

МАКС ПЛАНК

---

MAX PLANCK

---

Einführung in die Mechanik  
deformierbarer Körper

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ  
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

---

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО

Л. Я. ШТРУМА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Пр оф. Н. П. КАСТЕРИНА



*Научно-технической секцией Государственного  
ученого совета допущено в качестве  
пособия для высших учебных заведений*



---

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА \* ЛЕНИНГРАД

1 9 2 9

ОТ П Е Ч А Т А Н О  
в 1-й Образцовой типографии  
Гиза. Москва, Пятницкая, 71,  
Главлит А-17647. Н.21. Гиз 26282.  
Заказ № 1667. Тираж 2 000 экз.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

„Механика деформируемых тел“, представляя продолжение курса „Общей механики“ Планка в применении ее к специальным вопросам упругого деформируемого тела, в то же время подготавливает читателя к усвоению последующих курсов Планка по теории электричества и магнетизма и по теории света. Автор и в этом курсе с обычным мастерством, сжато и ясно, вводит читателя в круг исследований по теории упругости, гидродинамики и аэродинамики и в теорию вихревых движений в объеме, достаточном для того, чтобы можно было приступить к самостоятельной научной работе.

*Редактор*

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

В новом издании сделано несколько небольших исправлений. Студ. мат. *Г. Зейти* обратил мое внимание на досадную ошибку в вычислении уравнения (292).

*Автор*

Берлин-Грюневальд,  
февраль 1922 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

О задаче, которую я поставил себе при составлении этого курса, а также о пути, выбранном мною для разрешения ее, можно сказать по существу то же самое, что я пытался изложить в предисловии к „Введению в общую механику“. В представлении

читателя этой книги механика деформируемых тел должна возникнуть как естественное, обусловленное внутренней необходимостью продолжение общей механики и прежде всего как ряд тесно связанных, логически обоснованных понятий. Это даст читателю возможность не только изучать с полным пониманием более подробные курсы и специальную литературу, но и производить самостоятельные, более глубокие исследования.

Благодаря ссылкам на законы и уравнения, выведенные в упомянутой моей книге, нередко удается значительно сократить и упростить изложение. Такие ссылки обозначены цифрой 1. Так например, 1 (155) обозначает уравнение 155 „Общей механики“; 1 § 49 обозначает § 49 той же книги. Кроме того, я старался сэкономить место, пропуская те формулы или промежуточные вычисления, которые может выполнить без особого труда всякий читатель, обладающий математическим образованием.

В конце книги, как и в предыдущей, приложен алфавитный указатель встречающихся определений и важнейших выведенных теорем. Этот указатель окажется, надо думать, полезным для справок.

*Автор*

Берлин-Грюневальд,  
февраль 1919 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
<i>Вступление</i> . . . . .	9
<i>Часть первая</i>	
ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНО-ПРОТЯЖЕННОГО ТЕЛА	
Глава I. Кинематические законы . . . . .	11
Глава II. Динамические законы . . . . .	34
<i>Часть вторая</i>	
БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ.	
Глава I. Твердые тела. Общие положения . . . . .	46
Глава II. Состояние равновесия твердых тел . . . . .	64
Глава III. Колебательные явления в твердых телах . . . . .	75
Глава IV. Колебательные явления в жидкостях и газах . . . . .	110
<i>Часть третья</i>	
КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ.	
Глава I. Общие положения . . . . .	128
Глава II. Безвихревые движения . . . . .	151
Глава III. Вихревые движения . . . . .	181
Глава IV. Трение . . . . .	192
Указатель определений и важнейших теорем . . . . .	206

## ВСТУПЛЕНИЕ

§ 1. Деформируемым телом, в противоположность неизменяемому телу, называется такое тело, которое в состоянии подвергнуться изменению формы либо все в целом, либо в какой-либо своей части. В природе, строго говоря, все тела деформируемы, так как не существует вовсе таких движений, которые не сопровождались бы большими или меньшими изменениями формы или деформациями тел, принимающих участие в этих движениях. Но во многих случаях, например, при изучении маятника, рычага, волчка, достаточно, в качестве первого приближения к действительности, предположить, что рассматриваемые тела неизменяемы. Движениями неизменяемых тел занимается общая механика. Здесь же мы будем заниматься такими движениями, особенности которых характеризуются прежде всего деформациями тел. Поэтому нам необходимо еще несколько уточнить наши допущения о свойствах тел, причем мы прежде всего предположим в качестве основного допущения, что пространство, занимаемое телами, *непрерывно* заполнено материей. Конечно, и это допущение, подобно допущению о неизменяемости, представляет собою идеальную абстракцию и в точности никогда не соблюдается в природе, так как, строго говоря, все тела имеют атомистическое строение. Но, в качестве первого приближения к действительности, можно и в данном случае вполне обойтись упрощающим допущением. Подобно тому как при установлении простейших законов о рычаге было бы излишне и нецелесообразно рассматривать вместе с тем упругий изгиб, фактически всегда существующий, так и при изучении основных законов звуковых волн или течений жидкости было бы очень неудачным приемом, если бы мы с самого же начала захотели перейти к молекулам или даже к неизменным атомам рассматриваемых тел. К тому же даже атомы представляют собою слова лишь идеальную абстракцию. Природа вообще не может быть абсолютно исчерпана человеческой мыслью.



Самая важная и в то же время самая трудная для физика-теоретика задача при математической формулировке какой-либо проблемы заключается в том, чтобы ввести именно те упрощающие допущения, которые имеют существенное значение для интересующих его особенностей исследуемого физического явления, и в то же время пренебречь всеми влияниями меньшего порядка величин, которые ничего существенного не изменили бы в основных результатах и вошли бы в рассуждения лишь в качестве математического балласта. Важно и необходимо лишь требование, чтобы различные гипотезы, вводимые для различных проблем, были совместимы между собою. Иначе физическая картина мира потеряла бы свое единство, и мы имели бы, в зависимости от обстоятельств, различные противоречащие друг другу ответы на один и тот же вопрос.

Для той задачи, которую мы поставили себе в этой книге, целесообразнее всего разделить весь материал на *три* отдельные части. В первой части рассматриваются общие законы движения непрерывно заполняющих пространство тел, независимо от их агрегатного состояния, а во второй и третьей частях будут даны приложения этих законов к важнейшим видам движения, связанным с бесконечно-малыми или же с конечными деформациями.

