся в непосредственном соприкосновении друг с другом, чему давали поясняющие примеры простые машины, рычаги, блоки, наклонные плоскости, полиспасты. Закон виртуальных скоростей является самым первоначальным общим решением всех относящихся сюда задач.

Впоследствии Галилей развил учение об инерции и движущей силе как ускоряющей силе, которую он, конечно, еще представлял себе как ряд толчков. Лишь Ньютон пришел к понятию силы, действующей на расстоянии, и к ее более близкому определению при помощи принципа равенства действия и противодействия. Как известно, на первых порах и для него самого, и для его современников понятие силы, непосредственно действующей на расстоянии, было совершенно неприемлемо. С тех пор механика развивалась далее, используя данное Ньютоном определение силы. Постепенно научились также заниматься проблемами, в которых консервативные силы, действующие на расстоянии, комбинируются с влиянием непосредственных соприкосновений; наиболее общее решение этих проблем дано в принципе д'Аламбера.

Общие принципиальные положения механики (законы движения центра тяжести, принцип сохранения плоскости вращения вращающихся систем, принцип сохранения живых сил, принцип наименьшего действия) развились на основе выдвинутых Ньютоном представлений о постоянных, следовательно также консервативных, силах притяжения между материальными точками и на основе предположения, что между этими точками существует непосредственное соприкосновение. Первоначально общие принципы механики были установлены и доказаны только на основе этих ньютоновских положений. Впоследствии путем наблюдений было установлено, что эти таким образом найденные положения могут претендовать на гораздо более общее значение, чем то, которое следовало из их доказательства. Отсюда сделали вывод, что определенные более общие признаки ньютоновских консервативных сил притяжения присущи всем силам природы, но вывести это обобщение из одной общей основы не могли.

Герц стремился найти для механики такой основной принцип, на основе которого можно было бы с полной последовательностью вывести все признанные общезначимыми законы механических процессов, и он выполнил поставленную задачу с большим остроумием и проницательностью. Достойно восхищения то, как он создал новые, своеобразно обобщенные понятия кинематики. Своим единственным исходным пунктом он выбрал воззрения старейших механических теорий, а именно представление, что все механические процессы происходят таким образом, как если бы связи между взаимодействующими телами были непосредственные. Конечно, он должен был принять гипотезу, что имеется большое число не поддающихся восприятию масс и их невидимых движений. Это необходимо для того, чтобы объяснить существование сил между телами, не находящимися в непосредственном соприкосновении. К сожалению, он уже не успел дать каких-либо примеров, которые могли бы пояснить, как он представлял себе эти гипотетические промежуточные члены, и явно потребуется большое напряжение научного воображения, чтобы объяснить на основе этой гипотезы даже простейшие случаи физических сил. По-видимому, Герц имел в виду главным образом промежуточное включение циклических систем с невидимыми движениями.

Английские физики, как лорд Кельвин в своей теории вихревых атомов и Максвелл в своей гипотезе о системе ячеек с вращающимися ядрами, положенной им в основу попытки механического объяснения электромагнитных процессов, явно чувствовали себя более удовлетворенными подобными объяснениями, чем простым общим изложением фактов и их законов, как оно представлено системой дифференциальных уравнений физики. Должен признать, что я до сих пор чувствовал себя гораздо увереннее, придерживаясь этого последнего способа изложения, однако я не хочу выдвигать никаких принципиальных возражений против того пути, который избрали столь выдающиеся физики. Конечно, стремление дать объяснение для отдельных разделов физики, исходя из развитых Герцем основных положений, встретится с большими трудностями, но в целом книга Герца об основных законах механики должна в высшей степени заинтересовать каждого читателя, которому может доставить наслаждение последовательная система динамики, представленная в совершенном и остроумном математическом изложении. Возможно, эта книга обнаружит в будущем высокую эвристическую ценность и будет способствовать открытию новых общих свойств сил природы.

А. ПУАНКАРЕ [36]

ИДЕИ ГЕРЦА В МЕХАНИКЕ

В 1890 г. слава великого электрика Герца достигла апогея; академии Европы оказывали ему всевозможные почести. Все надеялись, что ему предстоят еще многие годы жизни, которые будут столь же блестящими, как и первые годы его деятельности.

К несчастью, болезнь, которая преждевременно унесла Герца, рано настигла его и вскоре замедлила и почти полностью приостановила экспериментальную работу ученого. Он едва успел организовать свою новую лабораторию в Бонне; различные болезни лишили его и нас открытий, которые он обещал там сделать.

Он продолжал служить физическим наукам огромным влиянием, которым он пользовался, советами, которые он давал своим ученикам; но этот период отмечен только одним личным открытием, имевшим, правда, фундаментальное значение, — открытием прохождения алюминия катодными лучами.

Но если он был так жестоко лишен возможности заниматься столь дорогими ему исследованиями, он все же не оставался бездеятельным; если ему изменяли чувства, то у него остался ум, и он использовал его для глубоких размышлений о философии механики. Результаты этих размышлений были опубликованы посмертно. Здесь я хотел бы их резюмировать и кратко обсудить.

Во-первых, Герц критикует обе предлагавшиеся до сих пор основные системы, которые я назову классической и энергетической, и предлагает третью, которую я назову Герцевой.

I. КЛАССИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

§ 1 Определение силы

Первую попытку обобщить механические явления мы назовем *классической системой*; Герц ее называет великой столбовой дорогой, основные вехи которой обозначены именами — Архимед, Галилей, Ньютон и Лагранж.

В основу этого изложения кладутся понятия *пространства, времени, силы* и *массы*. В этой системе сила рассматривается как причина движения, она предшествует движению и независима от него.

Я постараюсь объяснить, по каким причинам Герц не был удовлетворен этим взглядом на вещи.

Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определение основным понятиям. Что такое *масса*? Это, — отвечает Ньютон, — произведение объема на плотность. — Лучше было бы сказать, отвечают Томсон и Тэт, что плотность есть количество массы в единице объема. — Что такое *сила*? Это, — отвечает Лагранж, — причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение. Это, — скажет Кирхгоф, — произведение массы на *ускорение*. Но тогда почему не сказать, что масса есть количество силы, рассчитанной на единицу ускорения? Эти затруднения непреодолимы.

Когда говорят, что сила есть причина движения — это метафизика, и это определение, если бы пришлось довольствоваться им, оказалось бы совершенно бесплодным. Чтобы определение могло быть полезным, оно должно научить *измерять* силу; впрочем, этого достаточно, нет никакой необходимости, чтобы оно объясняло, что такое сила *в себе*, и что она является причиной или следствием движения.

Нужно, следовательно, сначала определить равенство двух сил. Когда можно сказать, что две силы равны? Это, ответим мы, когда приложенные к одной и той же массе, они ей сообщат одно и то же ускорение, или когда, будучи направлены в прямо противоположные стороны, они окажутся в равновесии. Тем не менее это определение обманчиво. Нельзя отцепить силу, приложенную к телу, чтобы прицепить ее к другому телу, как отцепляют локомотив, чтобы присоединить его к другому поезду. Таким образом, невозможно узнать, какое ускорение сообщит какая-либо сила, приложенная к некоторому другому телу, если бы она была приложена к последнему. Нельзя знать, как будут вести себя две силы, которые направлены не прямо в противоположные стороны, если они будут направлены прямо противоположно.

Это определение стремятся, так сказать, материализовать, когда измеряют силу при помощи динамометра или уравновешивая ее гирей. Две силы F и F', которые я предположу вертикальными и направленными для упрощения снизу вверх, приложены соответственно к двум телам C и C'; я подвешиваю какое-либо тело весом P сначала к телу C, потом к телу C'; если равновесие будет иметь место в обоих случаях, я сделаю вывод, что обе силы F и F' равны между собой, поскольку они обе равны весу тела P.

Но уверен ли я, что тело P сохранило тот же вес, пока я его переносил с первого тела на второе? Далеко не так, напротив, я уверен в обратном; я знаю, что вес меняется от одной точки к другой и что он больше, например, на полюсе, чем на экваторе. Несомненно разница очень мала и практически я, конечно, не стану ее учитывать; однако безукоризненное определение должно было бы быть математически строгим. Этой строгости не существует. То, что я говорю о весе, применимо, очевидно, к силе пружины динамометра, на изменения показания которого может влиять температура и множество других обстоятельств.

Это еще не все. Нельзя сказать, что вес тела P приложен к телу C и прямо уравновешивает силу F. Если что и приложено к телу C, то это действие A тела P на это тело C; само же тело P подвержено, с одной стороны, действию собственного веса, а с другой — реакции R тела C на тело P. В результате, сила F равна силе A, потому что она ее уравновешивает; сила A равна R в силу принципа равенства действия противодействию; наконец, сила R

равна весу P, потому что она уравновешивает эту последнюю. Из этих трех равенств мы выводим как следствие равенство силы F и веса P. Мы вынуждены, следовательно, в определение равенства обеих сил вводить сам принцип равенства действия противодействию; в таком случае этот принцип должен рассматриваться как определение, а не как экспериментальный закон.

Для установления равенства обеих сил мы имеем два правила: равенство двух сил, находящихся в равновесии; равенство действия противодействию. Но, как мы рассмотрели выше, эти два правила недостаточны; мы вынуждены прибегнуть к третьему правилу и допустить, что некоторые силы, как, например, вес тела, являются постоянными по величине и направлению. Но это третье правило, как я сказал, является экспериментальным законом; оно справедливо лишь приблизительно. Оно представляет собой плохое определение.

Итак, мы возвращаемся к определению Кирхгофа: сила равна массе, умноженной на ускорение. На этот «закон Ньютона» перестают, в свою очередь, смотреть как на экспериментальный закон, он становится только определением. Но это определение также недостаточно, потому что мы не знаем, что такое масса. Оно нам позволяет, несомненно, рассчитать отношение двух сил, приложенных к одному и тому же телу в разные моменты; но оно нам ничего не говорит об отношении двух сил, приложенных к двум различным телам. Для его дополнения нужно снова прибегнуть к третьему закону Ньютона (равенство действия противодействию), считая его опять же не экспериментальным законом, а определением. Два тела A и B действуют одно на другое; ускорение тела A, умноженное на массу A, равно действию B на A, так же как произведение ускорения B на его массу равно противодействию тела A телу B. Так как по определению действие равно противодействию, массы A и B находятся в обратном отношении с ускорениями этих двух тел. Таким образом отношение этих двух масс определено и остается проверить опытным путем, постоянно ли это отношение.

Это было бы очень хорошо, если бы оба тела A и B существовали одни и не испытывали бы влияния окружающего их мира. Но ничего подобного; ускорение тела A не есть результат только действия на него тела B, но и множество других тел C, D... Чтобы применить предыдущее правило, следует разложить ускорение тела A на многие составляющие и выделить, которая из них вызывается действием тела B.

Такое разложение было бы еще возможно, если мы допустим, что действие тела C на A просто прибавляется к действию B на A, считая, что присутствие тела C не влияет на действие B на A или что присутствие тела B не изменяет действие C на A; следовательно, если бы мы предположили, что два каких-либо тела взаимно притягиваются, что они действуют друг на друга по прямой, их соединяющей, и что это действие зависит только от расстояния между ними; одним словом, если бы мы приняли гипотезу центральных сил.

Известно, что для определения масс небесных тел исходят из совершенно другого принципа. Закон тяготения гласит, что притяжение двух тел пропорционально их массам; если r — расстояние между ними, m и m' — их массы, k — постоянная, то их притяжение будет

$$\frac{kmm'}{r^2}.$$

В таком случае измеряют не массу, отношение силы к ускорению, а тяготеющую массу; не инерцию тела, а его способность притягивать.

Это — непрямой способ, применение которого теоретически не является необходимым. Вполне могло оказаться, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния, не будучи пропорциональным произведению масс, т. е. что оно равно

$$\frac{f}{r^2}$$

без того, чтобы

$$f = kmm'.$$

Если бы это было так, можно было бы тем не менее путем наблюдения относительных движений небесных тел измерить их массы.

Но имеем ли мы право принять гипотезу центральных сил? Строго ли точна эта гипотеза? Есть ли уверенность, что она никогда не будет опровергнута опытом? Кто осмелится это утверждать? И если мы должны отставить эту гипотезу, все здание, возведенное с такой тщательностью, рухнет.

Мы не имеем больше права говорить о составляющей ускорения тела A, обусловленной действием на него тела B. Мы не имеем никакого средства отделить это ускорение от того, которое вызывается телом C или каким-либо другим телом. Правило для измерения масс становится неприменимым.

Что же остается от принципа равенства действия противодействию? Если гипотеза центральных сил отброшена, этот принцип должен, следовательно, формулироваться следующим образом: геометрическая результирующая всех сил, приложенных к различным телам системы, не подверженной никакому внешнему воздействию, будет равна нулю. Или, другими словами, движение центра тяжести этой системы будет прямолинейным и равномерным.

Вот, казалось бы, способ определения массы; положение центра тяжести зависит, очевидно, от значений, придаваемых массам; надо будет расположить эти значения таким образом, чтобы движение центра тяжести было прямолинейным и равномерным; это будет всегда возможно, если третий закон Ньютона справедлив, и это будет возможно вообще только одним способом.

Но систем, не подверженных внешнему действию, не существует; все части Вселенной испытывают более или менее сильно влияние всех остальных частей. Закон движения центра тяжести строго справедлив только в случае его приложения ко Вселенной в целом.

Но тогда следовало для определения величины масс наблюдать за движением центра тяжести Вселенной. Абсурдность этого следствия легко обнаруживается; нам известны лишь относительные движения; движение центра тяжести Вселенной остается для нас навеки неизвестным.

Не остается ничего, и наши усилия были бесплодными, — мы оказались перед необходимостью прибегнуть к следующему определению, которое, по существу, является признанием нашего бессилия: массы представляют собой коэффициенты, которые удобно вводить в вычисления.

Мы могли бы переделывать наново всю механику, придавая всем массам различные значения. Эта новая механика не была бы в противоречии ни с опытными данными, ни с общими принципами динамики (принципами инерции, пропорциональности сил массам и ускорениям, равенства действия противодействию, прямолинейного и равномерного движения центра тяжести, законом площадей).

Только уравнения этой новой механики были бы менее простыми. Следует условиться: лишь первые члены будут менее простыми, т. е. те, которые мы уже узнали из опыта; может быть возможно изменять массы малых величин, без того чтобы полные уравнения не выиграли и не потеряли в простоте.

Я настаивал на этом обсуждении еще более продолжительное время, чем сам Герц. Я стремился убедительно показать, что Герц не просто искал ссоры с Галилеем и Ньютоном как немец, а наоборот, мы должны сделать вывод, что при помощи классической системы невозможно дать удовлетворительную идею о силе и массе.

§ 2. Различные возражения

Затем Герц задался вопросом, строго ли справедливы принципы механики. Он говорит, что по мнению многих физиков просто немыслимо, чтобы даже в самых отдаленных данных опыта можно было обнаружить что-либо такое, что было бы в состоянии внести изменения в твердо установленные принципы механики; и тем не менее то, что вытекает из опыта, может быть в свою очередь исправлено опытом.

После сказанного выше эти опасения покажутся излишними. Принципы динамики первоначально казались истинами, установленными экспериментами; но мы были вынуждены пользоваться ими как определениями. Именно по определению — сила равна произведению массы на ускорение; вот принцип, который в дальнейшем остается вне пределов досягаемости для последующих опытов. Также исходя из этого определения — действие равно противодействию.

Но тогда, возразят нам, эти не подлежащие проверке принципы совершенно лишены значения; опыт не может опровергнуть их, но они не могут нас научить ничему полезному; зачем же тогда изучать динамику?

Такой слишком быстрый приговор был бы несправедлив. В природе не существует совершенно изолированной системы, совершенно не подверженной никакому внешнему воздействию, однако существуют почти изолированные системы.

Если наблюдать за такой системой, можно изучить не только относительное движение ее различных частей, одной по отношению к другой, но и движение ее центра тяжести по отношению к другим частям Вселенной. Тогда можно установить, что движение этого центра тяжести — почти прямолинейно и равномерно в соответствии с третьим законом Ньютона.

Это — экспериментально установленная истина, но она не может быть опровергнута опытом, и действительно, что нам даст более точный опыт? Он нам подтвердит, что закон был лишь приблизительно справедлив, но это мы уже знали.

Теперь объясняется, как опыт мог лежать в основе принципов механики и тем не менее никогда не сможет их опровергнуть.

Но вернемся к аргументации Герца. Классическая система неполна, так как все движения, совместимые с принципами динамики, не осуществлены и даже неосуществимы в природе. Действительно, ведь очевидно, что принципы площадей и движения центра тяжести — не единственные законы, которые управляют явлениями природы? Несомненно, было бы неразумно требовать от динамики, чтобы она объединила в одной и той же формуле все законы, которые физика открыла или сможет открыть. Но от этого не делается менее справедливым, что следует считать неполной и недостаточной систему механики, где принцип сохранения энергии обойден молчанием.

Герц считает, что его система содержит все существующие в природе движения, но одновременно она содержит также много других движений, которые не существуют в природе. Система, которая исключала бы эти последние или хотя бы часть из них, лучше отражала бы действительные взаимоотношения и в этом смысле была бы, следовательно, более целесообразной. Такой системой будет, например, энергетическая, о которой мы скажем дальше и в которой основной принцип сохранения энергии вводится совершенно естественно.

Может быть не очень легко поймут, что мешает классической системе просто присоединить этот основной принцип к другим принципам этой системы?

Но Герц задает себе еще другой вопрос. Классическая система дает нам картину внешнего мира. Проста ли эта картина? Сохранены ли в ней несущественные черты, произвольно включенные наряду с существенными? Не являются ли силы, которые мы вынуждены ввести, на самом деле бесполезным механизмом, работающим вхолостую?