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНО ПРОТЯЖЕННОГО ТЕЛА

★

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 2. Подобно тому как мы поступали в общей механике материальных точек и неизменяемых тел, мы и в механике деформируемых тел сначала рассмотрим свойства движений самих по себе, не ставя вопроса о причинах движений, и прежде всего постараемся дать для них исчерпывающее математическое представление. Движение материального тела вполне определено тогда и только тогда, когда известны движения всех материальных точек, на которые его можно мысленно разложить, или же, другими словами, когда положение каждой такой материальной точки задано как функция времени. Чтобы характеризовать определенную материальную точку тела, рассмотрим состояние тела в момент времени  $t=0$ , и в этом состоянии определим положение каждой материальной точки тела тремя координатами  $a, b, c$ , относительно неподвижной прямоугольной правой системы координат (I, § 16). Эти три величины,  $a, b, c$ , должны служить для характеристики материальной точки также и в последующие моменты  $t$ , когда координаты ее перейдут от значений  $a, b, c$ , к значениям  $x, y, z$ . Они представляют собою как бы название точки, с помощью которого она может быть опознана во всякий момент. Все движение материального тела определено во всех подробностях, если для каждой материальной точки  $a, b, c$ , из которых состоит тело, координаты  $x, y, z$  заданы как функции  $t$ , т. е. если

$$\left. \begin{aligned} x &= f(a, b, c, t), \\ y &= \varphi(a, b, c, t), \\ z &= \psi(a, b, c, t), \end{aligned} \right\}$$

где  $f, \varphi, \psi$  обозначают некоторые однозначные и конечные функции от  $a, b, c, t$ . Мы примем также, что они непрерывны, полагая таким образом, что тело не распадается во время движения на отдельные части. Согласно указанным выше положениям, при  $t=0$

$$x = a; y = b; z = c. \quad 1a$$

Ввиду обилия возможностей, заключенных в выражениях (1), рекомендуется сначала рассмотреть некоторый вполне определенный момент времени  $t$ , или, другими словами, ограничиться сначала рассмотрением того изменения, которое тело претерпевает от момента 0 до момента  $t$ , где  $t$  имеет некоторое постоянное значение. Тогда мы можем вовсе выпустить  $t$  из выражений (1) и получим более простые формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(a, b, c), \\ y &= \varphi(a, b, c), \\ z &= \psi(a, b, c). \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения обозначают переход тела из определенного „начального положения“ в определенное „конечное положение“, причем материальная точка  $(a, b, c)$  переходит из места  $(a, b, c)$  в место  $(x, y, z)$ . Поэтому величины

$$x - a = u, y - b = v, z - c = w \quad 3$$

называются компонентами „смещения“ точки.

Если разрешить уравнения (2) относительно  $a, b, c$ , то мы получим  $a, b, c$  как определенные функции от  $x, y, z$ . Эти функции дают ответ на вопрос о том, в каком месте находилась до изменения тела та материальная точка, которая после изменения имеет координаты  $x, y, z$ . Мы полагаем, что эти функции, которые можно толковать как изменение, обратное рассматриваемому, также однозначны, конечны и непрерывны.

§ 3. В качестве примера рассмотрим сперва общий случай *линейного изменения*:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ y &= \mu_0 + \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ z &= \nu_0 + \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c. \end{aligned} \right\} \quad 4$$

Обозначения постоянных выбраны так, что буквы  $\lambda, \mu, \nu$  соответствуют  $x, y, z$ , а значки 1, 2, 3 соответствуют  $a, b, c$ .

Величины  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  дают смещение той материальной точки, которая до изменения находилась в начале координат.

Уравнения (4), разрешенные относительно  $a, b, c$ , дают:

$$\left. \begin{aligned} a &= \lambda_1' (x - \lambda_0) + \mu_1' (y - \mu_0) + \nu_1' (z - \nu_0), \\ b &= \lambda_2' (x - \lambda_0) + \mu_2' (y - \mu_0) + \nu_2' (z - \nu_0), \\ c &= \lambda_3' (x - \lambda_0) + \mu_3' (y - \mu_0) + \nu_3' (z - \nu_0), \end{aligned} \right\} \quad 5$$

где

$$\lambda_1' = \frac{[\lambda_1]}{D} \text{ и т. д.}, \quad 6$$

если обозначить для сокращения так называемый функциональный определитель:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = D, \quad 7$$

а коэффициент при элементе  $\lambda_1$  в выражении этого определителя:

$$\mu_2 \nu_3 - \mu_3 \nu_2 = [\lambda_1], \text{ и т. д.} \quad 8$$

Так как мы полагаем, что все постоянные, со штрихами и без штрихов, конечны, то функциональный определитель  $D$  не может равняться нулю. На этом основании мы можем тотчас определить знак  $D$ . Действительно: изменение происходит не внезапно, а постепенно в течение конечного времени  $t$ . Поэтому необходимо рассматривать постоянные изменения  $\lambda, \mu, \nu$ , и вместе с тем определитель  $D$  как непрерывные функции  $t$ . Но до изменения, при  $t=0$

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \text{ и т. д.}, \quad 9$$

стало быть  $D=1$ . Далее, с течением времени, определитель  $D$  изменяется непрерывно, начиная со значения 1 и никогда не обращаясь в нуль. Отсюда следует, что  $D$  всегда положительно:

$$D > 0. \quad 10$$

§ 4. Частный случай линейного изменения представляет собою поступательное перемещение (1, § 102), при котором все материальные точки тела претерпевают одинаково направленные и равные смещения любой величины. В этом случае, согласно (3),

$$x - a = \text{const.}, y - b = \text{const.}, z - c = \text{const.},$$

т. е. частный случай уравнений (4).



Другой частный случай линейного изменения есть вращение (1, § 101) около какой-либо оси, с произвольным углом вращения. Чтобы доказать это утверждение, составим уравнения для произвольного конечного вращения. Для этого введем, кроме неподвижной в пространстве системы координат, начало которой мы поместим на оси вращения, еще другую систему координат, неизменно связанную с телом и, значит, могущую двигаться в пространстве. Последнюю систему выберем так, чтобы до изменения соответствующие оси обеих систем совпадали между собою. В таком случае после изменения каждые две оси обеих систем образуют друг с другом некоторые углы, косинусы которых мы обозначим  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ , причем пусть буквы  $\alpha, \beta, \gamma$  относятся к осям первой системы, а цифры 1, 2, 3 — к осям второй системы.

Положим, что до изменения тела какая-нибудь материальная точка имеет координаты  $a, b, c$  относительно каждой из двух систем. Зато после изменения та же материальная точка имеет уже координаты  $x, y, z$  относительно первой системы, а относительно второй системы — прежние координаты  $a, b, c$ . Поэтому взаимоотношение между  $x, y, z$  и  $a, b, c$  такое же, как при преобразовании координат какой-нибудь точки пространства от одной системы координат к другой системе, характеризующейся девятью заданными косинусами направления, или, согласно [1, (329)],

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y &= \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z &= \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c, \end{aligned} \right\} \quad 11$$

т. е. также частный случай уравнений (4).

Если к вращению (11) присоединить еще поступательное перемещение с компонентами смещения  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$ , то мы получим наиболее общее изменение, которому может подвергнуться неизменяемое тело. Это изменение выражается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y &= \mu_0 + \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z &= \nu_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c. \end{aligned} \right\} \quad 12$$

Но и это изменение также представляет собою частный случай общего линейного изменения (4), так как 12 постоянных, характеризующих его, не независимы друг от друга. Таким образом, если поставить вопрос, при каких условиях линейное изменение (4) какого-нибудь тела не сопровождается деформациями последнего,

то ответ будет следующий: коэффициенты изменения  $\lambda, \mu, \nu$  должны удовлетворять тем соотношениям, которые существуют между соответствующими коэффициентами уравнений (12). На основании [1 (331) и (332)] это всего шесть соотношений, из них три соотношения вида:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \text{ и т. д.}, \quad 13$$

и три соотношения вида:

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 = 0, \text{ и т. д.} \quad 14$$

В этих соотношениях содержится вместе с тем ряд других соотношений, как например, те шесть, которые можно получить из (12) и (14) заменой букв  $\lambda, \mu, \nu$  цифрами 1, 2, 3 (см. [1 (333) и (334)], далее соотношение [1 (491)]

$$D = 1 \quad 15$$

и девять соотношений [1 (492)] вида:

$$\lambda_1 = \mu_3 \nu_3 - \mu_3 \nu_2 = [\lambda_1] = \lambda_1', \text{ и т. д.} \quad 16$$

Поэтому в уравнениях (5) для обратного изменения коэффициенты со штрихами заменяются коэффициентами без штрихов.

§ 5. Возвратимся к общему случаю линейного изменения и выведем некоторые свойства последнего. Прежде всего легко показать, что все материальные точки, лежащие до изменения в одной плоскости, находятся в одной плоскости также и после изменения. Действительно, материальные точки  $(a, b, c)$ , лежащие в одной плоскости, удовлетворяют линейному уравнению:

$$Aa + Bb + Cc + D = 0. \quad 17$$

изменения положение каждой из этих точек определяется величинами  $x, y, z$ , которые заданы уравнениями (4). Поэтому, если  $a, b, c$  удовлетворяют уравнению (17), то  $x, y, z$  удовлетворяют соотношению, которое получится, если исключить  $a, b, c$ , или, проще всего, подставить значения (5) в (17). Получится снова линейное уравнение. Следовательно точки  $(x, y, z)$  лежат также в одной плоскости.

Из закона сохранения плоскостей непосредственно следует закон сохранения прямых, так как прямая определяется пересечением двух плоскостей, а также закон сохранения порядка какой-

либо поверхности, так как порядок поверхности определяется числом точек пересечения ее с прямой линией.

При линейном изменении сохраняется также параллелизм: если бы две материальные плоскости, которые были параллельны до изменения, сделались бы непараллельными после изменения, то линия пересечения их, не лежащая в бесконечности, состояла бы из таких материальных точек  $(a, b, c)$ , которые до изменения лежали в бесконечности, для которых следовательно при конечных величинах  $x, y, z$ , хотя бы некоторые из величин  $(a, b, c)$  были бы бесконечными. Но это невозможно, на основании уравнений (5).

Из сохранения плоскостей и сохранения параллелизма следует также сохранение всех параллелепипедов. Но углы и объемы последних могут изменяться. Вычислим изменение объема какого-нибудь вырезанного из тела параллелепипеда, который может быть задан четырьмя произвольно выбранными вершинами:  $a_1, b_1, c_1, \dots, a_4, b_4, c_4$ . До изменения объем этого параллелепипеда:

$$V = \pm \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} \quad 18$$

а после изменения:

$$V' = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad 19$$

где  $x, y, z$  связаны с величинами  $a, b, c$ , имеющими одинаковые значки, при помощи уравнений (4).

Зависимость между  $V$  и  $V'$  проще всего получить, если умножить определитель (18) на функциональный определитель (7), который можно написать в виде определителя четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D. \quad 20$$

Согласно теореме умножения определителей, произведение определителей (18) и (20) есть также определитель четвертого порядка, отдельные члены которого получаются, если следующим образом сопоставить между собою каждую строку первого определителя

с каждой строкой второго определителя: члены обеих строчек, стоящие на одинаковых местах, перемножаются, и произведения складываются. Таким образом первый член первой строки произведения равен:

$$a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_3 + 1 \cdot \lambda_0;$$

второй член первой строки:

$$a_1 \mu_1 + b_1 \mu_2 + c_1 \mu_3 + 1 \cdot \mu_0;$$

четвертый член первой строки:

$$a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + 1 \cdot 1, \text{ и т. д.,}$$

а весь определитель окажется, на основании (4), тождественным с определителем (19). Поэтому имеем:

$$V \cdot D = V', \quad 21$$

причем все три величины  $V, V', D$  положительны.

Так как последнее соотношение не зависит от величины и формы рассматриваемого параллелепипеда, и, значит, действительно также для бесконечно малых параллелепипедов, то уравнение (21) можно обобщить непосредственно на всякий объем, вырезанный из тела. Мы получим такое правило: при линейном изменении объемы всех частей тела изменяются в одинаковой мере, причем отношение объема какой-либо части тела после изменения к объему ее до изменения равно функциональному определителю. В согласии с этим находится уравнение (15), по которому при всяком изменении неизменяемого тела функциональный определитель равен единице.

„Расширением“ объема называется отношение изменения объема к первоначальному объему. Таким образом расширение при линейном изменении равно:

$$\frac{V' - V}{V} = D - 1, \quad 22$$

и положительно или отрицательно, смотря по тому, происходит ли растяжение или сжатие.

§ 6. Если подвергнуть какое-нибудь тело двум или нескольким последовательным линейным изменениям, то в результате получится также линейное изменение. В этом легко убедиться,



если рассмотреть взаимоотношение между координатами какой-либо материальной точки после совершения последнего изменения и ее первоначальными координатами  $(a, b, c)$ . Если точка после первого изменения оказывается в месте  $(x, y, z)$ , после второго в месте  $(x', y', z')$  и т. д., после последнего изменения в месте  $(x^*, y^*, z^*)$ , то соотношения между  $a, b, c$  и  $x^*, y^*, z^*$  получатся в результате исключения промежуточных координат. Эти соотношения будут, очевидно, также линейными уравнениями.

Обратно, каждое линейное изменение можно разложить на несколько последовательно выполненных линейных изменений, причем порядок последних вообще, конечно, безразличен. Вполне естественно произвести это разложение таким образом, чтобы характер отдельных изменений был возможно более простым и физически наглядным. Тогда удалось бы свести общий случай (4) линейного изменения к некоторому числу более простых и легко исследуемых изменений и вместе с тем выяснить физическое значение постоянных изменения  $\lambda, \mu, \nu$ .