На этом столе лежит кусок железа; непредупрежденный наблюдатель решит, что раз нет движения, нет и силы. Как же он ошибется! Физика учит нас, что каждый атом железа притягивается всеми другими атомами Вселенной. Более того, каждый атом железа намагничен и, следовательно, подвержен действию всех магнитов Вселенной. Все электрические токи в мире также действуют на этот атом. Я чуть не забыл электростатические силы, молекулярные силы и т. д.

Если бы какие-либо из этих сил действовали одни, их действие было бы огромно; кусок железа разлетелся бы на осколки. К счастью, действуют все силы и уравновешивают друг друга таким образом, что не происходит ничего. Ваш непредубежденный наблюдатель, который видит только одно — кусок железа в состоянии покоя, заключит, очевидно, что все эти силы существуют только в вашем воображении.

Несомненно, во всех этих предположениях нет ничего абсурдного, но система, которая освободит нас от них, уже этим одним будет лучше нашей.

Невозможно, чтобы важность этого замечания не поразила. Впрочем, чтобы показать, что смысл его не чисто искусственный, мне достаточно напомнить о полемике, имевшей место несколько лет назад между двумя крупнейшими учеными — Гельмгольцем и Бертраном — по поводу взаимодействия токов. Бертран, стремясь перевести на классический язык теорию Гельмгольца, натолкнулся на неразрешимые противоречия. Каждый элемент тока должен был подвергаться действию пары, но пара состоит из двух параллельных сил, равных и противоположно направленных. Бертран рассчитал, что каждая из этих двух составляющих должна иметь настолько значительную величину, которая достаточна для разрушения проводника; отсюда он сделал вывод, что эта теория должна быть отброшена. Напротив, Гельмгольц, сторонник энергетической системы, не видел в этом никакой трудности.

Таким образом, по Герцу, классическая система должна быть оставлена: 1) потому, что невозможно дать хорошее определение силы; 2) потому, что она неполна; 3) потому, что она вводит паразитические гипотезы, которые часто способны породить трудности совершенно искусственные, но тем не менее настолько большие, что они могут остановить даже лучшие умы.

II. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

§ 1. Различные возражения

Энергетическая система возникла вслед за открытием принципа сохранения энергии. Гельмгольц придал ей определенную форму.

Начнем с определения двух величин, играющих основную роль в этой теории. Эти величины: с одной стороны, — кинетическая энергия или живая сила, с другой стороны, — потенциальная энергия.

Все изменения, которым подвергаются тела в природе, управляемы двумя экспериментальными законами.

1. Сумма кинетической и потенциальной энергии — постоянна. Это — принцип сохранения энергии.

2. Если система тел находится в положении A в момент времени t_0 и в положении B в момент времени t_1 — система всегда движется из первого положения во второе таким путем, что среднее значение разности между двумя видами энергии будет иметь наименьшую величину в интервале времени, образуемом моментами t_0 и t_1.

Это и есть принцип Гамильтона, который является одной из форм принципа наименьшего действия.

Энергетическая теория имеет следующие преимущества перед классической:

1) она более полная, т. е. принципы сохранения энергии и Гамильтона дают нам больше, чем основные принципы классической теории, и исключают некоторые движения, неосуществляемые в природе, но совместимые с классической теорией;

2) она нас освобождает от атомной гипотезы, которую было почти невозможно избежать в классической теории.

Но она вызывает в свою очередь новые трудности; прежде чем говорить о возражениях Герца, я остановлюсь на двух возражениях, пришедших мне в голову.

Определения обоих видов энергии вызвали бы трудности, почти такие же, как и определение силы и массы в первой системе. Тем не менее их было бы преодолеть легче, по крайней мере в самых простых случаях.

Представим себе изолированную систему, состоящую из некоторого числа материальных точек; предположим, что эти точки подвержены действию сил, зависящих только от взаимного расположения и расстояний между ними и не зависящих от их скоростей. В силу принципа сохранения энергии в этой системе должна существовать силовая функция.

В этом простом случае формулировка принципа сохранения энергии исключительно проста. Некоторая величина, доступная проверке опытом, должна оставаться постоянной. Эта величина и есть сумма двух членов; первый зависит только от положения материальных точек и не зависит от их скоростей; второй пропорционален квадрату этих скоростей. Такое разложение может быть произведено только одним способом.

Первый из этих членов, который я обозначу через U, и будет потенциальной энергией; второй, который я обозначу через T, будет кинетической энергией.

Очевидно, что если $(U+T)$ — константа, то какая-либо функция $(T+U)$ есть тоже постоянная

$$\varphi(T+U).$$

Но эта функция $\varphi(T+U)$ не будет суммой двух членов: одного, не зависящего от скоростей, и другого, пропорционального квадрату этих скоростей. Среди функций, которые остаются постоянными, только одна обладает этим свойством — это $T+U$ (или линейная функция $T+U$, что ничего не меняет, потому что эта линейная функция всегда может быть приведена к $T+U$ при помощи замены единицы и начала). Тогда это будет то, что мы назовем энергией; первый член будет потенциальной энергией, а второй — энергией кинетической. Определение обоих видов энергии может быть, следовательно, доведено до конца без всякой двусмысленности.

Так же дело обстоит с определением масс. Кинетическая энергия или живая сила выражается очень просто при помощи масс и относительных скоростей всех материальных точек по отношению к одной из них. Эти относительные скорости доступны наблюдению, и когда мы будем иметь выражение кинетической энергии в функции от этих относительных скоростей, коэффициенты при этом выражении дадут нам массы.

Таким образом, в этом простом случае можно без затруднения определить основные понятия. Но трудности возникают снова в более сложных случаях и, например, в том случае, если силы, вместо того чтобы зависеть только от расстояний, зависят также от скоростей. Так, Вебер полагает, что взаимодействие двух молекул электричества зависит не только от расстояния между ними, но и от скорости и ускорения. Если бы материальные точки взаимно притягивались по аналогичному закону, U зависело бы от скорости и могло содержать член, пропорциональный квадрату скорости.

Среди членов, пропорциональных квадратам скоростей, как выделить относящиеся к T или U? Каким образом, следовательно, различить обе части энергии?

Более того, как определить собственно энергию? У нас больше нет никаких оснований брать в качестве ее определения выражение $T+U$, чем любую другую функцию от $T+U$, когда исчезло свойство, характеризующее $T+U$, быть суммой двух членов, имеющих особую форму.

Но это еще не все; нужно учитывать не только собственно механическую энергию, но и другие формы энергии: тепло, химическую энергию, электрическую энергию и т. д. Принцип сохранения энергии должен быть записан так:

$$T+U+Q=\text{const},$$

где T представляет воспринимаемую кинетическую энергию, U — потенциальную энергию положения, зависящую только от положения тел, Q — внутримолекулярную энергию в термической, химической или электрической форме. Все шло бы хорошо, если бы эти три члена были абсолютно четко различимы, если бы T было пропорционально квадрату скоростей, U — независимо от этих скоростей и от состояния тела, Q — независимо от скоростей и положений тела и зависимо только от его внутреннего состояния.

Выражение энергии могло бы быть разложено только одним способом на три члена такой формы.

Но это не так. Рассмотрим наэлектризованные тела: электростатическая энергия, вызванная их взаимодействием, будет зависеть, очевидно, от их заряда, т. е. от их состояния, но она будет также зависеть и от их положения. Если эти тела будут в движении, они будут взаимодействовать электродинамически, а электродинамическая энергия будет зависеть не только от их состояния и положения, но и от их скоростей.

Мы, следовательно, не имели больше никакого способа для различения членов, которые должны входить в T, U и Q, и никакого способа разделить три составляющие полной энергии. Если $(T+U+Q)$ — постоянна, то то же самое имеет место и для любой функции $\varphi(T+U+Q)$.

Если $(T+U+Q)$ будет иметь особую форму, рассмотренную мною выше, то этой неопределенности не получится среди функций $\varphi(T+U+Q)$, остающихся постоянными, найдется только одна, которая будет иметь особую форму, и именно ее я условлюсь называть энергией.

Но, как я уже сказал, это не строго так; среди функций, остающихся постоянными, нет таких, которые могут строго подходить к этой особой форме; как же с этого момента выбирать ту, которая должна называться энергией? У нас нет ничего, в этом выборе руководствоваться нечем.

У нас остается только одна формулировка для принципа сохранения энергии: *имеется что-то, что остается постоянным*. В такой форме она оказывается в свою очередь недосягаемой для проверки опытами и сводится к своего рода тавтологии. Ясно, что если мир управляется законами, будут иметь место какие-то величины, которые останутся постоянными. Как принципы Ньютона, и по аналогичной причине, принцип сохранения энергии, основанный на опыте, не сможет быть им отменен.

Это обсуждение показывает, что переход от классической системы к системе энергетической является прогрессом, но одновременно оно показало, что этот прогресс недостаточен.

Другое возражение мне кажется еще более серьезным: принцип наименьшего действия применим к обратимым явлениям, но он совершенно неудовлетворителен в случае необратимых явлений. Попытка Гельмгольца распространить его на такого рода явления не удалась и не могла удасться; в этом смысле все еще надо сделать в будущем.

Наиболее подробно Герц развивает другие возражения, имеющие почти метафизический характер.

Если энергия, так сказать, материализована, она должна быть всегда положительна. Однако имеются случаи, когда трудно избежать рассмотрения отрицательной энергии. Рассмотрим, например, вращающийся вокруг Солнца Юпитер; общая энергия будет выражена так:

$$av^2 - \frac{b}{r} + c,$$

где a, b, c — три положительные постоянные константы, v — скорость Юпитера, r — его расстояние до Солнца.

Так как мы располагаем постоянной c, мы можем ее предположить достаточно большой, чтобы энергия была положительной; уже даже в этом есть что-то произвольное, что не может удовлетворить наш дух.

Но сверх того представим себе теперь, что какое-либо небесное тело огромной массы и с огромной скоростью пересекает Солнечную систему; когда оно пройдет через систему и снова удалится от нее на огромные расстояния, орбиты планет претерпят значительные пертурбации. Мы можем вообразить, например, что большая ось орбиты Юпитера станет много меньше, но орбита остается ощутимо круглой. Как бы ни была велика постоянная c, если новая большая ось очень мала, выражение

$$av^2 - \frac{b}{r} + c$$

станет отрицательным, и вновь возникнет трудность, которую мы считали избегнутой тем, что придали c большое значение. В итоге, мы не можем обеспечить, чтобы энергия оставалась всегда положительной.

С другой стороны, чтобы материализовать энергию, нужно ее локализовать; в отношении кинетической энергии — это просто, но не так дело обстоит с энергией потенциальной. Где локализовать потенциальную энергию, вызванную притяжением двух небесных тел? В одном из двух? В обоих? В промежуточном пространстве?

В самой формулировке принципа наименьшего действия есть что-то неприемлемое для разума. Чтобы попасть из одной точки в другую, материальная молекула, свободная от воздействия любой силы, но принужденная двигаться по какой-либо поверхности, будет двигаться по геодезической линии, т. е. по наикратчайшему пути.

Эта молекула как бы знает точку, куда ее хотят привести, предвидит время, которое у нее займет достижение этой точки, следуя по тому или иному пути, и выбирает затем наиболее подходящий путь. Формулировка представляет нам, так сказать, ее как существо, одушевленное и свободное. Ясно, что следовало лучше заменить эту формулировку менее поражающей, в которой, как говорят философы, конечные цели не будут казаться заменяющими действующие причины.

§ 2. Возражение, относящееся к качению шара по плоскости

Последнее возражение, кажется, наиболее поразившее Герца, имеет несколько отличный характер.

Известно, что называется системой со связями; представим сначала две точки, соединенные твердым металлическим прутом так, что расстояние между ними поддерживается постоянным, или, в более общем случае, представим себе, что какой-либо механизм поддерживает отношение между координатами двух или многих точек системы. Это и есть первый вид связи, которая называется «жесткой связью».

Представим себе теперь, что шар принужден катиться по плоскости. Скорость точки соприкосновения должна быть нулевой; мы имеем, следовательно, второй тип связи, которая выражается отношением не только между координатами различных точек системы, но и их координатами и их скоростями.

Системы, где имеются связи второго типа, обладают удивительным свойством, которое я постараюсь объяснить на только что приведенном простом примере, т. е. на примере шара, катящегося по горизонтальной плоскости.

Пусть O — точка на горизонтальной поверхности и C — центр шара.

Чтобы хорошо определить положение движущегося шара, я возьму три неподвижные оси координат O_x, O_y и O_z, из которых две первые расположены в горизонтальной плоскости, по которой катится шар; возьмем также три оси координат, неизменно связанные с шаром, C_ξ, C_η и C_ζ.

Положение шара будет полностью определено, когда мы зададим две координаты точки соприкосновения и девять направляющих косинусов подвижных осей по отношению к неподвижным осям. Пусть A — такое положение шара, при котором точка соприкосновения лежит в точке начала координат O, а подвижные оси параллельны неподвижным.

Координаты точки соприкосновения будут

$$x=0, \qquad y=0,$$

а девять направляющих косинусов будут

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Сообщим шару бесконечно малое вращение ε вокруг оси C_ξ; он придет в положение B, в котором координаты точки соприкосновения будут

$$x=0, \qquad y=0,$$

а девять косинусов

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon. \end{matrix}$$

Но такое вращение невозможно потому, что оно заставит шар скользить, а не катиться по плоскости. Следовательно, невозможно перейти из положения A в бесконечно близкое соседнее положение B прямо, так сказать в результате бесконечно малого движения. Но мы увидим, что этот переход может произойти непрямо, т. е. конечным движением.

Будем исходить из положения A; заставим шар катиться по плоскости таким образом, что мгновенная ось вращения будет находиться в горизонтальной плоскости и в каждый момент времени параллельна оси O_y, и остановимся, когда ось C_ξ станет вертикальной и параллельной O_z. Мы придем в положение D, в котором координаты точки соприкосновения станут

$$x=\frac{\pi}{2}R, \quad y=0,$$

где R — радиус шара, а девять косинусов будут:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0. \end{matrix}$$

В положении D точка соприкосновения находится на конце оси C_ξ, которая вертикальна.

Сообщим шару вращение ε вокруг оси C_ξ; это вращение является поворотом вокруг вертикальной оси, проходящей через точку соприкосновения, оно не включает никакого скольжения, а значит оно совместимо со связями.

Шар попадает в положение E, в котором точки соприкосновения будут:

$$x=\frac{\pi}{2}R, \quad y=0,$$

а косинусы

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0. \end{matrix}$$

Заставим теперь шар катиться таким образом, чтобы ось вращения в каждый момент времени оставалась постоянно параллельной O_y и, следовательно, чтобы соприкосновение все время имело место на оси O_x. Остановимся, когда точка соприкосновения вернется в исходную точку O. Легко видеть, что мы прибыли в положение B.

Можно, значит, попадать из положения A в положение B, проходя через положения D и E.

Герц называет **голономными** такие системы, для которых, если связи не позволяют попадать прямо из некоторого положения в другое бесконечно близкое, то они точно так же не позволяют попадать из одного положения в другое не прямо. Это — системы, имеющие лишь твердые связи.

Как видим, наш шар не есть голономная система.

Итак, оказывается, что принцип наименьшего действия не применим к неголономным системам.

Действительно, из положения A можно попасть в положение B не только указанным мною путем, но, несомненно, и многими другими путями; среди этих путей найдется, очевидно, один, который будет соответствовать наименьшему действию; шар должен был бы следовать этим путем при движении из A в B; однако ничего подобного не происходит; каковы бы ни были начальные условия движения, шар никогда не пойдет из A в B.

Более того, если шар действительно переходит из положения A в другое положение A', он не всегда последует путем, который будет соответствовать минимуму действия.

Принцип наименьшего действия перестает быть справедливым.

Герц считает, что в этом случае шар, который подчинится этому принципу, уподобится живому существу, которое сознательно преследует определенную цель, тогда как шар, следующий закону Природы, представит собой равномерно катящуюся неодушевленную массу... Но скажут, что подобные связи не существуют в Природе, такое качение без скольжения все же на самом деле является качением с очень маленьким скольжением. Это явление входит в число необратимых явлений, таких, как трение, еще мало известных и к которым мы еще **не умеем** применять истинные принципы механики.

Герц отмечает, что качение без скольжения не противоречит ни принципу энергии, ни какому-либо из законов, известных Физике; этот процесс осуществляется в видимом мире с таким большим приближением, что на предпосылке его точного выполнения основаны даже интеграционные машины (планиметры, гармонические анализаторы и т. д.). Поэтому нельзя исключать существование этого процесса как невозможное... Является ли он таким или может быть осуществлен лишь приблизительно — трудности не исчезнут. От каждого основного закона нашей системы механики мы должны требовать, чтобы он, будучи применен к задаче с приблизительно точными условиями, всегда давал приблизительно точные результаты, но не совершенно неверные. Впрочем и остальные связи, твердые связи, в природе осуществляются лишь приблизительно; тем не менее их не исключают.

III. СИСТЕМА ГЕРЦА

Вот какую систему предлагает Герц вместо двух критикуемых теорий. Эта система покоится на следующих гипотезах:

1. В природе имеются лишь системы со связями, свободные от действия любой внешней силы.

2. Если некоторые тела кажутся нам подчиненными каким-либо силам, это значит, что они **связаны** с другими телами, для нас невидимыми.

Материальная точка, кажущаяся нам свободной, не описывает, тем не менее, прямолинейной траектории. Прежние механики говорили, что точка отклоняется от прямой потому, что она подчиняется какой-то силе; Герц говорит, что она отклоняется потому, что она не свободна, но связана с другими невидимыми точками.