Первый шаг на этом пути состоит в том, что мы сводим изменение (4) к такому изменению, при котором материальная точка  $a=0, b=0, c=0$  сохраняет свое положение. Это легко сделать, если сообщить телу *поступательное перемещение* с компонентами  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$ , и таким образом упомянутая точка придет в свое конечное положение. Останется еще так называемое „одно-родное изменение“, общий вид которого:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ y &= \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ z &= \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c. \end{aligned} \right\} 23$$

Последним мы и займемся подробнее.

Рассмотрим все те материальные точки, которые лежат до изменения на поверхности шара, описанного из начала координат как центра произвольным радиусом  $R$ , т. е. точки, для которых

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2. \quad 24$$

После изменения эти точки лежат, согласно § 5, на некоторой поверхности второго порядка. Так как ни одна точка не смещается в бесконечность, то эта поверхность есть эллипсоид с центром в начале координат, в чем легко убедиться, если подставить в (24) величины  $a, b, c$ , выраженные через  $x, y, z$  при

помощи уравнений (23). Те материальные прямые, которые до изменения совпадали с осями координат, после изменения не будут, вообще говоря, перпендикулярными друг к другу. Однако можно утверждать, что они и после изменения образуют тройку взаимно сопряженных диаметров эллипса, т. е. что касательная к эллипсоиду плоскость, проведенная через конец одного из диаметров, параллельна плоскости, проходящей через два другие диаметра: во-первых, три координатные оси, как и всякие три взаимно перпендикулярные прямые, представляют собою три взаимно сопряженных диаметра шара, и, во-вторых, свойство образовать сопряженную тройку принадлежит к тем свойствам, которые не изменяются при линейном изменении, так как при этом сохраняются и касательная плоскость и параллелизм.

Среди всех трех взаимно сопряженных диаметров эллипсоида имеются три таких сопряженных диаметра, которые образуют прямые углы: это — оси эллипсоида. Отсюда следует, что те три материальные прямые, которые совпадают с осями эллипсоида после изменения, перпендикулярны друг к другу также и до изменения, так как тогда они являются сопряженными диаметрами шара. Другими словами: существуют три определенные материальные прямые, которые перпендикулярны друг к другу как до изменения, так и после изменения.

С помощью этого правила можно *всякое однородное линейное изменение* разложить на простое *вращение* около начала координат, которое совершается таким образом, что сообщает трем названным прямым новые направления, и, кроме того, на некоторое линейное изменение, которое имеет то свойство, что три взаимно перпендикулярные прямые сохраняют свое направление. Такое изменение мы назовем *расширением по трем взаимно перпендикулярным направлениям*.

§ 7. Рассмотрим подробнее свойства расширения по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Поместим координатные оси по этим трем направлениям — так называемым „осям расширения“ и определим, какое упрощение получают при сделанных допущениях общие уравнения (23) однородного линейного изменения. Если направление оси  $x$  остается неизменным, то при  $b=0$  и  $c=0$  должно быть также  $y=0$  и  $z=0$ , и, стало быть,  $\mu_1=0$  и  $\nu_1=0$ . Соответственные выражения получатся и для двух других осей. Отсюда мы получим общее выражение для расширения по трем координатным осям в виде уравнений:

$$x = \lambda_1 a, \quad y = \mu_2 b, \quad z = \nu_3 c. \quad 25$$

Функциональный определитель, согласно (7) и (10):

$$D = \lambda_1 \mu_2 \nu_3 > 0, \quad 26$$

причем все три коэффициента положительны, так как оси координат не изменяют своего направления на противоположное.

С другой стороны, оси координат представляют собою, по крайней мере в общем случае, единственные направления, которые не подвергаются изменению. Дело в том, что материальные точки, которые до изменения лежат на прямой с отношениями между косинусами направления (угловыми коэффициентами)

$$a : \beta : \gamma = a : b : c$$

образуют после изменения прямую с отношениями косинусов направления

$$x : y : z = \lambda_1 a : \mu_2 \beta : \nu_3 \gamma.$$

Объемное расширение равно, на основании (22), выражению:

$$D - 1 = \lambda_1 \mu_2 \nu_3 - 1. \quad 27$$

Можно получить также расширение прямой, если разделить изменение расстояния между двумя точками прямой на их первоначальное расстояние. Расширения по трем осям равны:

$$\frac{x-a}{a} = \lambda_1 - 1; \quad \frac{y-b}{b} = \mu_2 - 1; \quad \frac{z-c}{c} = \nu_3 - 1. \quad 28$$

Они называются обычно „главными расширениями“. Их выражения наглядно определяют физический смысл трех коэффициентов изменения.

В частном случае  $\lambda_1 = \mu_2 = \nu_3$  все три главные расширения, положительные или отрицательные, равны между собой, все прямые сохраняют свое направление, оси расширения становятся неопределенными, и тело испытывает всестороннее равномерное растяжение или сжатие, причем все части его остаются подобными самим себе.

**§ 8.** Мы видели, что каждое линейное изменение можно разложить на поступательное перемещение, вращение и расширение по трем взаимно перпендикулярным направлениям. В таком случае, нам предстоит задача вывести в действительности эти три отдельные операции для определенного изменения, заданного

уравнениями (4), или, другими словами, по заданным коэффициентам  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  вычислить соответственные отдельные изменения. С этой целью убедимся прежде всего, что для вычисления всех искомых величин имеется ровно столько же уравнений, сколько есть неизвестных. Действительно, уравнения (4) содержат 12 независимых постоянных  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , которые мы рассматриваем как заданные. Ровно столько же нужно величин, характеризующих отдельные изменения, а именно: три — для поступательного перемещения, три — для вращения и шесть — для расширения по трем перпендикулярным направлениям, так как требуются три величины для определения направления осей расширения и еще три величины для определения главных расширений.