Эта гипотеза на первый взгляд кажется странной. Зачем, кроме видимых тел, вводить невидимые гипотетические тела? Но, отвечает Герц, обе старые теории также вынуждены предполагать, кроме видимых тел, какие-то невидимые сущности; классическая теория вводит силы, энергетическая — энергию; но эти невидимые сущности, сила и энергия, имеют неизвестную таинственную природу; гипотетические же сущности, которые предполагаю я, имеют, наоборот, совершенно такую же природу, как и видимые тела. Не проще ли это и естественнее?

По этому поводу можно спорить и утверждать, что сущности старинных теорий должны быть сохранены как раз по причине их таинственной природы. Уважать эту таинственность значит признать свое невежество, и поскольку наше невежество несомненно, не следует ли лучше признать его, чем скрывать? Но посмотрим дальше, какой вывод делает Герц из своих гипотез.

Движения систем со связями, без внешних сил, управляются единым законом.

Среди движений, совместимых со связями, осуществляется то, для которого сумма масс, умноженных на квадрат ускорений, будет минимальной.

Этот принцип соответствует принципу наименьшего действия, если система голономная, но он более общий, так как применим также к системам неголономным.

Чтобы лучше убедиться в значении этого принципа, возьмем простой пример точки, вынужденной двигаться по поверхности. Здесь мы имеем только одну материальную точку, следовательно, ускорение должно быть минимальным; для этого необходимо, чтобы тангенциальное ускорение было равно нулю. Так как это ускорение равно $\frac{dv}{dt}$, где v — скорость, а t — время, то отсюда следует, что v — есть константа, и движение точки равномерно. Нужно, кроме того, чтобы нормальное ускорение было минимальным, а оно равно $\frac{v^2}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны траектории, или равно $\frac{v^2}{R\cos\varphi}$, где R — радиус кривизны нормального сечения поверхности и φ — угол между плоскостью касательной к траектории и нормалью к поверхности.

При этом скорость предполагается известной по величине и направлению. Следовательно, v и R известны. Надо также, чтобы $\cos\varphi$ равнялся единице, тогда касательная поверхность будет нормальна к поверхности, т. е. материальная точка будет описывать геодезическую линию.

Чтобы дать теперь понять, как можно объяснить движение систем, которые **представляются** нам подчиненными некоторым силам, я возьму еще один простой пример, а именно — регулятор с шарами. Это хорошо известный прибор состоит из параллелограмма на шарнирах $ABCD$: на противоположных углах B и D укреплены шары значительной массы; верхний угол A неподвижен, на нижнем углу C имеется кольцо, которое может скользить вдоль неподвижного вертикального стержня AX; всему прибору сообщено вращательное движение вокруг стержня AX.

К кольцу C подвешен металлический прут T.

Центробежная сила стремится отклонить шары и, следовательно, поднять кольцо и прут T. Значит этот прут подвергается тяге, которая тем сильнее, чем быстрее вращение.

Предположим теперь наблюдателя, который видит только прут, и представим себе, что шары, стержень AX и параллелограмм сделаны из материала, невидимого для него. Этот наблюдатель будет констатировать наличие тяги, действующей на прут T, но так как он не увидит то, что ее производит, то этот наблюдатель припишет указанную тягу таинственной причине — некой «силе», некоему притяжению, — действующей от точки A на прут.

Итак, по Герцу, каждый раз, когда мы представляем себе какую-либо силу, мы оказываемся обманутыми аналогичной иллюзией. Тогда возникает вопрос: можно ли вообразить такую шарнирную систему, которая имитирует систему сил, определяемую каким-либо законом или хотя бы представляет ее с достаточным приближением? Ответ должен быть положительным; я удовольствуюсь тем, что назову одну теорему г. Кёнига, которая сможет послужить основой для иллюстрации этого факта.

Вот эта теорема: всегда можно себе представить такую шарнирную систему, одна точка которой описывает кривую или какую-либо алгебраическую поверхность, или в более общем случае можно представить такую шарнирную систему, что в силу наложенных на нее связей координаты различных точек этой системы будут подчинены произвольно заданным любым алгебраическим соотношениям.

Только гипотезы, к которым мы придем, могут оказаться очень сложными.

Впрочем это не первая попытка, предпринятая в этом направлении. Невозможно не сделать сближения между гипотезами Герца и теорией лорда Кельвина о жиростатической упругости.

Как известно, лорд Кельвин стремился объяснить свойства эфира, не прибегая ни к каким силам. Он даже придал своей гипотезе определенную форму и представляет эфир с помощью одной из тех механических моделей, которые любят англичане. Английские ученые, довольные тем, что сумели воплотить свои идеи, сделать их осязаемыми, не испуганы усложнениями этих моделей, в которых все возрастает количество прутов, шатунов, кулис, как в механической мастерской.

Опишем, чтобы дать о ней представление, модель, представляющую жиростатический эфир. Эфир как бы образован из своего рода сетки. Каждая ячейка этой сетки есть тетраэдр. Каждая из граней этого тетраэдра образована двумя стержнями, одним сплошным, а другим полым, заключенными один в другом: эта грань растяжима, но не сгибаема.

В каждой ячейке находится прибор, состоящий из трех стержней, неподвижно скрепленных один с другим и образующих трехгранник. Каждый из этих трех стержней опирается на две противоположные грани тетраэдра и, наконец, на каждом из них имеется четыре жироскопа.

В только что описанной мной системе нет потенциальной энергии, а только кинетическая энергия тетраэдров и жироскопов. Тем не менее, построенная таким образом среда будет вести себя как среда упругая; она будет передавать вертикальные волны в точности так же, как эфир.

Я добавлю еще одну вещь: с шарнирными системами такого типа, включающими жироскопы, можно не только имитировать

все силы, которые мы находим в природе, но также и те, которые природа не смогла бы осуществить; именно в этом состоит цель, которую поставил перед собой лорд Кельвин; он хотел объяснить некоторые свойства эфира, которые, как ему казалось, были не в состоянии объяснить обычные гипотезы.

Известно, что ось жироскопа стремится сохранить определенное направление в пространстве: если она отклоняется от этого направления, то стремится в него вернуться, как если бы она была побуждаема к этому некой управляющей силой. Эта кажущаяся сила, которая стремится поддерживать направление жироскопа, не уравновешивается, как реальные силы, противодействием, равным и противоположно направленным. Она, следовательно, не подчиняется закону действия и противодействия и его следствиям, таким, как закон площадей, которым подчинены естественные силы.

Понятно тогда, что жиростатическая гипотеза, освобождающая от этого ограничительного правила, могла бы помочь разобраться в фактах, которые не могли быть объяснены обычными гипотезами, подчиняющимися этому правилу.

Что же в конце концов следует думать о теории Герца? Несомненно интересная, она все же не удовлетворяет меня полностью потому, что оставляет слишком большое место гипотезе.

Герц избежал некоторых возражений, которые его тревожили; но не создается впечатления, что он устранил их все.

Трудности, которые обсуждались нами пространно в начале этой статьи, могли бы быть резюмированы следующим образом: принципы динамики были изложены различными способами, но ни разу не было достаточно четко разграничено, что такое определение, что — экспериментальная истина и что — математическая теорема. В системе Герца также нет такого четкого разграничения и, сверх того, введен четвертый элемент — гипотеза.

Однако его способ изложения полезен уже тем, что он нов, он заставляет нас думать, освобождаться от старых представлений. Мы не можем еще видеть все сооружение целиком; имеет значение уже то, что имеется новая перспектива, что на это сооружение смотрят с новой точки зрения.

А. Т. ГРИГОРЬЯН, Л. С. ПОЛАК

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ МЕХАНИКИ ГЕНРИХА ГЕРЦА

В XVII в. трудами Галилея и Ньютона были заложены принципиальные основы классической механики.

В XVIII и XIX вв. Эйлер, д'Аламбер, Лагранж, Гамильтон, Якоби, Остроградский, исходя из этих основ, построили великолепное здание аналитической механики и разработали ее мощные математические методы.

Казалось, что механика — этот «рай математических наук», как назвал ее Леонардо да Винчи, — достигла высокой степени совершенства и своей завершенности. Но завершенность эта была лишь кажущейся, ибо в самих основных понятиях и законах механики заключались многочисленные трудности, которые были только временно отодвинуты, а отнюдь не разрешены мощным прогрессом аналитической механики.

Еще до коренного пересмотра физического содержания основных принципов классической механики, осуществленного теорией относительности и квантовой теорией, появился ряд работ, пытавшихся по-новому осмыслить эти принципы. Эти попытки были связаны прежде всего с тем, что наряду с физикой дискретных тел возникла физика континуума поля, потребовавшая критического пересмотра основ классической механики.

Такой попыткой была, в частности, замечательная книга Г. Герца «Принципы механики, изложенные в новой связи» [1], которая сыграла важную роль не только в развитии классической механики, но и в исторической подготовке теории относительности Эйнштейна.

КРАТКИЕ БИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Знаменитый немецкий физик Генрих Рудольф Герц родился в 1857 г. 22 февраля в г. Гамбурге в семье адвоката, а позже почетного сенатора, доктора Густава Герца. Он получил среднее образование в родном городе и инженерное образование в Высшем техническом училище в Дрездене. В школьные годы Герц увлекался работой на токарных и столярных станках, а в воскресные дни посещал ремесленную школу.

Серьезное отношение к ремеслу и успехи молодого Герца в области практической механики характеризуются следующим эпизодом. Позже, когда Герц стал известным профессором, старый учитель его по токарному делу, узнав об этом, заявил с сожалением: «Как жаль! Он был бы прекрасным токарем».

Окончив среднее образование, Герц решил стать инженером и после обучения в Дрезденском техническом училище принимал участие в строительстве моста через р. Майн во Франкфурте на Майне. Однако вскоре он решительно изменил свои намерения и в 1877 г. поступил в Мюнхенский университет для изучения физических наук.

В 1878 г. Герц переехал в Берлин, где стал работать под руководством Гельмгольца в физической лаборатории университета. Герц с увлечением принялся за разработку предложенной Гельмгольцем темы «об инертности движущегося электричества». Это исследование было премировано Берлинским университетом.

После получения доцентуры в Киле Герц в 1884 г. был избран ординарным профессором Высшей технической школы в Карлсруэ.

---

[1] H. Hertz. Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Gesam. Werke, Bd. III, Leipzig, 1910.

Здесь с 1885 по 1889 г. он выполнял свои основные исследования в области электродинамики.

В последний период своей жизни (1889—1894 гг.) Герц работал в должности профессора Университета в Бонне. В это время он и написал свою книгу «Die Principien der Mechanik», вышедшую в свет уже после его смерти.

В 1892 г. Герц тяжело заболел туберкулезом, и 1 января 1894 г. в возрасте 37 лет умер. Преждевременная смерть знаменитого физика вызвала глубочайшее сожаление у современников. В связи со смертью своего гениального ученика Гельмгольц писал: «В старое классическое время сказали бы, что он пал жертвою зависти богов».

Величайшие заслуги Герца были признаны во всем мире. Он был награжден премиями Парижской, Берлинской, Лондонской, Туринской, Венской Академий наук и избран членом-корреспондентом Академий Берлина, Мюнхена, Вены, Геттингена, Рима, Турина, Болоньи и многих других научных обществ.

Г. Герц был сторонником материалистических идей Фарадея и Максвелла, заложивших основы теории электромагнитных процессов, как процессов близкодействия. Опираясь на теорию Фарадея—Максвелла, Герц экспериментально доказал существование электромагнитных волн и исследовал их основные свойства. Волны Герца сыграли огромную роль в развитии науки и техники и обусловили возникновение беспроволочной телеграфии, радиосвязи, телевидения, радиолокации и т. д.

В честь Герца его имя присвоено Институту по исследованию колебаний в составе Академии наук Германской Демократической Республики; термином «Герц» названа единица частоты колебаний (1 колебание в секунду).

Впервые передача электромагнитных возмущений была практически осуществлена посредством волн Герца русским ученым А. С. Поповым. Сконструировав прибор для улавливания и регистрации электромагнитных колебаний в атмосфере («грозоотметчик»), А. С. Попов осуществил тем самым первую в мире приемную радиостанцию («Прибор для обнаружения и регистрации электрических колебаний». Журнал Русского физико-химического общества, 1896 г.).

12/24 марта 1896 г. А. С. Попов, выступая перед членами Русского физико-химического общества по вопросу передачи сигналов без проводов, передал первую в мире радиограмму, состоявшую из двух слов «Генрих Герц». Этим актом была закреплена бессмертная заслуга Герца в открытии электромагнитных волн.

ФИЛОСОФСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ГЕРЦА

Предсмертное сочинение Герца «Принципы механики» не ставило целью решение практических задач или разработку методов механики. Цель этого сочинения — показать, что общие теоремы механики и весь ее математический аппарат могут быть последовательно развиты, исходя из единого принципа.

В свете марксистско-ленинской философии и успехов новой физики ясно, что решение Герцем указанной проблемы имело механистический характер. Однако в его основе лежала правильная материалистическая тенденция рассматривать все явления природы как проявления движения материи. Ограниченность материализма Герца рамками механистического мировоззрения и некоторое влияние на него многочисленных разновидностей кантианской философии явились причиной его непоследовательности, колебаний между кантианством и материализмом.

Используя эти колебания и отдельные отклонения от последовательного материалистического мировоззрения, идеалисты различных направлений пытались, извращая факты, доказать, что философская концепция, лежащая в основе «Принципов механики» Герца, имеет кантианский или махистский характер. В книге «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин разоблачает эти маневры идеалистов и защищает материалистическую основу «Принципов механики» замечательного немецкого физика. «Г. Коген, — пишет Ленин, — старается завербовать себе в союзники знаменитого физика Генриха Герца. Герц наш, он кантианец, у него попадается допущение априори! Герц наш, он махист, — спорит махист Клейнпетер, — ибо у Герца проглядывает «тот же субъективистский взгляд, как и у Маха, на сущность наших понятий». Этот курьезный спор о том, *чей* Герц, дает хороший образчик того, как идеалистические философы ловят малейшую ошибку, малейшую неясность в выражении у знаменитых естествоиспытателей, чтобы оправдать свою подновленную защиту фидеизма. На самом деле, философское введение Г. Герца к его «Механике» показывает обычную точку зрения естествоиспытателя, напуганного профессорским воем против «метафизики» материализма, но никак не могущего преодолеть стихийного убеждения в реальности внешнего мира. Это признает сам Клейнпетер, с одной стороны, бросающий в массу читателей насквозь лживые популярные брошюрки о теории познания *естествознания*, причем Мах фигурирует рядом с Герцем, — с другой стороны, в специальных философских статьях признающийся, что «Герц, в противоположность Маху и Пирсону, держится все еще предрассудка насчет возможности механически объяснить всю физику», что он сохраняет понятие вещи в себе и «обычную точку зрения физиков», что Герц «все еще держался за существование мира в себе» и т. д.[2]».

Подчеркивая непоследовательность Герца, В. И. Ленин в то же время настойчиво выделяет основную материалистическую линию механики Герца, противопоставляя ее кантианскому априоризму и махистскому субъективизму. Ленин пишет: «Рей тоже абсолютно не знаком с диалектикой. Но и он вынужден констатировать, что среди новейших физиков есть продолжатели традиций «механизма» (т. е. материализма). По пути «механизма», — говорит он, — идут не только Кирхгоф, Герц, Больцман, Максвелл, Гельмгольц, лорд Кельвин» [3]. И далее: «. . . Герцу даже и не приходит в голову возможность нематериалистического взгляда на энергию. Для философов энергетика послужила поводом к бегству от материализма к идеализму. Естествоиспытатель смотрит на энергетику, как на удобный способ излагать законы материального движения в такое время, когда физики, если можно так выразиться, от атома отошли, а до электрона не дошли» [4].

---

[2] В. И. Ленин. Соч., т. 14, стр. 270—271.
[3] Там же, стр. 251.
[4] Там же, стр. 271.

Во введении к своей «Механике» Герц выдвигает в качестве ближайшей и важнейшей цели научного познания предвидение полезных будущих открытий и организацию, в соответствии с ними, наших практических и теоретических усилий в настоящем.

В процессе познания, по мнению Герца, исходят из уже накопленного опыта. Метод же выведения (предвидения) будущего из прошлого состоит в следующем: из накопленного и многократно проверенного в процессе практики опытного материала создаются «внутренние образы» (т. е. понятия) внешних предметов. К этим «образам» предъявляется следующее основное требование: логически необходимые следствия этих «образов» или понятий должны являться «образами» естественно необходимых следствий свойств внешних предметов. Чтобы это требование могло быть осуществимо, очевидно, должно быть известное согласие между природой и нашим мышлением. Практика показывает, что такое согласие существует в действительности. Согласованность, в основе которой лежит общность законов мышления и внешнего мира, объясняет, почему логически необходимые следствия правильных научных понятий непременно осуществляются независимо от человека или при его содействии, как только появляются все необходимые условия.

Эти основные гносеологические положения Герца выражают его материалистический взгляд на цели и метод научного познания природы. Как естествоиспытатель Герц убежден в объективности природы. Познав объективные закономерности развития внешних предметов, можно сознательно ускорить наступление будущего, т. е. использовать объективные законы природы в интересах человека.

КНИГА ГЕРЦА «ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ» И ЕЕ МЕСТО В РАЗВИТИИ МЕХАНИКИ

Особое место среди вариационных принципов механики, которые должны указать интегралы или функции, имеющие экстремум в действительном движении системы, занимает принцип наименьшего принуждения Гаусса. Этот принцип является общим началом и может быть выражен одной из самых простых аналитических формулировок, в которой нахождение уравнений движения любой системы, голономной или неголономной, сводится к нахождению минимума функции второй степени.

Установление этого принципа, опубликованного Гауссом в 1829 г., связано, как он сам указывает, с его работами по способу наименьших квадратов.

В короткой заметке [5] Гаусс с изумительной ясностью и лаконичностью не только осветил вопросы, связанные с формулируемым им принципом, но также высказал весьма интересные методологические соображения и кратко остановился на существовавших тогда принципах механики. Рассматривая вопрос о значении принципов механики, он писал: «Если для прогрессивного развития науки и для индивидуального исследования представляется более удобным идти от легкого к тому, что кажется более трудным, а от простых законов к более сложным, то, с другой стороны, наш ум, дойдя до более высокой точки зрения, требует обратного движения, в свете которого вся статика представляется ему в качестве частного случая динамики. И упомянутый нами геометр (речь идет о Лагранже — *Авт.*), по-видимому, оценил это обратное движение, представляя в качестве преимущества принципа наименьшего действия возможность охватить одновременно законы движения и законы равновесия, если его рассматривать в качестве принципа наибольшей или наименьшей живой силы. Но надо признать, что эта мысль является более остроумной, чем верной, так как в этих двух случаях минимум имеет место при совершенно различных условиях» [6]. Такая точка зрения Гаусса естественно приводит его к формулировке общего принципа механики — принципа наименьшего принуждения.

Принцип Гаусса — это попытка обобщения, которая позволяет определить движение системы точек, подчиненных некоторым связям, если известно движение соответствующей системы без связей.

[5] К. Гаусс. Об одном новом общем принципе механики. Цит. по приложению к книге: Лагранж. Аналитическая механика, т. 2. М.—Л., Гос. изд-во техн. теор. лит., 1950, стр. 411—414.

[6] Там же, стр. 412.

Чтобы выразить принцип Гаусса математически, обозначим через m_r массу частицы r, которая в начальный момент движения находится в точке A_r; через B_r — точку, в которую попала частица через заданное время dt, если бы двигалась свободно; через C_r — точку, в которую фактически попадает частица в естественном движении при наложенных на нее связях. Сумма

$$Z = \sum m_r (B_r C_r)^2 \quad \text{или} \quad Z = \sum_r m_r \left(X_r - \frac{\ddot{x}}{m_r} \right)^2 \tag{1}$$

была названа Гауссом «принуждением» и он показал, что эта сумма меньше для действительно осуществляющегося движения, чем для всякого другого движения, совместимого с наложенными связями.

Зоммерфельд замечает, что «это начало механики равноценно принципу д'Аламбера и, подобно последнему, представляет собой дифференциальный принцип, потому что оно трактует поведение системы только в настоящий (не в будущий или прошедший) момент времени» [7].

Строгая формулировка принципа Гаусса такова: для материальной системы со связями без трения, находящейся под действием каких угодно сил, естественное движение отличается от всех остальных, совместных со связями, тем, что для него принуждение со стороны связей (так же как и давление на связь) имеет наименьшее значение, если исключить свободное движение.

Глубокое развитие идей Гаусса в связи с идеей Гельмгольца о кинетическом объяснении всех видов энергии при помощи «скрытых движений» дал в 90-х годах XIX в. Генрих Герц, разработавший принцип прямейшего пути. Познавательная ценность этого принципа состоит в том, что он сводит задачи механики к проблеме геодезических линий, коренным образом геометризует классическую динамику.

Во введении к «Принципам механики» Герц характеризует существующие картины механических процессов. Он считает, что

[7] А. Зоммерфельд. Механика. ИЛ, 1947, стр. 295.

до середины XIX в. полным объяснением явлений природы считалось сведение этих явлений к бесчисленным, действующим на расстоянии силам между атомами материи. Но в конце XIX в., под влиянием резко возросшего значения принципа сохранения энергии, физика стала предпочитать рассматривать «относящиеся к ее области явления как превращения одной формы энергии в другую и считать своей конечной целью сведение явлений к законам превращения энергии»[8]. Тогда в механике понятие силы уступает место понятию энергии. Однако если картина, основанная на силе, была построена, «то о второй картине этого, разумеется, сказать нельзя»[9]. По мнению Герца, при этом исходят из четырех независимых друг от друга основных понятий, отношения между которыми должны составить содержание механики. Два из них, по Герцу, носят математический характер — пространство и время; два других — масса и энергия — вводятся как две физические сущности, являющиеся определенными неуничтожаемыми количествами. Из анализа результатов опыта выводится следствие, что энергию можно разделить на две части, одна из которых зависит только от скорости изменения обобщенных координат, а другая — от самих координат. Здесь связаны между собой понятия пространства, массы и энергии. Для того же, чтобы связать все четыре понятия, а вместе с тем, и течение во времени, воспользуемся одним из интегральных принципов обыкновенной механики, пользующихся понятием энергии. «Какой из принципов мы используем, практически безразлично; можно воспользоваться принципом Гамильтона, что мы имеем полное право сделать»[10].

В каком отношении эта картина находится к картине классической механики? Прежде всего, она охватывает значительно больше особенностей движения, чем классическая, основанная на понятии силы.

[8] См. стр. 28 настоящей книги

[9] Там же, стр. 28.

[10] Там же.

Основные понятия этой картины могут быть связаны принципом Гамильтона, смысл которого Герц усматривает в том, что разность между кинетической и потенциальной энергией должна быть возможно малой на протяжении всего времени движения.

Хотя этот закон и не является простым по форме, все же он в одном-единственном определении однозначно воспроизводит все естественные превращения энергии из одной формы в другую и тем самым позволяет полностью предвидеть будущее развитие физических явлений (по крайней мере обратимых). Однако принцип Гамильтона в обычной его форме не охватывает движение систем с неголономными связями.

Герц выдвигает третью систему принципов механики, которая отличается от первых двух главным образом тем, что она пытается исходить только из трех независимых основных представлений: времени, пространства и массы. Герц ссылается при этом на Кирхгофа[11], который в своем курсе механики еще раньше отметил, что эти три независимые друг от друга понятия необходимы, но также и достаточны для развития механики. Вместо понятия силы и энергии, исключаемых Герцем из основных понятий, он вводит представление о скрытых связях, скрытых массах и скрытых движениях.

Основной закон, связывающий фундаментальные понятия пространства, времени и массы воедино, Герц выражает в форме, представляющей весьма тесную аналогию с обычным законом инерции: «каждое естественное движение самостоятельной материальной системы состоит в том, что система движется с постоянной скоростью по одному из своих прямейших путей»[12].

Это положение объединяет закон инерции и принцип наименьшего принуждения Гаусса в одно единое утверждение.

Прямым путем Герц называет такой, для которого все его элементы имеют одинаковое направление, а кривым — такой, когда

[11] G. Kirchhoff. Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. I, Mechanik. Leipzig. 1872, S. I. и сл.

[12] H. Hertz. Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Gesam. Werke, Bd. III, Leipzig, 1910, S. 33, Einleitung.

направление его элементов изменяется. В качестве критерия кривизны, как и в геометрии точки, вводится скорость изменения направления при изменении положения. Из всех возможных путей, в тех случаях когда движение системы ограничено связями, выделяются некоторые, обладающие особенно простыми свойствами. Это прежде всего пути, которые во всех положениях искривлены так незначительно, как это только возможно. Именно их Герц называет прямейшими путями системы. Затем идут пути кратчайшие. При известных условиях понятия прямейших и кратчайших путей совпадают: «Это соотношение, — говорит Герц, — будет нам вполне понятно, если мы вспомним теорию поверхностей... Перечисление и систематизация всех возникающих при этом соотношений относится к геометрии системы точек... Так как система n точек выражает $3n$ многообразие движения, которое, однако, может быть уменьшено связями системы до любого произвольного числа, то в результате возникает большое число аналогий с геометрией многомерного пространства, причем эти аналогии заходят отчасти так далеко, что те же самые положения и обозначения могут иметь место как здесь, так и там»[13].

Смысл такого метода изложения, по мнению Герца, состоит прежде всего в том, что он устраняет искусственное разделение механики точки и механики системы, позволяя рассматривать любое движение как движение системы. Кроме того, такой геометризованный метод выражения «ярко оттеняет тот факт, что метод изложения Гамильтона скрывает свои корни не в особых физических основах механики, как это обычно принимают, но что он, собственно говоря, является чисто геометрическим методом, который может быть обоснован и развит совершенно независимо от механики и который не находится с ней в более тесной связи, чем любое другое используемое механикой геометрическое познание»[14]. Это нашло свое выражение в аналогиях, которые обна-

[13] Там же, стр. 36.
[14] Там же, стр. 38—39.

ружены при сопоставлении идей Гамильтона в механике и геометрии многомерного пространства.

Герц доказывает, что для голономных систем каждый прямейший путь есть геодезический, и наоборот, причем геодезическим путем материальной системы он называет путь, длина которого между двумя любыми положениями отличается лишь на бесконечно малую величину высшего порядка от длины любого другого бесконечно близкого соседнего пути между теми же положениями (в неголономных системах это не имеет места).

Кратчайший путь между двумя положениями есть геодезический, но, геодезический путь не есть обязательно кратчайший, хотя он всегда есть кратчайший между любыми двумя достаточно близкими соседними его положениями, находящимися на конечном удалении друг от друга.

Определим длину ds элемента траектории в случае такого смещения системы, когда точка r передвигается из A_r в B_r, уравнением

$$m\,(ds)^2 = \sum m_r\,(A_rB_r)^2,$$

где m — масса системы.

Угол α между ds и другим элементом траектории, по которой точка r смещается из A'_r в B'_r, определяется уравнением

$$mdsds' \cos\alpha = \sum m_r\,(A_rB_r)\,(A'_rB'_r).$$

Эти выражения распространяются и на пространство трех измерений.

Кривизна траектории в какой-либо точке определяется как предел отношения угла между направлениями двух крайних участков элемента траектории к его длине, когда он становится бесконечно малым. В случае системы, свободной от связей, кривизна будет равна нулю (движение по «прямой» линии). Герц показал, что из всех элементов пути, совместимых со связями и имеющих заданное направление, система выбирает тот, у которого кривизна наименьшая.

Необходимым и достаточным аналитическим условием геодезического пути является требование, чтобы интеграл между какими-либо двумя положениями пути имел вариацию, равную нулю, причем вариации должны исчезать на пределах интеграла и вариации координат и их дифференциалы удовлетворять уравнениям — условиям системы.

Исчезновение вариации интеграла не есть, однако, достаточное условие для того, чтобы путь между двумя конечными положениями был кратчайшим; для этого необходимо, чтобы его вторая вариация была существенно положительной. Для достаточно близких соседних положений пути это условие всегда выполняется.

Уже из этого изложения можно видеть две особенности механики Герца, связанные с тем, что в исходных предпосылках он ограничивается тремя, а не четырьмя (как это имеет место у Ньютона и Гамильтона) понятиями. Во-первых, отсутствие среди основных понятий понятия силы (или энергии), что приводит к усложнению изложения и не дает простого пути для решения конкретных задач. Во-вторых, особо важная роль, отводящаяся геометрическим образам. Если первая особенность ограничивала практическое значение его механики, то вторая была чрезвычайно важным этапом на пути синтеза аналитического и геометрического аспектов механики.

Найдем теперь, следуя Герцу, дифференциальные уравнения геодезического пути в прямоугольных координатах. $3n$ прямоугольных координат x_ν, которые мы сначала рассматриваем как функции любой переменной, должны до и после вариации удовлетворять i уравнениям:

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{L\nu}\, dx_\nu = 0, \tag{2}$$

где L принимает значение от 1 до i, а величины $x_{L\nu}$ следует рассматривать как непрерывные функции x_ν. Соответственно $3n$ вариации dx_ν связаны i уравнениями, получаемыми из уравнения (2) варьированием:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{L\nu}\, d\delta x_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n}\sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{L\nu}}{\partial x_\mu}\, \delta x_\mu \delta x_\nu = 0. \tag{3}$$

Так как длина ds элемента пути зависит только от dx_ν, а не от x_ν, то ее вариация будет

$$\delta(ds) = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, \delta dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\, d\delta x_\nu, \tag{4}$$

причем

$$\delta \int ds = \int \delta ds = 0.$$

Согласно правилам вариационного исчисления, умножим каждое уравнение (3) на пока произвольные функции φ_L от координат x_ν и сложим сумму левых сторон полученных уравнений (она равна нулю) с вариацией элементов интеграла. Затем посредством интегрирования по частям исключим дифференциалы вариаций и положим равными нулю множители при произвольных вариациях δx_ν. В итоге получим $3n$ дифференциальных уравнений следующего вида:

$$d\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu}\right) + \sum_{L=1}^{i} x_{L\nu}\, d\varphi_L - \sum_{L=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{3n}\left(\frac{\partial x_{L\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{L\nu}}{\partial x_\mu}\right)\varphi_L\, dx_\mu = 0, \tag{5}$$

которые вместе с уравнениями (2) образуют $3n+i$ уравнений для определения $3n+i$ функций x_ν и φ_L. Эти уравнения (5) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы путь был геодезическим. Отсюда, обозначив через 0 и 1 нижний и верхний пределы, получим

$$\delta \int ds = \sum_{\nu=1}^{3n}\left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_{L=1}^{i} x_{L\nu}\varphi_L\right)\delta x_\nu\right]_0^1 = 0, \tag{6}$$

так как на конечных точках пути вариации δx_ν исчезают.

Затем Герц доказывает теорему, в которой выражена, по существу говоря, глубокая связь его механики с геометрической оптикой и теоремой Бельтрами—Липшица. Теорема Герца гласит: если построить во всех положениях некоторой поверхности прямейшие пути (а следовательно, в случае голономной системы — геодезические), перпендикулярные к этой поверхности, и отложить вдоль этих путей равные длины, то получим новую поверхность, которая будет пересекать эти прямейшие пути также перпендикулярно.

Таким образом, в самой сердцевине механики Герца заключаются геометрические соотношения, которые связывают ее с общей теорией поверхностей. Пространственные формы механического движения материальных тел играют поэтому у Герца основную роль.

Естественно возникает вопрос об отношении принципа Герца к принципу наименьшего действия Эйлера—Лагранжа в его классической форме и в форме, которую придал ему Якоби, и к принципу Гамильтона.

Герц посвятил этому вопросу несколько разделов своей книги. Так как в голономной системе прямейший путь между двумя достаточно близкими положениями является одновременно кратчайшим, то естественный путь такой системы между указанными положениями короче, чем какой-нибудь другой возможный путь между теми же положениями. Эта теорема сразу приводит к принципу наименьшего действия в форме Якоби. Обозначим через m_ν массу, через ds_ν — длину пути точки ν системы в определенный момент времени; тогда эта теорема гласит, что вариация интеграла

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu ds^2$$

исчезает при естественном движении системы, а это и есть принцип наименьшего действия в форме Якоби. Согласно обычному пониманию механики, отмечает Герц, приведенная теорема представляет собой частный случай теоремы Якоби, а именно случай, когда силы отсутствуют. Однако «по нашему мнению, наоборот, предпосылки полной теоремы Якоби следует считать более узкими, а теорема Якоби является специальной формой выражения нашей теоремы»[15]. Такая точка зрения Герца основана на том, что

[15] Там же, стр. 175.

Якоби для получения своего выражения принципа наименьшего действия должен был воспользоваться законом сохранения энергии, чтобы с его помощью исключить время, в то время как принцип Герца совершенно не зависит от этого закона. Кроме того, выражение Якоби, в отличие от принципа Герца, справедливо лишь для голономных систем.

Легко показать далее, следуя Герцу, что естественное движение свободной голономной системы переводит систему из данного начального в достаточно близкое конечное положение за более короткое время, чем какое-либо другое возможное движение с одинаковым постоянным значением энергии, так как в этом случае энергия и скорость одинаковы, и время перехода пропорционально длине пути. В этом случае интеграл по времени от энергии равен произведению данного постоянного значения энергии на промежуток времени перехода. Таким образом, получается принцип наименьшего действия Эйлера—Лагранжа. Отношение этого принципа к принципу Герца такое же, как принципа наименьшего действия в форме Якоби.

Аналогичные рассуждения могут быть приведены и для принципа Гамильтона.

Герц рассматривает, наконец, вопрос о том, в какой степени телеологические умозаключения на самом деле связаны с этими принципами. По его мнению, такая связь не вытекает с необходимостью из рассмотрения якобы будущих целей движения. Более того, представление о таком телеологизме даже недопустимо. То, что «такое понимание этих принципов не необходимо вытекает из того, что свойства естественного движения, являющиеся как бы проявлениями цели, на самом деле устанавливаются нами как необходимые следствия закона (т. е. принципа Герца. — *Авт.*), в котором не содержится никакого выражения предвидения будущего»[16]. Недопустимость же такого представления вытекает из того, что «если бы природа действительно имела цель достигать кратчайшего пути, наименьшей затраты энергии, кратчай-

[16] Там же, § 364, стр. 178.

шего времени, то невозможно было бы понять, как могут существовать системы, в которых эта цель хотя и достижима, но природа постоянно терпит неудачу»[17].

Таким образом, Герц со своих материалистических позиций полностью отвергает какие-либо телеологические домыслы, связываемые без должного обоснования с рассматриваемыми принципами.

Выведя далее Гамильтонову характеристическую и главную функции, Герц отмечает, что в них, по его мнению, «содержится только слегка завуалированный простой смысл прямейшего расстояния . . .»[18].