Для компонентов поступательного перемещения получим, как мы уже видели в § 6, просто величины  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\nu_0$ , после отделения которых, останутся уравнения (23) для однородного изменения. Чтобы получить взаимоотношения между коэффициентами последнего и величинами, определяющими вращение и расширение, положим, что тело сперва испытывает расширение по трем взаимно перпендикулярным направлениям, а затем вращение около начала координат, и вычислим полное изменение положения, которое претерпевает при этом определенная материальная точка  $(a, b, c)$ . Обозначим направления трех осей расширения, которые в общем случае, конечно, не совпадают с осями координат, при помощи косинусов направления  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ , а постоянные дилатации обозначим  $l_0, m_0, n_0$ , так как буквы  $\lambda, \mu, \nu$  имеют другое значение в (23). Чтобы иметь возможность применить здесь уравнения (25) для расширения, отнесем прежде всего материальную точку  $(a, b, c)$  к осям расширения как к координатным осям. Координаты точки получат тогда значения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c &= \xi, \\ \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c &= \eta, \\ \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c &= \zeta. \end{aligned} \right\} \quad 29$$

Затем совершим расширение. Из уравнений (25) получим координаты рассматриваемой материальной точки относительно осей расширения после изменения:

$$\xi' = l_0 \xi, \quad \eta' = m_0 \eta, \quad \zeta' = n_0 \zeta. \quad 30$$

Далее пусть последует вращение. Положим, что оси расширения перешли из направлений, обозначенных величинами  $\alpha, \beta, \gamma$ , в некоторые другие направления, которым соответствуют косинусы



$\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \alpha_2', \beta_2', \gamma_2', \alpha_3', \beta_3', \gamma_3'$ . Тогда координаты нашей материальной точки относительно трех направлений  $(\alpha', \beta', \gamma')$  будут после вращения равны  $\xi', \eta', \zeta'$ , так как положение точки относительно осей расширения не изменяется при вращении. Относительно же первоначальной, неподвижной в пространстве системы координат точка имеет координаты  $x, y, z$ , так как вместе с вращением завершается все изменение тела.

Поэтому мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1' \xi' + \alpha_2' \eta' + \alpha_3' \zeta', \\ y &= \beta_1' \xi' + \beta_2' \eta' + \beta_3' \zeta', \\ z &= \gamma_1' \xi' + \gamma_2' \eta' + \gamma_3' \zeta'. \end{aligned} \right\} 31$$

Этими равенствами замыкается круг рассуждений, и координаты  $x, y, z$  выражаются через координаты  $a, b, c$ . Для этого нужно только выразить  $\xi', \eta', \zeta'$  через  $\xi, \eta, \zeta$  при помощи (30), а последние величины выразить через  $a, b, c$  при помощи (29). Если проделать это и полностью отождествить полученные три уравнения с общими уравнениями (23) линейного однородного изменения, то получим следующие девять соотношений:

$$\left. \begin{aligned} l_0 \alpha_1 \alpha_1' + m_0 \alpha_2 \alpha_2' + n_0 \alpha_3 \alpha_3' &= \lambda_1, \\ l_0 \beta_1 \alpha_1' + m_0 \beta_2 \alpha_2' + n_0 \beta_3 \alpha_3' &= \lambda_2, \\ l_0 \gamma_1 \alpha_1' + m_0 \gamma_2 \alpha_2' + n_0 \gamma_3 \alpha_3' &= \lambda_3, \\ l_0 \alpha_1 \beta_1' + m_0 \alpha_2 \beta_2' + n_0 \alpha_3 \beta_3' &= \mu_1, \\ l_0 \beta_1 \beta_1' + m_0 \beta_2 \beta_2' + n_0 \beta_3 \beta_3' &= \mu_2, \\ l_0 \gamma_1 \beta_1' + m_0 \gamma_2 \beta_2' + n_0 \gamma_3 \beta_3' &= \mu_3, \\ l_0 \alpha_1 \gamma_1' + m_0 \alpha_2 \gamma_2' + n_0 \alpha_3 \gamma_3' &= \nu_1, \\ l_0 \beta_1 \gamma_1' + m_0 \beta_2 \gamma_2' + n_0 \beta_3 \gamma_3' &= \nu_2, \\ l_0 \gamma_1 \gamma_1' + m_0 \gamma_2 \gamma_2' + n_0 \gamma_3 \gamma_3' &= \nu_3. \end{aligned} \right\} 32$$

построение которых легко подметить. Из них получается при заданных  $\lambda, \mu, \nu$  девять содержащихся в них неизвестных.

§ 9. При производстве вычислений ограничимся частным случаем *бесконечно малого линейного изменения*. Этот случай почти полностью осуществлен во многих явлениях, например, в твердых телах. Но он имеет известное значение и для конечных изменений, так как конечное изменение всегда происходит в периоде в течение конечного времени и поэтому состоит из ряда бесконечно малых изменений, которые совершаются последовательно в течение бесконечно малых промежутков времени.

Удобнее всего ввести упрощения, которые возможны при бесконечно малом изменении, если вместо конечных координат  $x, y, z$

материальной точки воспользоваться бесконечно малыми компонентами ее смещения (3). Тогда уравнения изменения (4) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} u &= \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ v &= \mu_0 + \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ w &= \nu_0 + \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c, \end{aligned} \right\} 33$$

где для упрощения полагаем:

$$\lambda_1 - 1 = \lambda, \quad \mu_2 - 1 = \mu, \quad \nu_3 - 1 = \nu. \quad 34$$

Все 12 коэффициентов  $\lambda, \mu, \nu$  в уравнениях (33) бесконечно малы.

С другой стороны, главные расширения (28), разумеется, также бесконечно малы. Поэтому полагаем их значения:

$$l_0 - 1 = l, \quad m_0 - 1 = m, \quad n_0 - 1 = n. \quad 35$$

Кроме того, косинусы направлений осей расширения  $\alpha, \beta, \gamma$ , которые, вообще говоря, конечны, претерпевают при вращении лишь бесконечно малые изменения. Поэтому мы можем положить:

$$\alpha_1' = \alpha_1 + d\alpha_1, \quad \beta_1' = \beta_1 + d\beta_1, \quad \text{и т. д.}$$

Если ввести все эти подстановки в уравнения (32) и кроме того принять во внимание общие соотношения [1 (333), (334)] между косинусами направлений и соотношения [1 (336), (336)] между их дифференциалами, то девять уравнений (32) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2 &= \lambda, \\ l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 - \xi &= \lambda_2, \\ l\alpha_1\gamma_1 + m\alpha_2\gamma_2 + n\alpha_3\gamma_3 + \eta &= \lambda_3, \\ l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 + \zeta &= \mu_1, \\ l\beta_1^2 + m\beta_2^2 + n\beta_3^2 &= \mu, \\ l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 - \xi &= \mu_3, \\ l\alpha_1\gamma_1 + m\alpha_2\gamma_2 + n\alpha_3\gamma_3 - \eta &= \nu_1, \\ l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 + \zeta &= \nu_2, \\ l\gamma_1^2 + m\gamma_2^2 + n\gamma_3^2 &= \nu, \end{aligned} \right\} 36$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  представляют, согласно (1, § 101) компоненты того бесконечно малого вращения, которое перемещает оси расширения из направлений  $(\alpha, \beta, \gamma)$  в направления  $(\alpha', \beta', \gamma')$ . Значения их получаются непосредственно в виде:

$$\xi = \frac{\nu_2 - \mu_3}{2}, \quad \eta = \frac{\lambda_3 - \nu_1}{2}, \quad \zeta = \frac{\mu_1 - \lambda_2}{2}. \quad 37$$



Величина и направление расширения выражаются шестью уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2 &= \lambda, \\ l\beta_1^2 + m\beta_2^2 + n\beta_3^2 &= \mu, \\ l\gamma_1^2 + m\gamma_2^2 + n\gamma_3^2 &= \nu, \\ l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3 &= \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}, \\ l\gamma_1\alpha_1 + m\gamma_2\alpha_2 + n\gamma_3\alpha_3 &= \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2}, \\ l\alpha_1\beta_1 + m\alpha_2\beta_2 + n\alpha_3\beta_3 &= \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2}. \end{aligned} \right\} 38$$

Воспользовавшись этими уравнениями и рассмотрев определитель  $D$  (7), можно определить, состоит ли изменение, кроме поступательного перемещения, только из расширения по трем перпендикулярным направлениям или же сопровождается также вращением. Если определитель симметричен, т. е. не изменяется при взаимной замене строк и столбцов, то  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  все равны нулю, и вращения нет. Следует иметь в виду, что только оси расширения не поворачиваются. Другие же прямые, как мы видели в § 7, изменяют свое направление также в случае чистого расширения тела.

Противоположный случай, когда изменение состоит только из поступательного перемещения и вращения, характеризуется тем, что главные расширения  $l$ ,  $m$ ,  $n$  обращаются в нуль. Тогда, по (38) и (37),

$$\lambda = \mu = \nu = 0, \quad \nu_2 = -\mu_3 = \xi, \quad \lambda_3 = -\nu_1 = \eta, \quad \mu = -\lambda_2 = \zeta,$$

и уравнения (33) для компонентов смещения переходят в уравнения:

$$\left. \begin{aligned} u &= \lambda_0 - \zeta b + \eta c, \\ v &= \mu_0 + \zeta a - \xi c, \\ w &= \nu_0 - \eta a + \xi b, \end{aligned} \right\} 39$$

аналогичные общим выражениям [1 (348)] для смещений точек абсолютно твердого тела.

Остается еще задача вычислить из уравнений (38) главные расширения  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и косинусы направлений  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Для этого воспользуемся снова общими соотношениями между косинусами направлений, на сей раз в форме [1 (331), (332)].

С помощью их получатся из уравнений (38) следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda\alpha_1 + \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2}\beta_1 + \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2}\gamma_1 &= l\alpha_1, \\ \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2}\alpha_1 + \mu\beta_1 + \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}\gamma_1 &= l\beta_1, \\ \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2}\alpha_1 + \frac{\nu_2 + \mu_3}{2}\beta_1 + \nu\gamma_1 &= l\gamma_1. \end{aligned} \right\} 40$$

Эти три уравнения—линейны и однородны относительно  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ . Так как эти величины не могут все равняться нулю, то определитель уравнения должен равняться нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \lambda - l & \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2} \\ \frac{\mu_1 + \lambda_2}{2} & \mu - l & \frac{\nu_2 + \mu_3}{2} \\ \frac{\lambda_3 + \nu_1}{2} & \frac{\nu_2 + \mu_3}{2} & \nu - l \end{vmatrix} = 0. \quad 41$$

Получилось кубическое уравнение для вычисления  $l$ . В коэффициентах этого уравнения цифра 1 ничем не выделяется по сравнению с другими. Отсюда следует, что этому же уравнению удовлетворяют также другие главные расширения  $m$  и  $n$ , или, другими словами, что три корня этого уравнения представляют собою величины  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , и потому всегда вещественны. Который из корней обозначить через  $l$ ,  $m$  или  $n$ , — это остается, конечно, неопределенным. Можно, например, положить  $l \geq m \geq n$ , не ограничивая общности решения. Зная  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , можно при помощи (40) вычислить соответственные  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Знак последних, одинаковый для всех, остается неопределенным.

Объемное расширение (22) для бесконечно малого изменения можно вычислить, найдя функциональный определитель (7) и принимая во внимание (34). Если пренебречь бесконечно малыми величинами высшего порядка, то получим величину объемного расширения:

$$D - 1 = \lambda + \mu + \nu. \quad 42$$

Таким образом в выражение объемной дилатации входят только диагональные члены определителя. Тот же результат можно, конечно, получить, если иметь в виду, что для объемного

расширения вращение не принимается во внимание, и на основании (27) и (35)

$$D - 1 = l_0 m_0 n_0 - 1 = l + m + n. \quad 43$$

Эта величина представляет собою сумму корней кубического относительно  $l$  уравнения (41), т. е. равна коэффициенту при  $l^2$  в этом уравнении:

$$l + m + n = \lambda + \mu + \nu, \quad 44$$

что можно получить и непосредственно, если сложить первые три уравнения (38).

§ 10. Разложение линейного изменения на поступательное перемещение, вращение и расширение по трем перпендикулярным направлениям не единственно возможное, но оно имеет преимущество благодаря своему простому физическому значению. Вместо него можно произвести также другие сравнительно простые разложения. Так, например, бесконечно малое однородное изменение

$$\left. \begin{aligned} u &= \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c, \\ v &= \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c, \\ w &= \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c, \end{aligned} \right\} \quad 45$$

можно рассматривать как произведенное расширением по трем координатным осям, с главными расширениями  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , и кроме того еще шестью изменениями, которые могут быть представлены уравнениями:

$$u = \lambda_2 b, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad u = \lambda_3 c, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \text{и т. д.}$$

Порядок совершения этих изменений безразличен, так как перемена этого порядка вызывает только различия в величинах меньшего порядка (ср. [1 (101)]). Каждое из этих шести изменений имеет простое значение: так, например, в первом из них смещения не зависят от  $a$  и  $c$  и все происходит в направлении оси  $x$ , т. е. каждая плоскость, параллельная плоскости  $xz$ , совершает простое поступательное перемещение, она смещается как целое, без поворота и без деформации в направлении оси  $x$ , причем только величина смещения меняется при переходе от одной плоскости к другой. Такое изменение напоминает скользящее движение двух половинок ножниц. Оно называется „срезом“ или „сдвигом“. Отсюда следует правило, что каждое бесконечно малое однородное изменение может быть разложено на расширение по трем координатным

осям и шесть сдвигов плоскостей, параллельных координатным плоскостям, по направлению осей.

Несмотря на простую форму, это правило имеет вообще довольно сложное физическое значение. Возьмем, например, бесконечно малое вращение  $u = -\zeta b$ ,  $v = \zeta a$ ,  $w = 0$  как частный случай общего смещения (39). Согласно последнему правилу, это смещение пришлось бы рассматривать как произведенное двумя последовательными сдвигами, т. е. изменениями, которые связаны с деформациями тела. Введение последних совершенно излишне, так как они, понятно, взаимно уничтожаются.