Принцип Герца был бы просто частным случаем принципа Гаусса, если бы не заменил силы, действующие на систему, связями ее с другими системами, находящимися с ней во взаимодействии. Этим самым Герц как бы изучал только свободные системы. Для своего геометрического рассмотрения Герц должен был считать все массы как кратные некоторой условной единичной массе. Тогда, так как $m_r = 1$, $X = 0$, из Гауссова выражения (1) получим:

$$Z = \sum_{r=1}^{n} \ddot{x}_r^2. \tag{7}$$

Что, собственно, в этом случае означает верхний предел суммирования, остается неясным, так как число единичных масс не поддается точному определению.

Заменим теперь $\ddot{x}_r$ на $\frac{d^2x_r}{ds^2}\frac{ds^2}{dt^2}$. Для этого введем по терминологии Герца элемент длины

$$ds^2 = \sum dx_r^2. \tag{8}$$

Элемент длины ds надо рассматривать как элемент длины в n-мерном Эвклидовом пространстве координат $x_1, \ldots, x_n$, в котором элемент длины на самом деле имеет форму выражения (8). Так

[17] Там же, § 417, стр. 196.

[18] Там же, § 417, стр. 196.

как закон сохранения энергии, который является следствием уравнений Лагранжа первого рода, а следовательно и принципа Гаусса, в данном частном случае приводит к выражению

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 = T$$

или

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \text{const},$$

то разделив выражение (7) на квадрат этой постоянной, получим

$$K = \sum\left(\frac{d^2x_r}{ds^2}\right)^2.$$

Герц назвал K кривизной траектории, описываемой системой, и постулировал, что для действительного движения

$$\delta K = 0, \tag{9}$$

т. е. «всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения по прямейшему пути»[19]. Этот способ формулирования общего принципа механики можно рассматривать как естественное обобщение первой аксиомы Ньютона.

Зоммерфельд правильно отметил, что «механика Герца построена в высшей степени увлекательно и последовательно, но в силу сложности замены сил связями оказалась малоплодотворной»[20].

ПОНЯТИЕ «СИЛЫ» В МЕХАНИКЕ ГЕРЦА

Механику Герца часто называют «механикой без силы». Понятие силы, хотя и вводится Герцем[21], однако оно не является основным, исходным понятием его механики. В этом состоит прежде всего резкое отличие механики Герца от обычного ее изложения. Сложность понятия силы в классической механике, абсолютизация его многими крайними ньютонианцами и заманчивая возможность

[19] Там же, § 309, стр. 162.

[20] А. Зоммерфельд. Механика, стр. 298.

[21] H. Hertz. Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Gesam. Werke. Bd. III, Leipzig, 1910, § 455, S 208.

объяснить силу движением некоторых (хотя бы и скрытых) масс привели многих физиков второй половины XIX в. к попыткам пересмотреть смысл и место понятия силы в системе механики.

Важнейшим стимулом в этом отношении было развитие континуарной физики поля, в первую очередь электромагнитного.

Классическое понятие силы, которое возникло из изучения непосредственного контакта (удара) двух масс, постепенно стало рассматриваться не как выражение взаимодействия тел в процессе движения, а как нечто не зависящее от движения материи. Физика поля, напротив того, по самому своему характеру подсказывала возможность рассматривать силу как вторичное понятие, выражающее взаимодействие среды (эфира) и весовых тел.

В том же направлении влияло и введение Гельмгольцем понятия скрытых масс и скрытых движений для отнесения не специфического, не укладывающегося в рамки обычной механики характера тепловых процессов. Естественно поэтому было попытаться отказаться в механике от сложного понятия силы как исходного понятия, положив в основу взаимодействие скрытых и наблюдаемых масс. Принципиально эта концепция была прогрессивной, так как стремилась выразить все основные понятия механики через движение масс, рассматриваемое как исходный пункт. Но в силу исторической ограниченности физики XIX в. в этой концепции характер и поведение скрытых объектов рассматривались как чисто механический комплекс взаимодействий. Кроме того, скрытые массы оставались скрытыми, непознаваемыми элементами этой картины, что неизбежно приводило к агностическим выводам.

Герц был не первым ученым, разрабатывавшим во второй половине XIX в. «механику без силы». До него это в наиболее отчетливой форме пытался сделать Кирхгоф. Кирхгоф не отвергал совершенно понятие силы, а только отказывал ему в первичности. «Механика, по нашему мнению, — говорил он, — должна черпать определения понятий, с которыми она действует, из одного лишь движения. Отсюда следует, что после введения систем сил, вместо простых сил, механика оказывается не в состоянии дать точное

определение понятия силы»[22]. Однако всесторонне развил и последовательно изложил эту точку зрения только Герц.

Путь к исключению понятия силы подсказывает уже сама механика Галилея—Ньютона. Рядом с собственно силами, являющимися причинами изменения состояния движения, эта механика поставила другой вид сил, а именно силы условий связи системы, ограничивающие степени свободы движения последней. Направление этих сил определяется чисто геометрическими условиями, а величина остается, строго говоря, неизвестной.

Элементарная механика в обычном изложении смешивает эти два вида сил, рассматривая силы условий как собственно силы, величина которых вначале неизвестна. Она сводит, следовательно, силы ограничения движения к собственно силам. Однако уже в аналитической механике различие этих сил выступает очень резко, гораздо резче, чем в элементарной механике. В уравнениях аналитической механики силы условий движения имеют совсем другой вид, чем собственно силы, будучи определены только геометрическими условиями движения.

Герц поставил перед собой задачу, обратную той, которую так или иначе решает элементарная механика: нельзя ли все собственно силы свести к силам ограничения движений? Возможно, что вообще все наблюдаемые изменения скорости, которые не требуются как будто с точки зрения геометрических связей, вызваны на самом деле не силами, а именно какими-то, может быть еще не исследованными, геометрическими связями. Сама сила есть лишь способ описания этих связей, применимый при известных допущениях, но отнюдь не являющийся необходимым для однозначного и ясного научного познания мира.

Несмотря на то, что принцип Герца непосредственно применим только к свободным системам, мы можем применить его и к выводу дифференциальных уравнений движения несвободных систем. Действительно, поскольку всякую несвободную систему S_1

[22] G. Kirchhoff. Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. I, Mechanik, Leipzig, 1872, S. I.

мы можем представить себе дополненной второй системой S_2 (системой скрытых масс) так, чтобы они вместе составили свободную систему $S \approx S_1, S_2$, то, применяя принцип Герца к свободной системе S и предполагая известным движение системы S_2, а также связи систем S_1 и S_2, мы сможем вывести уравнения движения несвободной системы S_1. При таком способе представления движение любой несвободной системы S_1 определяется уже не особыми силами, а влиянием дополнительной системы S_2 (явной или гипотетической), которое передается системе S_1 посредством связей; иначе говоря, движение «ведомой» системы S_1 определяется движением «ведущей» системы S_2. Далее вводится понятие силы как величины, характеризующей влияние системы S_2 на систему S_1 посредством «прямых» связей, исследуются свойства этих сил и доказывается тождественность их свойств известным свойствам Ньютоновых сил.

Далее Герц конструирует свободную, так называемую консервативную систему S, представляя последнюю как совокупность двух систем, из которых одна S_1 состоит из обычных «наблюдаемых» масс, а вторая S_2 — из скрытых или «ненаблюдаемых» масс, совершающих «адиабатически-циклические» движения. Так как кинетическая энергия свободной системы S должна, как это вытекает из принципа Герца, сохранять свою величину $T = \text{const}$, то для свободной консервативной системы получаем

$$T = T_1 + T_2 = \text{const}$$

(при этом предполагается, что T_1 является функцией только обобщенных скоростей системы S_1, а T_2 — только скоростей системы S_2).

Кинетическую энергию T_2 скрытой системы S_2 Герц называет «потенциальной» энергией консервативной системы S и показывает, что введенная таким образом «потенциальная» энергия обладает всеми свойствами потенциальной энергии обычных консервативных систем. Понятие о силе как о причине замедления или ускорения в механике Г. Герца исчезает бесследно. Сила, с точки зрения Герца, является только мерой переноса или

взаимопреобразования движения между «прямо-связанными» системами. Загадочная потенциальная энергия консервативных систем обычной механики оказывается обычной кинетической энергией скрытых материальных систем. В основе действий, наблюдаемых между удаленными телами (планетами, например), лежит материальный процесс, протекающий в скрытых материальных системах, связывающих обычные или «наблюдаемые» системы. Механика Герца представляет в высшей степени ясную, внутренне непротиворечивую, математически обоснованную картину механики. Единственным недостатком этой картины является ее... иллюзорность. Герц доказал лишь, что скрытые или адиабатически-циклические системы, дополняющие обычную систему до свободной, обладают всеми свойствами обычных консервативных систем. Но отсюда еще не следует, что реальные консервативные системы являются такими, какими они представляются в механике Герца.

Носителем скрытых циклических систем, по мнению Герца, является мировой эфир, но так как скрытым системам Герц приписывает общепринятые свойства механических движений, то эфир в механике Герца имеет характер чисто механической системы: частицам эфира приписываются свойства обычной инертной материи, обычные механические движения и кинетическая энергия, движения частиц эфира подчиняются законам классической механики и т. д.

Главный недостаток механики Герца не в ее конкретных механических конструкциях, а в универсализации развитой им интерпретации сил. Утверждение Герца, что мнимое действие сил на расстоянии сводится исключительно к процессам механического движения в наполняющей пространство среде, между мельчайшими частицами которой существуют неподвижные связи, было опровергнуто последующим развитием физики и, прежде всего, механикой Эйнштейна. Механическая теория эфира, на которой основана система Герца, оказалась несостоятельной.

Однако в некоторых важных идеях теории относительности и механики Герца имеется много общего. В теории относительности движение планет вокруг Солнца объясняется без привлечения действующих сил при помощи представления об инерции как о фундаментальном свойстве тел. Планеты движутся аналогично телам в механике Герца по кратчайшим линиям в римановом пространстве. В этом отношении отличие теории относительности от механики Герца состоит в том, что в первой материальные движущиеся тела определяют метрику пространства — времени, его геометрию, в то время как у Герца такое движение определяется кинематическими условиями, создаваемыми скрытыми массами системы.

* * *

Несмотря на всю свою историческую ограниченность, связанную с механистической картиной мира, механика Герца сыграла значительную роль в развитии одной из основных проблем физики — проблемы пространственно-временной формы движения материи.

ПРИМЕЧАНИЯ *

[1] Книга Г. Герца «Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt» была опубликована впервые в 1894 г. Г. Герц не успел ее закончить.

Эта книга составила третий том Собрания сочинений Герца. Она переведена на английский (дважды) и французский языки. На русский язык переводится впервые.

См. также библиографию трудов Г. Герца, стр. 379 настоящей книги.

[2] **Гельмгольц Г. Л.** (Helmholtz Hermann Ludwig Ferdinand), 1821—1894, немецкий естествоиспытатель. Получил медицинское образование в Берлине. Профессор физиологии в Кенигсберге, Бонне и Гейдельберге. С 1871 г. профессор физики в Берлине и позднее директор Гос. физико-технического ин-та в Берлине. Г. принадлежит первая математическая трактовка закона сохранения энергии. Он впервые доказал применимость принципа наименьшего действия к тепловым, электромагнитным и оптическим явлениям. Разработанная им теория вихревого движения жидкости сыграла значительную роль в развитии гидродинамики и аэродинамики. В области физиологической акустики Г. принадлежит разработка физической теории фонации. Г. создал офтальмоскоп и ряд других оригинальных приборов и новых методов физиологического исследования.

[3] **Томсон Дж. Дж.** (Thomson Joseph John), 1856—1940, английский физик. Обучался в Тринити-колледже Кембриджского ун-та. С 1884 г. профессор и с 1919 г. руководитель того же колледжа. С 1915 по 1920 г. президент Лондонского королевского общества. Ему принадлежат исследования по прохождению электрического тока сквозь разреженные газы. Т. является также одним из основоположников электронной теории металлов. Ему принадлежит также известная (1907) модель атома.

* При составлении примечаний частично использована статья Г. К. Суслова «Механика Герца» (Известия Киевского университета за 1898 г.)

[4] **Бельтрами Е.** (Beltrami), 1835—1900, итальянский геометр, профессор в Болонье, Павии и Риме. Труды Бельтрами относятся главным образом к дифференциальной геометрии и теории инвариантов дифференциальных квадратичных форм, представляя собой развитие идей и методов, начало которых заложено было Гауссом.

[5] **Липшиц Р.** (Lipschitz Rudolph Otto Sigismund), 1832—1903, немецкий математик, профессор в Бреславле и Бонне. Основные работы — в области теории дифференциальных уравнений, теории рядов, многомерной геометрии, теории чисел и теории функций.

[6] **Дарбу Ж. Г.** (Darboux Jean Gaston), 1842—1912, французский математик, член Парижской академии наук, член-корреспондент Петербургской академии. Автор ряда исследований в области дифференциальной геометрии, теории поверхностей. Важные результаты получены им также по различным вопросам интегрирования дифференциальных уравнений.

[7] **Мах Э.** (Mach Ernst), 1838—1916, австрийский философ-идеалист и физик. С 1864 г. профессор университета в Граце, в 1867—1895 гг. — в Пражском университете, с 1895 г. — в Венском университете. М. принадлежат работы в области акустики. Рассматривая вещи как «комплексы элементов опыта», М. понимал опыт в духе субъективного идеализма и сводил его к сумме человеческих переживаний, ощущений, безотносительно к объективной реальности. «Философия естествоиспытателя Маха относится к естествознанию, как поцелуй христианина Иуды относился к Христу. Мах точно так же предает естествознание фидеизму, переходя по существу дела на сторону философского идеализма» (Ленин В. И., Соч., 4 изд., т. 14, стр. 333). В его книге «Механика, историко-критический очерк ее развития», на которую ссылается Герц, несмотря на неправильность основной концепции развития науки, имеются отдельные интересные наблюдения.

[8] **Томсон У.** (лорд Кельвин) (Thomson William), 1824—1907, английский физик, обучался в колледже в Глазго и Кембридже, с 1846 г. — профессор теоретической физики в Глазго, с 1890 г. — президент Лондонского королевского общества. Автор многочисленных фундаментальных исследований в области математической физики, термодинамики, гидродинамики, теории волн, теории упругости, динамической геологии. Теоретические и экспериментальные работы Т. дали возможность осуществить телеграфирование через Атлантический океан. Т. принадлежит изобретение и усовершенствование многих физических инструментов и приборов.

[9] **Тэт П. Г.** (Tait Peter Guthrie), 1831—1901, английский математик и физик, профессор математики в колледже в Белфасте и позднее профессор натуральной философии в Эдинбурге. Ряд работ Т. посвящен вопросам термодинамики, теории света и общим вопросам молекулярной физики.

[10] Сила отнюдь не есть причина движения; такое определение неправильно; сила — причина изменения в движении массы, причина ускорения, получаемого массой. Притом сила и ускорение массы связаны друг с другом причинной связью — ускорение массы служит следствием силы, действующей на массу.

[11] **Д'Аламбер Ж. Л.** (D'Alembert Jean le Rond) 1717—1783, французский математик и философ, член Парижской академии, почетный член Петербургской и других академий. Один из создателей «Энциклопедии наук, искусств и ремесел». Математические исследования Д. относятся главным образом к теории дифференциальных уравнений. Д. впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем и применил этот принцип для решения конкретных задач механики (принцип д'Аламбера).

[12] Второй закон Ньютона, по существу говоря, есть закон изменения импульса, и встречающееся в научной литературе название «закон ускорения» или «закон силы» нельзя считать удачным.

Конечно, при $m = \mathrm{const}$ уравнение, выражающее второй закон

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{F}; \tag{1}$$

где $\mathbf{J}$ — импульс, а $\mathbf{F}$ — сила, эквивалентно формулировке

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}, \tag{1a}$$

т. е. масса, умноженная на ускорение, равна силе. Однако масса, как мы знаем из теории относительности, не постоянна, а именно

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Кроме того, существует ряд важнейших механических задач (например, задачи движения ракет и т. п.), в которых масса является переменной. Более того, уже уравнения движения вращающегося твердого тела, являющегося простейшей механической системой после материальной точки, должны быть сформулированы аналогично выражению (1): изменение момента импульса равно моменту силы. Попытки же формулировать этот закон в духе уравнения (1a) при помощи понятия углового ускорения не приводят к полезным результатам. Причина этого, как и в теории относительности, заключается в том, что момент инерции, играющий при вращении роль массы, может изменяться при изменении положения оси вращения в теле.

[13] Попытки Герца обосновать логическую несостоятельность ньютоновой системы неубедительны. Герц рассматривает задачу о центробежной силе и останавливается на вопросе, как удовлетворить в этом случае третьему закону Ньютона. Задача состоит в следующем: привязав камень к концу веревки, мы заставляем его двигаться по окружности, причем другой конец веревки удерживаем рукой неподвижно. Так как движение камня криво-

линейное, то согласно первому закону Ньютона к нему приложена сила. Согласно третьему закону источником силы, приложенной к какой-либо массе, может служить лишь другая масса, притом такая, которая находится под действием силы, равной и прямопротивоположной первой силе. Если камень движется равномерно, то сила, к нему приложенная, направлена по веревке к руке. Массой, служащей источником этой силы, очевидно, будет рука, так как к руке и приложена так называемая центробежная сила, равная и противоположная силе, управляющей движением камня.

14 Изложение Герца неправильно; представлять инерцию как источник центробежной силы в механике Ньютона невозможно.

Что же касается третьего закона Ньютона, то он, в противоречии с мнением Герца, не только не вносит какой-либо неясности, но исключает и ту последнюю неопределенность, которая еще остается в определении силы согласно второму закону. Зная массу тела и его ускорение, мы все-таки еще не знаем сил, к нему приложенных: может быть на него действует одна сила, а может быть и много, при условии, что их геометрическая сумма равняется первой силе. Только когда по третьему закону разыщем источники сил, мы можем с уверенностью сказать, сколько сил и какие силы на самом деле приложены к рассматриваемой массе.

15 Смысл этого закона следующий. Для каждого давления существует противодавление. В природе силы представляют взаимодействие тел и поэтому существуют попарно. Падающий камень притягивает Землю точно с такой же силой, как и Земля притягивает камень. Этот закон делает возможным переход от механики отдельной материальной точки к механике сложных систем; в частности, он лежит в основе всей статики строительных сооружений.

16 **Будде Э. А.** (Budde Emil Arnold), 1842 — ? немецкий математик и механик. Работа Б., на которую ссылается Герц, имеет в настоящее время только исторический интерес.

17 **Кирхгоф Г. Р.** (Kirchhoff Gustav Robert), 1824—1887, немецкий физик, член Берлинской академии наук. Обучался в Кенигсбергском ун-те. Профессор физики в ун-те в Бреславле и Гейдельберге, с 1875 г. — проф. математической физики в Берлинском ун-те. В своих исследованиях установил закономерности распределения электрического тока в разветвленных цепях, распространения электрических возмущений вдоль проводов. В области механики К. исследованы теории деформаций, движения и равновесия упругих тел. К. является одним из создателей спектрального анализа.

18 **Максвелл Дж. К.** (Maxwell James Clerk), 1831—1879, английский физик, обучался в Эдинбурге и Кембридже, профессор Абердинского ун-та в Шотландии, профессор физики в Лондоне и Кембридже. М. принадлежит ряд фундаментальных исследований по электромагнетизму, механике, оптике, молекулярной физике, астрономии. В области кинетической теории газов он дал закон распределения молекул по скоростям. М. является создателем теории электромагнитного поля и электромагнитной теории света.

19 **Гаусс К. Ф.** (Gauss Karl Friedrich), 1777—1855, немецкий математик. Учился в Геттингене. С 1799 г. — доцент в Брауншвейге, с 1807 г. — профессор и директор обсерватории в Геттингене. Основополагающие математические исследования Г. сыграли огромную роль в развитии высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии. Разработанный им метод вычисления эллиптических орбит планет до настоящего времени лежит в основе такого рода вычислений (способ наименьших квадратов). Работы по геодезическим съемкам Ганноверского королевства привели Г. к созданию т. н. «высшей геодезии». Г. является также создателем абсолютной системы электромагнитных единиц. В теоретической физике ему принадлежат исследования по капиллярности и по принципу наименьшего принуждения.

20 Первая книга механики озаглавлена Герцем так: «Zur Geometrie und Kinematik der Materiallen Systeme». Мы знаем, что в кинематике основных понятий два — пространство и время; у Герца же с самого начала встречаемся с массой. Впрочем, уже само заглавие «Кинематика материальных систем» предупреждает нас, что мы здесь будем иметь дело отнюдь не с чистою кинематикой по Амперу, а с динамикой по обыкновенной номенклатуре (точнее, с геометрией масс). Вряд ли надо доказывать полную ошибочность утверждения Герца о том, что излагаемые им здесь положения есть априорные суждения.

21 Определения 1 и 2 вводят понятие массы. Точный смысл их вряд ли можно признать ясным. Если слово «Merkmal» надо понимать буквально, то отметить точку мы можем лишь точкой геометрической и, следовательно, масса в данном объеме определится как отношение числа меток в этом объеме к числу меток в объеме, служащем эталоном. Но тогда возникает следующее затруднение: эталон *должен* содержать *бесконечно большое* число этих неистребимых и неизменных меток, что является совершенно неопределенным.

Определение, которое дает Герц материальной точке (определение 3), слишком узко. Ведь рассмотрение движения материальной точки заменяет собой рассмотрение поступательного движения какой-либо массы как конечных размеров, так и размеров бесконечно малых. Признаком, при котором возможна такая замена, служит одинаковость движения всех точек рассматриваемой массы. Правда, эта одинаковость для массы произвольных размеров соблюдена лишь тогда, когда движение поступательное, а для масс бесконечно малого объема всегда соблюдается, лишь бы только движение различных точек массы изменялось непрерывным образом; но во всяком случае здесь существенен характер движения массы, а не размеры ее. Поэтому едва ли следует давать материальной точке такое определение, которое исключало бы точки — представительницы масс конечных размеров.

[22] Под перемещением системы Герц понимает некоторую среднюю величину из перемещений отдельных точек системы, а именно: если массу какой-либо точки обозначим m_i, перемещение ее через S_i массу всей системы через $m = \sum_i m_i$ перемещение системы через S, то

$$S^2 = \frac{1}{m} \sum_i m_i S_i^2. \tag{1}$$

Перемещение S, очевидно, представляет собой длину. Пусть из одного и того же начального положения A_0 система перешла в два других положения A_1 и A_2. Перемещение из A_0 в A_1 назовем S_1 из A_0, в A_2 — S_2, из A_1 в A_2 — S_{12}. Тогда можно показать, что из отрезков прямых, представляющих собой длины перемещений S_1, S_2, S_{12}, всегда можно построить треугольник. Угол такого треугольника между сторонами S_1 и S_2 называется углом между перемещениями S_1 и S_2. Отсюда уже можно составить понятие о проекции перемещения на некоторое направление, о параллельности двух перемещений и т. д.

То, что было сказано о конечном перемещении, относится и к перемещению бесконечно малому. Если бесконечно малые перемещения отдельных точек системы обозначим через ds_i, а бесконечно малое перемещение всей системы через ds, то по (1):

$$mds^2 = \sum_i m_i ds_i^2. \tag{2}$$

Мы видим, что квадрат бесконечно малого перемещения системы лишь на постоянный множитель отличается от произведения $2Tdt^2$, где T — живая сила системы, а dt — бесконечно малый промежуток времени, в течение которого происходит перемещение. Отсюда понятно, что выражение для квадрата перемещения подлежит тем же самым общеизвестным преобразованиям, которым обыкновенно подвергается выражение для живой силы.

Сплошная совокупность положений, которые последовательно занимает движущаяся система при своем переходе из некоторого возможного положения A_0 в другое A_1, называется путем системы из A_0 в A_1. Возьмем два смежных положения A' и A'' на этом пути. Элементарное перемещение ds из A' в A'' носит название длины пути между A' и A'', а направление ds называется направлением пути в одном из положений A' и A''. Если угол перемещения ds со смежным элементарным перемещением обозначим через $d\varepsilon$, то отношение $\frac{d\varepsilon}{ds}$ и будет кривизною K пути системы в рассматриваемом положении. Можно показать, что

$$mK^2 = \sum_{j=1}^{3n} m_j \left(\frac{d^2\xi_j}{ds^2}\right)^2, \tag{3}$$

если декартовы координаты точки m_i обозначим так:

$$x_i = \xi_{3\nu-2}; \qquad y_i = \xi_{3\nu-1}; \qquad z_i = \xi_{3n},$$

и положим, что

$$m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu} = m_i.$$

Действительно, рассмотрим три смежных положения системы: A_0 с координатами ξ_j, A_1 с координатами $\xi_i + d\xi_i$ и A_2 с координатами $\xi_j + 2d\xi_j + d^2\xi_j$. По приведенному выше определению угла между перемещениями получим

$$\cos(d\varepsilon) = \frac{\overline{A_0A_2}^2 - \overline{A_0A_1}^2 - \overline{A_1A_2}^2}{2A_0A_1 \cdot A_1A_2}, \tag{4}$$

где по (2)

$$m\overline{A_0A_1}^2 = \sum_{j=1}^{3n} m_j d\xi_j^2; \qquad m\overline{A_1A_2}^2 = \sum m_j (d\xi_j + d^2\xi_j)^2;$$

$$m\overline{A_0A_2}^2 = \sum (2d\xi_j + d^2\xi_j)^2.$$

Определяем отсюда

$$\sin^2 d\varepsilon = d\varepsilon^2;$$

затем принимаем во внимание, что

$$ds = A_0A_1$$

является дифференциалом независимой переменной и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{3n} m_j d\xi_j d^2\xi_j = 0. \tag{5}$$

Тогда легко приходим к выражению (3).

[23] «Элемент длины», определен Герцем как

$$mds^2 = \sum_{k=1}^{N} m_\nu dx_k^2, \tag{1}$$

где N — некоторое (недостаточно определенное) число единичных масс.

Чем же обосновано наименование величины ds элементом длины? Очевидно, что эту величину, как связанную с ней величину «кривизны»

$$K = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{d^2x_k}{ds^2}\right)^2 \tag{2}$$

надо рассматривать как многомерную. В этом случае речь идет не о трехмерном, а о N-мерном эвклидовом пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$. В таком пространстве элемент длины определяется выражением (1).

[24] Записав в аналитической форме уравнения связей для материальной системы, Герц останавливается на тех связях, уравнения которых посредством множителя могут быть обращены в полные дифференциалы. Материальная система, у которой все связи обладают указанным свойством, названа им голономною (ὅλος νόμος). Очевидно, всякую голономную систему можно отнести к таким координатам, чтобы уравнения связей выполнялись тождественно.

Из бесчисленного множества возможных путей системы Герц выделяет два рода особенных путей: прямейшие и геодезические.

Прямейшим путем называется такой, для которого кривизна K имеет наименьшую возможную величину. Геодезический путь между двумя положениями A_0 и A_1 системы таков, что для него интеграл

$$S = \int_{A_0}^{A_1} dS, \qquad (1)$$

где dS — элементарное перемещение, имеет максимум или минимум. Точнее говоря, для геодезического пути первая вариация интеграла S при постоянных конечных положениях A_0 и A_1 обращается в нуль. Когда выполнены соответственные условия, геодезический путь может быть кратчайшим между данными конечными положениями системы. При выводе дифференциальных уравнений особенных путей обнаруживается, что для голономной системы пути геодезические и прямейшие совпадают.

Значение интеграла (1) для заданных конечных положений A_0 и A_1 голономной системы Герц называет прямейшим расстоянием (die geradeste Entfernung) между этими положениями. Из всего изложенного нетрудно заключить, что прямейшее расстояние отличается лишь на постоянный множитель от главной гамильтоновой функции в одной из ее частных форм (при силовой функции равной нулю). Поэтому известные свойства гамильтоновой функции оказываются принадлежащими и рассматриваемому расстоянию.

[25] Некоторая искусственность в методике изложения первой книги Герца особенно ясно видна, когда автор переходит к так называемым кинематическим понятиям, где, например, вектор определяется как величина, однородная с перемещением системы, при этом оказывается необходимым изображать векторы в таком масштабе, чтобы соответствующие им перемещения были бесконечно малы; затем вектор относительно одной системы может и не быть вектором относительно другой (см. § 252) и т. п. Оперируя над бесконечно малыми перемещениями системы так, как обыкновенно оперируют над перемещениями точки, Герц составляет новые понятия — скорость и ускорение системы. Как легко предугадать из (2, прим. 22), квадрат скорости системы, умноженный на массу, дает удвоенную живую силу системы, а ускорение системы f связано с ускорениями f_i отдельных точек ее m_i выражением

$$mf^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i f_i^2.$$

[26] Вторая часть носит заглавие «Mechanik der Materiallen Systeme». Три начальных положения (Festsetzungen) следует считать за определения способов измерения промежутков времени, длин и масс. Массы измеряются при помощи весов; не очень ясно, какие соображения приводят автора к такому способу измерения, если исходить из приведенных выше определений массы.

Материальная система называется свободной, когда все массы ее связаны лишь друг с другом и когда, кроме того, связи не содержат времени, а зависят лишь от относительного положения масс друг относительного друга.

Если выразить аналитически основной закон, то мы и получим уравнения движения несвободной системы по инерции. Сделаем это для декартовых координат ξ_i.

Пусть система подчинена k связям:

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ji} d\xi_i = 0; \qquad j = 1, \ldots, k. \qquad (1)$$

Для кривизны пути, если за независимую переменную взять длину пути, мы имеем по (3, прим. 22) выражение

$$mK^2 = \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\frac{d^2\xi_i}{ds^2}\right)^2.$$

Уравнениями, определяющими минимум этого выражения при условиях (1), служат

$$m_i \frac{d^2\xi_i}{ds^2} + \sum_{j=1}^{k} A_{ji}\lambda_i = 0. \qquad (2)$$

Здесь λ_j, некоторые множители, значение которых найдется при помощи следующих соотношений, получаемых из (1) дифференцированием по s:

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ji} \frac{d^2\xi_i}{ds^2} + \sum_{i=1}^{3n} \sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial A_{ji}}{\partial \xi_l} \cdot \frac{d\xi_i}{ds} \cdot \frac{d\xi_l}{ds} = 0. \qquad (3)$$

Но по основному закону скорость системы постоянна, т. е.

$$\frac{ds}{dt} = \text{const},$$

если t означает время.

Пользуясь этим равенством, сделаем замену независимой переменной — вместо s введем t. Тогда уравнения (2) и (3) заменятся такими:

$$m_i\ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^{k} A_{ji}\lambda_j = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{ji}\ddot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{3n}\sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial A_{ji}}{\partial \xi_l}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_l = 0. \tag{5}$$

Само время без знака дифференциала нигде явно не входит.

Множители λ_j представляют собой реакции связи по обыкновенной теории (innerer Zwang, по Герцу).

Из уравнений (4) можно затем вывести все возможные преобразования и теоремы, относящиеся к движению несвободных систем по инерции (по ньютоновской терминологии).

[27] Приведем один из возможных способов выразить основной закон Герца без помощи каких-либо новых понятий о прямейших путях и т. п. (см. Г. К. Суслов, Механика Герца, Киев, 1898).

За три основных понятия берутся, как у Герца, пространство, время и масса. Принимаем, как и Герц, что уравнения связей выражаются линейными функциями от скоростей. Кроме того, пусть связи зависят лишь от относительных координат масс друг относительно друга. Систему, все массы которой связаны лишь друг с другом, назовем свободной. Тогда основной закон Герца можно выразить так.

Свободная система или находится в покое, или движется с такими ускорениями, что живая сила ее не изменяется на всяком возможном перемещении.

Первая половина закона требует, чтобы уравнения связей были однородны относительно скоростей.

Чтобы раскрыть вторую половину, отнесем систему к декартовым координатам. Пусть число масс в системе равно n, тогда живая сила ее T представится так:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_{j=1} m_j\dot{\xi}_j^2. \tag{1}$$

Положим, что система подчинена K связям:

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{jl}\dot{\xi}_j = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, k. \tag{2}$$

Если же введем вместо скоростей перемещения, то предыдущее выражение можем переписать так:

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{jl}\delta\xi_j = 0. \tag{3}$$

Запишем, что живая сила на возможных перемещениях должна быть постоянна:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{3n} m_j\dot{\xi}_j\ddot{\xi}_j = 0 \tag{4}$$

или

$$\sum_{j=1}^{3m} m_j\ddot{\xi}_j\delta\xi_j = 0. \tag{4a}$$

Ускорения точек по смыслу основного закона не варьируются, а варьируются только возможные перемещения.

На основании этого замечания известным приемом из (3) и (4а) выводим уравнения типа (4, прим. 26)

$$m_j\ddot{\xi}_j + \sum_{l=1}^{k} A_{jl}\lambda_l = 0. \tag{5}$$

Равенство (4а) может быть преобразовано к любым координатам. Если массы расположены непрерывно, то вместо сумм надо писать интегралы.

Движения несвободных систем могут быть подведены под общий закон тем же путем, как это делает Герц. Небольшая разница будет лишь для систем ведомых, т. е. таких, для которых даны движения внешних масс. Если внешние массы «скрыты» и живая сила их нам неизвестна, то мы не можем непосредственно приложить общий закон к несвободной системе, состоящей из масс внутренних и внешних, для всех ее возможных перемещений, а должны рассматривать только ту частную группу этих перемещений, когда внешние массы неподвижны и, следовательно, живая сила их равна нулю. Аналитически задача решится так: надо приложить равенство (4а) лишь к живой силе несвободной системы, а в уравнениях связей типа (2, прим. 29) положить $dt = 0$. Полное согласие этого рассуждения с теорией Герца и Ньютона очевидно.

Введение же сил может быть выполнено так, как это делает Герц.

Приведенная выше формулировка основного закона Герца годится и в том случае, когда мы пожелаем взять за основные понятия пространство, время и живую силу (кинетическую энергию). Тогда мы назовем материальным телом все то, что движется и является носителем энергии. Кинетическая энергия какой-либо системы материальных тел равна сумме энергий отдельных частей и при поступательном движении пропорциональна квадрату скорости. Отношение между энергиями двух систем при равных поступательных скоростях мы принимаем равным отношению между некоторыми постоянными, характеризующими систему и называемыми массами. При соответственном выборе единиц времени, длины и энергии мы можем сказать, что масса равняется удвоенной энергии системы при поступательной скорости равной единице.

Понятие о материальной точке, как представительнице тела, движущегося поступательно, останется, конечно, без изменения, и при допущении непрерывности движения всякое материальное тело бесконечно малых размеров можно заменить материальной точкой. Отсюда вытекает, что живая сила T любой системы может быть выражена так:

$$T=\sum_j m_j h_j=\frac{1}{2}\sum_j m_j v_j^2, \qquad (6)$$

где m_j — масса, а v_j — скорость j-той материальной точки.