§ 11. Рассмотренный в последних параграфах случай линейного изменения представляет интерес не только как простой частный случай: он имеет также важное значение для самого общего случая произвольного конечного изменения. К рассмотрению последнего мы теперь и перейдем, возвратившись к уравнениям (2). Это значение линейного изменения основано на том, что всякую произвольную функцию можно рассматривать как линейную функцию внутри бесконечно малой области ее переменных.

Обратим внимание на некоторую материальную точку  $P_0$  с координатами  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ . Под влиянием изменения точка займет положение  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , причем, по (2),

$$x_0 = f(a_0, b_0, c_0), \quad y_0 = \varphi(a_0, b_0, c_0), \quad z_0 = \psi(a_0, b_0, c_0). \quad 46$$

Другая точка  $P$ , лежащая в непосредственной близости от точки  $P_0$  и имеющая координаты

$$a = a_0 + a', \quad b = b_0 + b', \quad c = c_0 + c', \quad 47$$

займет после изменения положение:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z' \quad 48$$

Полагая, что  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  бесконечно малы, разложим (2) в ряд Тейлора. Принимая во внимание (46), получим:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0 c', \\ y' &= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0 c', \\ z' &= \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0 a' + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0 b' + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0 c'. \end{aligned} \right\} \quad 49$$



Давая величинам  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  всевозможные бесконечно малые значения, получим из этих уравнений изменение той бесконечно малой части тела, которая окружает точку  $P_0$ . Таким образом это изменение можно рассматривать как состоящее из конечного поступательного перемещения с компонентами:

$$x_0 - a_0 = u_0, \quad y_0 - b_0 = v_0, \quad z_0 - c_0 = w_0,$$

которое переводит точку  $P$  из положения  $(a, b, c)$  в положение

$$a + u_0 = x_0 + a', \quad b + v_0 = y_0 + b', \quad c + w_0 = z_0 + c',$$

и из конечного линейного однородного изменения (49) с точкой  $P_0$  в качестве неподвижного начала, причем последнее изменение переводит точку  $P$  с координатами  $(a', b', c')$  в положение  $(x', y', z')$ . Обозначим для сокращения девять коэффициентов изменения (49):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0 &= \lambda_1, & \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0 &= \lambda_2, & \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0 &= \lambda_3, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0 &= \mu_1, & \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0 &= \mu_2, & \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0 &= \mu_3, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0 &= \nu_1, & \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0 &= \nu_2, & \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0 &= \nu_3. \end{aligned} \right\} \quad 50$$

Тогда мы формально получим уравнения (23) и можем высказать все те следствия, которые вывели раньше из них.

Таким образом при любом изменении тела каждая бесконечно малая часть его или каждый „элемент тела“ изменяется линейно, и отличие от прежде рассмотренного линейного изменения тела состоит лишь в том, что коэффициенты изменения  $(\lambda, \mu, \nu)$  принимают разные значения от элемента к элементу. Из вытекающих отсюда правил упомянем важнейшие.

Бесконечно малые параллелепипеды сохраняются даже при самом общем изменении, но углы их могут получить любые другие значения. Точно так же сохраняется порядок всякой бесконечно малой поверхности. Так, например, бесконечно малый шар превращается в эллипсоид, в центр которого переходит центр шара. Отсюда вытекает одно своеобразное на первый взгляд следствие: поверхность тела всегда состоит после изменения из тех же самых материальных точек, что и до изменения. Действительно, каждую точку, которая до изменения не лежит на поверхности, можно рассматривать как центр шара, который весь лежит внутри тела, поэтому его центр и остается внутри. То же самое относится,

конечно, и к обратному изменению, и таким образом следствие является доказанным.

Объемное расширение определяется, как и в (22), при помощи функционального определителя (7):

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}. \quad 51$$

(Значок 0 мы будем отныне опускать для упрощения письма.) При этом величина  $D$  представляет отношение объема содержащего материальную точку элемента тела после изменения к объему того же элемента тела до изменения.

Если разрешить уравнения (49) относительно  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , то мы получим для последних линейные выражения с коэффициентами  $(\lambda', \mu', \nu')$ , значения которых, на основании (6), равны:

$$\lambda_1' = \frac{[\lambda_1]}{D} = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]}{D} = \frac{\frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b}}{D}, \text{ и т. д.} \quad 52$$

Однако, с другой стороны, можно сперва разрешить уравнения (2) относительно  $a, b, c$ , а затем уже произвести подстановки (47) и (48) и разложение в ряд *Тэйлора*. Таким путем получим, аналогично (49):

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\partial a}{\partial x} x' + \frac{\partial a}{\partial y} y' + \frac{\partial a}{\partial z} z', \\ b' &= \frac{\partial b}{\partial x} x' + \frac{\partial b}{\partial y} y' + \frac{\partial b}{\partial z} z', \\ c' &= \frac{\partial c}{\partial x} x' + \frac{\partial c}{\partial y} y' + \frac{\partial c}{\partial z} z', \end{aligned}$$

где коэффициенты должны совпадать с  $(\lambda', \mu', \nu')$ . Отсюда получаются следующие формулы преобразования:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]}{D}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial a}\right]}{D}, \dots \quad 53$$



Тогда объемное расширение, по (42) и (57), равно:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = x_x + y_y + z_z. \quad (61)$$

Далее, главные расширения равны, по (57), корням уравнения (41) третьей степени относительно  $l$ :

$$\begin{vmatrix} x_x - l & \frac{1}{2} x_y & \frac{1}{2} x_z \\ \frac{1}{2} y_x & y_y - l & \frac{1}{2} y_z \\ \frac{1}{2} z_x & \frac{1}{2} z_y & z_z - l \end{vmatrix} = 0. \quad (62)$$

Направления соответствующих осей расширения можно получить на основании (40) и (57) при помощи двух из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (x_x - l)\alpha + \frac{x_y}{2}\beta + \frac{x_z}{2}\gamma &= 0, \\ \frac{y_x}{2}\alpha + (y_y - l)\beta + \frac{y_z}{2}\gamma &= 0, \\ \frac{z_x}{2}\alpha + \frac{z_y}{2}\beta + (z_z - l)\gamma &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

причем общий знак косинусов направлений  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  остается неопределенным.