Пусть живая сила системы выражена в обобщенных координатах q_i; это будет квадратичная однородная функция от производных $\dot{q}_i$. Прилагая закон Герца, получим

$$\frac{dT}{dt}=\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i=0. \qquad (7)$$

Скорости системы $\dot{q}_i$ связаны равенствами, число которых k:

$$\sum_i A_{li}\dot{q}_i=0, \qquad l=1, 2, \ldots, k. \qquad (8)$$

Первую половину выражения (7) можем переписать так:

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\frac{d}{dt}\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\sum_i \dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,. \qquad (9)$$

Но по теореме Эйлера для однородных функций

$$\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T;$$

следовательно, по уравнению (7)

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=-\sum_i \dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,.$$

Таким образом, вместо (7) имеем

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i=0, \qquad (10)$$

если вместо возможных скоростей введем возможные перемещения, ограниченные по (8) условиями:

$$\sum_i A_{li}\delta q_i=0. \qquad (11)$$

Но по (6)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i m_j\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial h_j}{\partial q_i}-\frac{\partial h_j}{\partial q_i}\right].$$

Выражение в прямых скобках представляет собой, как это показывается в кинематике, проекцию ускорения j-той точки на ось координат q_i; следовательно, оно варьированию не подлежит.

Тогда из (10) и (11) и получаем искомые уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_i A_{li}\lambda_l=0. \qquad (12)$$

[28] При выводе так называемого закона площадей у Герца имеет место неточность. Через центр инерции системы Герц проводит три прямые, параллельные осям координат; затем через каждую такую прямую и всякую материальную точку системы строит плоскости. Средние арифметические величины углов каждой плоскости из этих трех соосных систем с какой-либо постоянной плоскостью через ту же ось Герц принимает за координаты системы: ω_1, ω_2, ω_3 и полагает, что тогда, если система движется как твердое тело, изменения декартовых координат какой-либо ее точки могут быть представлены формулами:

$$d\xi_{3\nu}=d\alpha_1+(\xi_{3\nu-1}-\alpha_2)\,d\omega_3-(\xi_{3\nu-2}-\alpha_3)\,d\omega_2,,$$

$$d\xi_{3\nu-1}=d\alpha_2+(\xi_{3\nu-2}-\alpha_3)\,d\omega_1-(\xi_{3\nu}-\alpha_1)\,d\omega_3,$$

$$d\xi_{3\nu-2}=d\alpha_3+(\xi_{3\nu}-\alpha_1)\,d\omega_2-(\xi_{3\nu-1}-\alpha_2)\,d\omega_1,$$

где α_1, α_2, α_3 — координаты центра инерции.

Если это оказалось возможным, то мы должны были бы прийти к заключению, что выражения для проекций мгновенной угловой скорости твердого тела на декартовы оси допускают интегрирующий множитель, что несправедливо.

[29] Согласно Герцу, нет иных движений, кроме движения по инерции, и нет других связей, кроме таких, которые выражаются линейными однородными функциями от скоростей, не содержащими явно времени и зависящими только от относительных координат масс системы.

Рассмотрим свободную в смысле Герца систему. Движение такой системы непосредственно подчиняется основному закону. Если мы эту систему разделим на две или более частей, то каждую такую часть назовем системой несвободной. Массы, входящие в состав такой несвободной системы, назовем **внутренними**, а массы, дополняющие незамкнутую систему до замкнутой, — **внешними**.

Несвободная система не подчиняется непосредственно основному закону; но при соответственном задании движение ее может быть определено при помощи того же закона.

Предположим, что движение внешних масс нам дано. Тогда координаты внешних масс будут известные функции времени, притом такие, которые служат частными интегралами соответственных уравнений движения. Прилагая основной закон к свободной системе, т. е. к системе, состоящей из внутренних и внешних масс, получим по-предыдущему две группы уравнений типа (4, прим. 26) или равносильных им. Одна группа, относящаяся к внешним массам, будет тождественно удовлетворяться данными нам функциями времени; другая группа, относящаяся к массам внутренним, и представит собой собственно уравнения движения несвободной системы.

Ограничимся опять рассмотрением Декартовых координат и положим, что свободная система состоит из n точек, тогда уравнения ее движения сохранят вид (4, прим. 26):

$$m_i\ddot{\xi}_i+\sum_{j=1}^{k}A_{ji}\lambda_j=0; \tag{1}$$

но равенства (1, прим. 26) заменятся следующими:

$$\sum_{i=1}^{3n}A_{ji}d\xi_i+B_jdt=0 \tag{2}$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\ \dots k$$

Теперь во все коэффициенты A_{ji} и B_j, вообще говоря, входит явно время; выражение B_jdt получилось из совокупности членов, содержавших дифференциалы координат внешних масс.

На основании (2) уравнения (5, прим. 26), служившие для определения множителей λ_j, перейдут в такие:

$$\sum_{i=1}^{3n}A_{ji}\ddot{\xi}_i+\sum_{i=1}^{3n}\sum_{l=1}^{3n}\frac{\partial A_{ji}}{\partial\xi_l}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j+\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial A_{ji}}{\partial t}\dot{\xi}_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial B_j}{\partial\xi_i}\dot{\xi}_i+\frac{\partial B_j}{\partial t}=0. \tag{3}$$

Движение несвободной системы (unfreies System) при изложенных условиях названо Герцом движением ведомой системы (geleitetes System). По обычной терминологии это будет движение по инерции системы со связями, явно зависящими от времени.

[30] Движение несвободной системы может быть определено, если заданы реакции внешних масс на внутренние, с ними связанные. Если опять вернемся к уравнениям (4, прим. 26), интегрирование их окажется возможным, когда те из выражений $A_{jk}\lambda_j$, которые зависят от координат внешних масс, даны нам как функции времени, координат и скоростей масс внутренних. Движение несвободной системы, заданное таким образом, Герц называет движением под действием сил (durch Kräfte beeinflusst), так как заданные реакции, очевидно, и играют здесь ту роль, которая в ньютоновой механике принадлежит силам.

Чтобы показать, что вводимые силы удовлетворяют третьему закону Ньютона, Герц рассматривает так называемые соединенные системы (gekoppelte System). Две системы называются соединенными, если одна или несколько координат одной системы всегда остаются равными соответственным координатам другой. Вообще говоря, нет необходимости ограничиваться рассмотрением лишь связей такого специального характера. Силы, приложенные к несвободной системе, могут возникать от связей, вполне произвольных между внутренними и внешними массами. Относительно же третьего закона Ньютона заметим, что Ньютон говорит лишь о взаимодействии двух тел или двух масс, а отнюдь не о взаимодействии двух систем. Чтобы из теории Герца получить закон действия и противодействия, мы должны рассмотреть две массы или для простоты две материальные точки и вспомнить, что уравнение связи между двумя массами должно зависеть лишь от относительного положения масс, т. е. от расстояния между ними. Следовательно, если координаты одной массы m_1 обозначим через x_1, y_1, z_1, а другой m_2 через x_2, y_2, z_2, то уравнение связи может зависеть лишь от

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

где

$$\xi=x_2-x_1;\quad \eta=y_2-y_1;\quad \zeta=z_2-z_1.$$

Итак, пусть уравнение связи

$$A(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta) + \ldots = 0. \quad (1)$$

Тогда левые части уравнения движения массы m_1 будут равны:

$$m_1\ddot{x}_1 + A\xi\lambda + \ldots = 0,$$
$$m_1\ddot{y}_1 + A\eta\lambda + \ldots = 0,$$
$$m_1\ddot{z}_1 + A\zeta\lambda + \ldots = 0,$$

где λ — множитель связи (1). А для второй массы получим:

$$m_2\ddot{x}_2 - A\xi\lambda + \ldots = 0,$$
$$m_2\ddot{y}_2 - A\eta\lambda + \ldots = 0,$$
$$m_2\ddot{z}^2 - A\zeta\lambda + \ldots = 0.$$

Из написанных равенств непосредственно и вытекает равенство и прямая противоположность двух реакций, проистекающих от связи между двумя массами. Другими словами, за источник силы — реакции связи на первую массу — мы можем, по Ньютону, признать вторую массу, и, наоборот, источником реакции на вторую массу служит первая.

Уравнения движения системы под действием сил будут для декартовых координат иметь вид:

$$m_i\ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^{k} A_{ji}\lambda_j + \Xi_i = 0, \quad (2)$$

где Ξ_i — данная реакция внешних масс на внутреннюю m_i. Множители λ_i определятся при помощи уравнений типа (3, прим. 29) или (5, прим. 26), смотря по тому, будет ли система управляемой или нет.

[31] Система носит название циклической, если она в состоянии совершать установившиеся движения; установившимся же или стационарным движением называется такое, при котором одни из координат системы (не циклические) остаются постоянными, а другие (циклические) изменяются пропорционально времени. Собственно, не само движение циклической системы интересно, а переход ее от одной стадии стационарного движения (при одних постоянных) к другой (при других постоянных). Главные свойства циклических систем указаны Гельмгольцем в его мемуаре «Principien der Statik monocyklischer Systeme» (См. Helmholtz's Wiss. Abh., Bd. 3).

[32] Преждевременная смерть помешала Герцу развить теорию циклических систем с той полнотой, которая соответствовала бы их значению для предложенной им новой механической схемы. Эти скрытые массы, скрытые системы должны заменить ньютоновское действие на расстоянии. С тою же целью, очевидно, Герц упоминает о машинах (§ 531 и сл.), т. е. о системах, обладающих бесконечно малыми массами, но связывающих системы с конечными массами. К сожалению, Герц не дал ни одного примера, в котором была бы детально разработана его идея о замене действия на расстоянии связанностью системы со скрытыми массами. Мы остановимся поэтому на системе консервативной, так как здесь по крайней мере эскизно намечено, как следует дополнить систему скрытыми массами.

По Герцу «консервативной системой называется такая, у которой все скрытые массы образуют адиабатные циклические системы» (§ 601). Под адиабатической разумеется такая циклическая система, у которой импульсы (§ 560), соответствующие циклическим координатам, не изменяются с течением времени. Силы, приложенные к консервативной системе, возникают вследствие спаренности видимых масс со скрытыми. Пусть какая-либо координата q_i видимых масс служит в то же время и нециклической координатой скрытых; тогда сила P_i, соответствующая этой координате, представится так:

$$P_i = \frac{\partial E}{\partial q_i},$$

где E — энергия циклической системы, выраженная через циклические импульсы. Отсюда заключаем, что силы P_i всегда имеют потенциал. Если прибавим, что связи системы не содержат явно времени (система не управляемая), то видим, что понятия о консервативной системе в герцовой и ньютоновой механике совпадают.

[33] **Якоби К. Г.** (Jacobi Carl Gustav Jacob), 1804—1851, немецкий математик, обучался в Берлинском ун-те, там же читал лекции в качестве приват-доцента. С 1827 г. — член Берлинской академии наук. В своих лекциях по динамике и в ряде исследований по теории эллиптических и ультраэллиптических функций Я. решил ряд важнейших вопросов чистой и прикладной математики, усовершенствовал предложенный Гамильтоном метод интегрирования дифференциальных уравнений динамики (механика Гамильтона—Якоби).

[34] **Мопертюи,** Пьер Луи Моро (Maupertuis Pierre Louis Moreau), 1698—1759, французский физик, астроном и геодезист, член Парижской академии наук (с 1723 г.). В 1741—1756 гг. работал в Германии, был президентом Берлинской академии наук (1745—1753). Мопертюи впервые сформулировал принцип наименьшего действия.

[35] Эта статья Г. Гельмгольца является предисловием к третьему тому собраний сочинений Герца (H. Hertz, Gesammelte Werke, Leipzig, 1894).

[36] Статья А. Пуанкаре «Les idées de Hertz sur la Mécanique» напечатана в Revue générale des Sciences pures et appliquées, № 18, 30. IX. 1897, p. 734—743.

БИБЛИОГРАФИЯ

ТРУДЫ Г. ГЕРЦА

1. *Über die Induction in rotirenden Kugeln.* Inaugural-Dissertation. Berlin, 1880, 94 S. 6 Taf.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 37—134. См. № 45.
2. *Versuche zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der electrischen Strömung.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1880, Bd. 10, S. 414—448.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 1—36. См. № 45.
3. *Über die Verteilung der Electricität auf der Oberfläche bewegter Leiter.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1881, Bd. 13, S. 266—275.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 135—144. См. № 45.
4. *Obere Grenze für die kinetische Energie der bewegten Electricität.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1881, Bd. 14, S. 581—590.
То же. — Ges. Werke. Bd. 1, S. 145—154. См. № 45.
5. *Über die Härte der Körper.* — Verhandlungen d. physikalischen Gesellschaft in Berlin, Berlin, [1882], Bd. 1, S. 67—69.
6. *Über die Berührung fester elastischer Körper.* — Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik v. Crell, Leipzig, 1882, Bd. 92, S. 156—171.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 155—173. См. № 45.
7. *Über Berührung fester elastischer Körper und über die Härte.* — Verhandlungen d. Vereins z. Beförderung d. Gewerbfleisses, Berlin, 1882, November.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 174—196. См. № 45.
8. *Über ein neues Hygrometer.* — Verhandlungen d. physikalischen Gesellschaft in Berlin, Berlin, [1882], Bd. 1, S. 18—19.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 197—198. См. № 45.
9. *Über die Verdunstung der Flüssigkeiten, insbesondere des Quecksilbers, im luftleeren Raume.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1882,

Bd. 17, S. 177—193.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 199—214. См. № 45.
10. [Dynamometrische Vorrichtung von geringem Widerstand und verschwindender Selbstinduction]. — Verhandlungen d. physikalischen Gesellschaft in Berlin, Berlin, [1882], Bd. 1, S. 102—103. То же. Zeitschrift f. Instrumentenkunde, Berlin, 1883, Jahrg. 3, S. 17—19.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 227—232. См. № 45.
11. *Über den Druck des gesättigten Quecksilbersdampfes.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1882, Bd. 17, S. 193—200.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 215—222. См. № 45.
12. *Über eine die electrische Entladung begleitende Erscheinung.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1883, Bd. 19, S. 78—86.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 233—241. См. № 45.
13. *Versuche über die Glimmentladung.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1883, Bd. 19, S. 782—816.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 242—276. См. № 45.
14. *Über das Verhalten des Benzins als Isolator und als Rückstandsbildner.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1883, Bd. 20, S. 279—284.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 277—282. См. № 45.
15. *Über die Vertheilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder.* — Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Leipzig, 1883, Bd. 28, S. 125—128.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 283—287. См. № 45.
16. [Kontinuirliche Ströme, welche durch die fluterregende Wirkung der Gestirne im Meere erregt werden]. — Verhandlungen d. physikalischen Gesellschaft in Berlin, Berlin, 1884, Bd. 2, S. 2—5.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 223—226. См. № 45.
17. *Über das Gleichgewicht schwimmender elastischen Platten.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1884, Bd. 22, S. 449—455.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 288—294. См. № 45.
18. *Über die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen electrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Electrodynamik.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1884, Bd. 23, S. 84—103.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 295—314. См. № 45.
19. *Graphische Methode zur Bestimmung der Adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft.* — Meteorologische Zeitschrift, Berlin, [1884], Bd. 1, S. 421—431, 474—475.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 320—338. См. № 45.
20. *Über die Dimensionen des magnetischen Pols in verschiedenen Maassystemen.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1885, Bd. 24, S. 114—118.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 315—319. См. № 45.

21. *Über sehr schnelle electrische Schwingungen.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1887, Bd. 31, S. 421—448, 543—544.
То же. — Ges. Werke. Bd. 2. S. 32—58. См. № 46.
То же на русск. яз. под загл.: О весьма быстрых электрических колебаниях. — Сб.: Электрические колебания и волны. Под ред. В. К. Лебединского. Вып. 2, СПб, 1910—1911, с. 69—109.
То же в кн.: 50 лет волн Герца., с. 45—75. См. № 7 на стр. 380.
То же в кн.: Из предистории радио, с. 131—148. См. № 15 на стр. 380.

22. *Über einen Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die electrische Entladung.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1887, Bd. 31, S 983—1000.
То же. — Sitzungsberichte d. Berl. Akad. d. Wiss., Berlin, 1887, S. 487—490.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 69—86. См. № 46.
То же на русск. яз. под загл.: О действии ультрафиолетового света на разряд электричества. — Сб.: Электрические колебания и волны. Под ред. В. К. Лебединского. Вып. 6, СПб, 1910—1911, с. 7—32.
То же в кн.: 50 лет волн Герца, с. 136—155. См. № 7 на стр. 380.

23. *Über Inductionserscheinungen, hervorgerufen durch die elektrischen Vorgänge in Isolatoren.* — Sitzungsberichte d. Berl. Akad. d. Wiss., Berlin, 1887, S. 885—896.
То же. — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1888, Bd. 34, S. 273—285.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 102—114. См. № 46.

24. *Fliessende Bewegung des Schnees auf Dächern.* — Meteorologische Zeitschrift, Berlin, [1887], Bd. 4, S. 72.

25. *Über die Einwirkung einer geradlinigen electrischen Schwingung auf eine benachbarte Strombahn.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1888, Bd. 34, S. 155—170.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 87—101. См. № 46.

26. *Über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1888, Bd. 34, S. 551—569.
То же. — *Sitzungsberichte* d. Berl. Akad. d. Wiss., Berlin, 1888, S. 197—210.
То же. — Ges. Werke, B. 2, S. 115—132. См. № 46.

27. *Über electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1888, Bd. 34, S. 609—623.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 133—146. См. № 46.
То же на русск. яз. под. загл.: Об электродинамических волнах в воздухе и об их отражении. — Кн.: 50 лет волн Герца, с. 76—91. См. № 7 на стр. 380.
То же. — Кн.: Из предистории радио, с. 156—165. См. № 15 на стр. 380.

28. *Über Strahlen elektrischer Kraft.* — Sizungsberichte d. Berl. Akad. d. Wiss., Berlin, 1888, S. 1297—1307.
То же. — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1889, Bd. 36, S. 769—783.
То же на фр. яз. под загл.: Sur les rayons de force électrique. — Journal d. Physique Théorique et Appliquée, Paris, 1889, t. 8, p. 127—137.
То же на англ. яз. под загл.: On Rays of electric force. — The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, London, 1889, v. 27, N 167, p. 289—298.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 184—198. См. № 46.
То же на русск. яз. под загл.: О лучах электрической силы. — Кн.: 50 лет волн Герца, с. 120—135. См. № 7 на стр. 380.
То же. — Кн.: Из предистории радио, с. 183—192. См. № 15 на стр. 380.
То же. — Прил. к статье Малова, с. 559—570. См. № 11 на стр. 380.
То же (начало). — Электричество, 1939, № 5, с. 46—47.

29. [Die sogenannten Nebelsbläschen]. — Verhandlungen d. naturwissenschaftlichen Vereins in Karlsruhe, Karlsruhe, 1888, Bd. 10, Sitzungsber., S. 92—93.

30. [Bestrebungen der Elektrotechnik]. — Verhandlungen d. naturwissenschaftlichen Vereins in Karlsruhe, Karlsruhe, 1888, Bd. 10, Sitzungsber., S. 123—125.

31. [Gleichzeitiges Telegraphiren und Telephoniren in demselben Drahte]. — Verhandlungen d. naturwissenschaftlichen Vereins in Karlsruhe, Karlsruhe, 1888, Bd. 10, Sitzungsber., S. 131—132.

32. [Neue Beziehung zwischen Licht und Elektricität]. — Verhandlungen d. naturwissenschaftlichen Vereins in Karlsruhe, Karlsruhe, 1888, Bd. 10, Sitzungsber., S. 150—151.

33. *Die Kräfte electrischer Schwingungen, Behandelt nach der Maxwell'schen Theorie.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1889, Bd. 36, S. 1—22.
То же на фр. яз под загл.: Les forces des oscillations électriques déterminées d'après la théorie de Maxwell. — Bibliothèque Universelle. Archives d. Sciences Physiques et Naturelles, Genève, 1889, t. 21, p. 519—543.
То же. — Ges. Werke. Bd. 2, S. 147—170. См. № 46.
То же на русск. яз под загл.: Силы электрических колебаний, рассматриваемые с точки зрения теории Максвелла. — Кн.: 50 лет волн Герца, с. 92—119. См. № 7 на стр. 380.
То же. — Кн.: Из предистории радио, с. 166—182. См. № 15 на стр. 380.

34. *Über die Fortleitung elektrischer Wellen durch Drähte.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1889, Bd. 37, S. 395—408.
То же на фр. яз. под загл.: Sur la transmission des ondes électriques par des fils conducteurs. — Bibliothèque universelle. Archives d. Sciences Physiques et Naturelles, Genève, 1889, t. 22, p. 231—248.
То же на англ. яз. под загл.: On the propagation of electric waves through

wires. — London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magasine and Journal of Science, London, 1889, v. 28, N 171, p. 117—127.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 171—183. См. № 46.
35. *Recherches sur les ondolations électriques.* — Bibliothéque universelle. Archives d. Sciences Physiques et Naturelles, Genève, 1889, t. 21, p. 281—308.
36. *Über die Beziehung zwischen Licht und Electricität.* — Vortrag, gehalten b. d. 62 Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg am 20 Sept. 1889. Bonn, 1889.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 339—354. См. № 45.
То же на русск. яз. под загл.: Об отношениях между светом и электричеством. СПб., 1890, 21 с.
То же под загл.: О соотношениях между светом и электричеством. — Кн.: Из предистории радио, с. 193—202. См. № 15 на стр. 380.
37. *Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper.* — Nachrichten v. d. Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften u. d. Georg-August-Universität zu Göttingen, Göttingen, 1890, S. 106—149.
То же. — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1890, Bd. 40, S. 577—624.
То же на фр. яз. под загл.: Équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en repos. — Bibliothèque universelle. Archives d. Sciences Physiques et Naturelles, Genève, 1890, t. 24, p. 5—66.
То же на итал. яз. под загл.: Equazioni fondamentali dell'elettrodinamica per i corpi in quiete. — Nuovo Cimento, Torino—Pisa, 1890, v. 28.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 208—255. См. № 46.
38. *Über die Bildung des electrischen Stromes in metallischen Leitern.* — Correspondenzblatt [des Naturhistorischen Vereins der Preussischen Rheinlande und Westfalens], Bonn, 1890, Bd. 47, S. 33—34.
39. *Über die Grundgleichungen der Electrodynamik für bewegte Körper.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1890, Bd. 41, S. 369—399.
То же на фр. яз. под загл.: Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement. — Acta mathematica, Stockholm, 1891, t. 14, p. 349—375.
То же на итал. яз. под загл.: Equazioni fondamentali dell'elettrodinamica per i corpi in moto. — Nuovo Cimento, Torino—Pisa, 1892, v. 31.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 256—285. См. № 46.
40. *Zum 31 August 1891.* Beilage zur Münchener Allgemeinen Zeitung, v. 31, August 1891.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 360—368. См. № 45.
41. *Sur la propagation des perturbations électriques dans les fils conducteurs.* — La lumière électrique, Paris, 1891, t. 41, p. 251—252.
42. *Über die mechanischen Wirkungen electrischer Drahtwellen.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1891, Bd. 42, S. 407—415.

То же. — Ges. Werke, Bd. 2, S. 199—207. См. № 46.
43. *Über den Durchgang der Kathodenestrahlen durch dünne Metallschichten.* — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1892, Bd. 45, S. 28—32.
То же. — Ges. Werke, Bd. 1, S. 355—359. См. № 45.
44. *Aus der Abhandlung Herrn W. von Bezolds: «Untersuchungen über die elektrische Entladung. Vorläufige Mitteilung.»* — Ges. Werke, Bd. 2, S. 59—68. См. № 46.
То же на русск. яз. — Кн.: Из предистории радио, с. 149—155. См. № 15 на стр. 380.
45. *Gesammelte Werke.* Bd. 1. (Schriften vermischten Inhalts), Leipzig, 1894—1895, 368 S.
То же на англ. яз. под загл. Miscellaneous papers. London—New York, 1896.
46. *Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft.* Leipzig, 1892, 295 S.
То же. — Ges. Werke, Bd. 2, Leipzig, 1894—1895.
То же на англ. яз. под загл.: Electric waves; being researches on the propagatin of electric action with finite velocity through space. Praef. by Lord Kelvin. London—New York, 1893, 278 p.
Einleitende Übersicht на русск. яз. под загл.: Генрих Рудольф Герц. Исследования по распространению электрической силы. 1. Вводный обзор. — Кн.: Из предистории радио, с. 112—130. См. № 15 на стр. 380.
47. *Die prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt.* — Ges. Werke, Bd. 3. Leipzig. 1894—1895. 312 S.
То же на англ. яз. под загл.: The Principles of mechanics, presented in a new form. London — New Vork. 1899. То же на англ. яз. под загл.: The principles of mechanics, presented in a new form, Dover Publication, New York, 1956, с введением S. Cohen. Предисловие Герца под загл.: Heinrich Hertz. Drei Bilder der Mechanik. Zur 100. Wiederkehr des Geburtstages von Heinrich Hertz am 22 Februar 1957. — Physikalische Blätter, Mosbach—Baden, 1957, Nr. 2 [Febr.], S. 49—59. Предисловие Герца на русск. яз. под загл.: Предисловие к механике. — Кн.: Философия науки. Естественнонаучные основы материализма. Ч. 1. Физика. Вып. 11. М.—Л., 1924, с. 41—78. Предисловие Г. Гельмгольца, предисловие Г. Герца, введение к «Принципам механики». — Бюллетень заочной консультации ИКП, М., 1931, № 7, с. 24—49.
48. Erinnerungen, Briefe, Tagabücher. Zusammeng. v. Johann Hertz. Leipzig, 1927, 263 S.

О ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Г. ГЕРЦА

1. Хвольсон О. Д. Опыты Герца и их значение. — Электричество, СПб, 1890, № 1, с. 3—7, № 2, с. 22—26, № 3, с. 42—47, № 4, с. 61—66, № 5, с. 85—90.
То же (отрывки). Кн.: Из предистории радио, с. 411—415. См. наст. раздел библиографии, № 15.

2. Лебедев П. Н. Über die Doppelbrechung der Strahlen elektrischer Kraft. — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1895, Bd. 46, S. 1—17.
То же на русск. яз. под загл. О двойном преломлении лучей электрической силы. — Кн.: Лебедев П. Н., Собрание сочинений, М., 1913, с. 37—53.
То же в кн.: Лебедев П. Н. Избранные сочинения, М., 1949, с. 66—83.
То же (сокращ.). — Журнал Русского физико-химич. общ., СПб, 1895, т. 27, ч. физич., отд. 1, вып. 7, с. 213—220.
То же. — Кн.: Из предистории радио, с. 398—403. См. № 15.
3. Бернацкий В. А. Опыты Герца с зеркалами. — Труды Общ. естествоиспытателей при Варшавском ун-те, Варшава, 1894—1895, вып. 4, с. 80—86.
4. Фроловский Н. А. Начала механики по Генриху Герцу. — Сборник Ин-та инженеров путей сообщения, СПб., 1910, вып. 79, с. 1—128.
5. Райнов Т. И. К истории построения «механики без силы». — Социалистическая реконструкция и наука, 1933, вып. 1, с. 57—80.
6. Котов В. Ф. Механика Герца. — Ученые записки Московского гос. ун-та, 1937, вып. 7, с. 201—256.
7. 50 лет волн Герца. Отв. ред. В. К. Аркадьев, М.—Л., 1938, 156 с. [АН СССР, ОТН. Классики естествознания].
8. Аркадьев В. К. Работы Герца, их значение и дальнейшее развитие. Кн.: 50 лет волн Герца, с. 9—30. См. № 7.
9. Кляцкин И. Г. Генрих Герц и современная радиотехника. — Электросвязь, 1938, № 6, с. 3—9.
То же. — Кн.: 50 лет волн Герца, с. 31—40. См. № 7.
То же. — Электричество, 1939, № 6, с. 48—52.
10. Бачинский А. И. Генрих Герц. [К 50-летию со времени открытия и исследования электромагнитных волн]. — Физика в школе, 1938, № 5—6, с. 1—3.
11. Малов Н. Н. Генрих Герц. — Успехи физических наук, 1938, т. 19, вып. 4, с. 553—570.
12. Лебедев Г. Генрих Герц. — Радиофронт, 1939, № 1, с. 59—60.
13. Аркадьев В. К. 50 лет открытия волн Герца. — Вестник Академии наук СССР, 1939, № 4—5, с. 98—101.
14. Радовский М. И. Генрих Герц. — Электричество, 1939, № 5, с. 45—46.
15. Из предистории радио. Сборник оригинальных статей и материалов. Сост. проф. С. М. Рытов, под ред. Л. И. Мендельштама. М.—Л., 1948. [АН СССР, 50 лет радио, 1895—1945, вып. 1], с. 112—202, 385—403, 411—415, 424—445.
16. Аренберг А. Г. Генрих Герц (1857—1894). Всесоюзное о-во по распространению политич. и науч. знаний, сер. 8, № 23, М., 1957, 22 с.

17. Малов Н. Н. Генрих Рудольф Герц. [К столетию со дня рождения]. — Радиотехника и электроника, М., 1957, т. 2, вып. 2, с. 131—135.
18. Соминский М. С. Генрих Герц. [К столетию со дня рождения]. — Физика в школе, 1957, № 2, с. 22—26.
19. Кляцкин И. Г. Генрих Герц. К 100-летию со дня рождения. — Электричество, 1957, № 3, с. 70—73.
20. Соминский М. С. Знаменитый немецкий физик. К 100-летию со дня рождения Г. Герца. — Природа, 1957, № 4, с. 70—77.
21. Полак Л. С. Вариационные принципы механики, их развитие и некоторые применения в физике. Дисс., гл. 5, 1957.
22. Аренберг А. Г. Генрих Герц и электромагнитные волны. — Вопросы истории естествознания и техники, 1958, № 5, с. 9—18.
23. Введенский Б. А. Генрих Герц. — Вопросы истории естествознания и техники, 1958, № 5, с. 3—8.
24. Григорьян А. Т., Полак Л. С. Механика Генриха Герца. — Вопросы истории естествознания и техники, 1958, № 5, с. 19—30.
25. Суслов Г. К. Механика Герца. — Известия Киевского университета за 1898 г.
26. Boltzmann L. Über die Hertz'schen Versuche. — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1890, Bd. 40, S. 399—400.
То же на русск. яз. под загл.: Об опытах Герца. — Кн.: Из предистории радио, стр. 385—386. См. № 15.
27. Weitz K. Über die Wellenlängen electrischer Schwingungen. — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1890, Bd. 41, S. 435—447.
28. Lorentz H. Some Considerations on the Principles of Dynamics, in connexion with Hertz's «Prinzipien der Mechanik». — Collected Papers, 1937, v. 4, p. 36—58.
29. Schmidt K. E. F. Heinrich Hertz (Nachruf, gehalten am 11 Januar 1894 im naturwissenschaftlichen Verein für Sachsen und Thüringen). — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Leipzig, 1893, Bd. 66, S. 370—381.
30. Righi A. Sur quelques dispositions expérimentales dans les exrépnieces de Hertz. — La lumière électrique, Paris, 1893, t. 48, p. 508—511.
31. Righi A. Alcune esperienze con oscillazioni di Hertz di piccola lunghezza d'onda. — Atti della reale Academia dei Lincei, Roma, 1893, v. 2, fasc. 1, sem. 1, p. 505—517.
То же на фр. яз. под загл. Les expériences de Hertz avec des oscillations de petites longueurs d'onde. — La lumière électrique, 1893, t. 48, p. 601—609.
То же на русск. яз. под загл.: Опыты Герца с колебаниями малых длин волн. — Кн.: Из предистории радио, с. 387—397. См. № 15.
32. Bonfort H. Scetch of Heinrich Hertz. — Popular Science Monthly, 1894, July, v. 45, N 3.

То же. — Annual report of the board of regents of the smithosian institution, Washington, (1894) 1896, p. 719—726.
33. Drude P. Zur Demonstration der Hertz'schen Versuche. — Annalen d. Physik u. Chemie v. Wiedemann, Leipzig, 1894, Bd. 52, S. 499—508.
34. Planck M. Heinrich Rudolf Hertz. Rede zu seinem Gedächtnis. — Verhandlungen d. physikalischen Gesellschaft in Berlin, Berlin, 1894, Bd. 13, S. 9—29.
То же. — Leipzig, 1894, 23 S.
То же (сокращ.). — Naturwiss. Rundschau, 1894, Bd. 9, S. 140—143.
35. Lodge O. The work of Hertz. A lecture delivered at the Royal Institution on Friday, June 1. — Nature, London — New York, 1894, v. 50, p. 133—139.
То же на русск. яз. под загл.: Творение Герца. — Кн.: Из предистории радио, с. 424—445. См. № 15.
36. Ebert H. Heinrich Hertz (Gedächtnisrede gehalten in der allgemeinen Sitzung am 7 März 1894). — Sitzungsberichte d. Physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen, Erlangen, (1894) 1895, H. 26, S. 15—39.
То же на англ. яз. — The Electrician, London, 1894, v. 33, p. 272—274, 299, 332—335, 415—417.
37. Lenard Ph. Heinrich Hertz. — Кн.: Grosse Naturforscher. Eine Geschichte der Naturforschung in Lebensbeschreibungen. München, 1929, S. 298—308.
38. Crew H. Heinrich Rudolf Hertz. — Portraits of Famous Physicists with Biographical Accounts, Portr. 11, New York, 1942.
39. Dugas R. Histoire de mécanique. Neuchatel, 1950, p. 430—433.
40. Runge W. T. Von Heinrich Hertz zur drahtlosen Telegraphie. Eine Betrachtung zur 100. Wiederkehr seines Geburtstages. — Telefunken-Zeitung, Berlin, 1957, Bd. 30, № 3—4.
41. [Некролог] — Sitzungsberichte der math.-phys. Classe d. k. b. Acad. d. Wiss. zu München, München, (1894) 1895, Bd. 24, S. 146—148.
42. [Некролог] — Mémoires d. l. Société d. Physique et d'Hist. nat. de Genève. Genève, 1894—1897, t. 32, p. 69—73.
43. [Некролог] — Nature, London — New York, 1893—1894, v. 49, p. 265—266.
44. [Некролог] — Almanach der Kais. Akademie d. Wiss., Wien, 1894, 44 Jahrg, S. 263—268.
45. [Некролог] — The electrician, London, 1893—1894, v. 32, p. 273.
46. [Некролог] — Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society, Manchester, 1894, v. 8, p. 214—215.
47. [Некролог] — Revue scientifique, Paris, 1894, ser. 4, t. 1, p. 123—124.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ, ИЗЛОЖЕННЫЕ В НОВОЙ СВЯЗИ

Книга первая

ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Книга вторая

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

ПРИЛОЖЕНИЯ

Генрих Герц

Принципы механики, изложенные в новой связи.

*

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии «Классики науки»
Академии наук СССР

*

Редактор издательства *К. П. Гуров*
Портрет гравера *М. С. Белова*
Технический редактор *Н. Д. Новичкова*

*

РИСО АН СССР № 5-103В. Сдано в набор 12/XII 1958 г.
Подписано к печати 23/II 1959 г. Формат 70×92¹/₁₆.
Печ. л. 24,25+1 вкл.=28,37 усл. печ. + 1 вкл.
18,5 уч.-изд. л. Тираж 2500 экз. Изд. № 3328.
Тип. зак. № 903.

Цена 15 руб.

Издательство Академии наук СССР
Москва, В-62, Подсосенский пер., 21

1-я тип. Изд-ва АН СССР.
Ленинград, В-34, 9 линия, дом 12