Обратно, если даны главные расширения  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и направления соответствующих осей расширения  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , то компоненты расширения получаются однозначно из (38):

$$\left. \begin{aligned} x &= l\alpha_1^2 + m\alpha_2^2 + n\alpha_3^2, \dots \\ \frac{1}{2} z_y &= \frac{1}{2} y_z = l\beta_1\gamma_1 + m\beta_2\gamma_2 + n\beta_3\gamma_3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

**§ 13.** Все эти соотношения встречаются не только в теории деформируемых тел. В измененном значении они играют существенную роль и для других отделов физики. В векторном исчислении они имеют особые названия и обозначаются сокращенными символами. Так, например, вектор, который получается из вектора смещения  $q$  с компонентами  $u$ ,  $v$ ,  $w$  таким образом, что скобки в уравнениях (59) представляют собою составляющие нового вектора, носит название „ротора“ (rot или curl), или „вихря“ вектора

$q$ , и потому для обозначения вектора вращения  $o$  с компонентами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  пишут вместо трех уравнений (59) одно уравнение

$$o = \frac{1}{2} \text{rot } q. \quad (65)$$

Формальное неясство формулы, состоящее в том, что вращение равно не целому ротору, а половине его, приходится принять уже заодно с принятым обозначением, но оно вообще менее заметно, так как операция rot применяется главным образом не в механике, а в электродинамике, где о вращениях нет речи.

Далее, ту скалярную величину, которая получается из вектора  $q$  при помощи операции (61), называют „дивергенцией“ (div), или „расхождением“, а объемное расширение обозначают

$$\text{div } q.$$

В этой формуле, как и в предыдущей, исключена всякая зависимость от какой-либо системы координат.

Наконец, что касается расширения по трем взаимно перпендикулярным направлениям, то его нельзя охарактеризовать как вектор при помощи одной направленной величины. Она представляет собой частный случай величины более высокого порядка, называемой „тензором“, в данном случае тензором второго ранга, причем вектор рассматривается как тензор первого ранга. Тензор обозначается при помощи шести независящих друг от друга величин: либо при помощи трех „главных значений“  $l$ ,  $m$ ,  $n$  в связи с тремя соответственными взаимно перпендикулярными „главными осями“  $(\alpha_1, \dots, \alpha_3)$ , причем оба противоположных направления какой-либо оси совершенно равнозначны, либо же при помощи шести „компонентов“  $x_x, y_y, z_z, \frac{1}{2} y_z, \frac{1}{2} z_y, \frac{1}{2} x_y$ . Ввиду соотношений (60a), тензор называется симметричным. Между главными значениями, направлениями главных осей и компонентами существуют соотношения (62), (63) и (64). Если в частном случае три главных значения  $l$ ,  $m$ ,  $n$  равны между собою (равномерное расширение), то

$$\left. \begin{aligned} x_x = y_y = z_z = l = m = n, \\ x_y = y_x = z_x = 0, \end{aligned} \right\}$$

и направления главных осей совершенно неопределенны.

Дальнейшие свойства симметричного тензора будут рассмотрены позднее (§ 20).

## ГЛАВА ВТОРАЯ

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 14. Теперь, после чисто кинематических соображений, обратимся к динамике, т. е. к исследованию сил, которые вызывают деформацию тела. Сперва поставим вопрос об условиях равновесия.

Возьмем какое-нибудь тело, которое находится в деформированном состоянии под воздействием некоторых сил, например, согнутый стержень, скрученную проволоку, сжатый газ. Силы, действующие на тело, мы разделим на два класса:

1. Силы, которые действуют на все, в том числе и внутренние части тела — „массовые силы“. Мы полагаем, что эти силы, подобно, например, тяжести, пропорциональны элементам массы тела.

Если  $dt = dx \cdot dy \cdot dz$  обозначает объем,  $k$  — плотность элемента массы, то составляющие массовой силы, действующей на элемент, равны (ср. 1, § 31)

$$Xkd\tau, Ykd\tau, Zkd\tau. \quad 67$$

Величины  $X, Y, Z$  считаются конечными.

2. Силы, которые действуют на поверхность тела, — „поверхностные силы“. Назовем частное, равное результирующей силе, действующей на участок поверхности тела  $\sigma$ , разделенной на площадь поверхности  $\sigma$ , „средним давлением“ на  $\sigma$ . Если участок поверхности сожмется в элемент поверхности  $d\sigma$ , то это частное мы назовем просто „давлением“ на  $d\sigma$  и будем рассматривать его как конечную величину. Так как для  $d\sigma$  существенно не только место, но и направление, то для обозначения составляющих поверхностной силы, действующей на  $d\sigma$ , мы прибавим к буквам  $X, Y, Z$  значок  $\nu$ , указывающий на нормаль к  $d\sigma$ , направленную внутрь тела. Тогда составляющие поверхностной силы, действующей на элемент поверхности, равны:

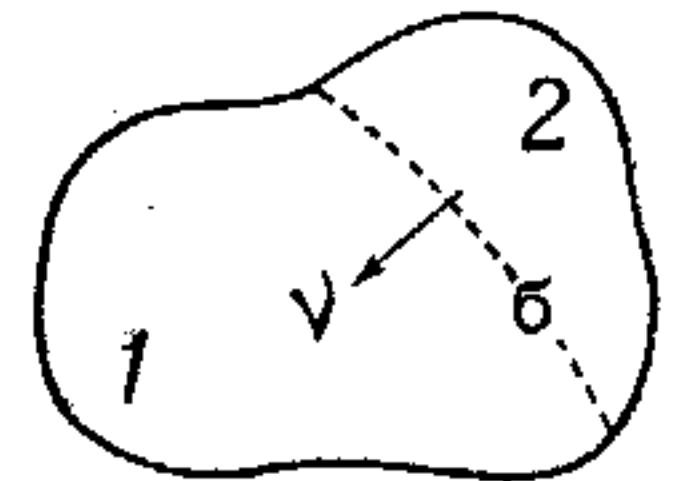
$$X_\nu d\sigma, Y_\nu d\sigma, Z_\nu d\sigma. \quad 68$$

Направление этой поверхностной силы может составлять любой угол с нормалью  $\nu$ . Если оба направления совпадают, то поверхностная сила производит сжатие тела, подобно действию давления на газ. Если направления противоположны, то поверхностная сила производит растяжение, подобно силе, действующей на натянутую проволоку. Если направления перпендикулярны, то поверхностная сила производит сдвиг, как при кручении или при трении.

Давление, — равнодействующая трех составляющих давления  $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$ , — имеет, конечно, размерность частного от деления силы на поверхность, т. е.  $[m l^{-1} t^{-2}]$  (1, § 9).

§ 15. Все законы равновесия деформированного тела содержатся в одной теореме общей механики (1, § 112): если система точек находится в равновесии, то внешние силы уравниваются, как если бы система отвердела.

Плодотворность этой теоремы выражается в том, что можно любую часть тела рассматривать как систему точек. Представим себе, например, что тело разделено на две части—1 и 2 (черт. 1) — некоторой воображаемой поверхностью  $\sigma$ . Остановим наше внимание на 1 части. Мы можем полагать, что эта часть тела — твердая и находится в равновесии под воздействием внешних сил, приложенных к ней. Но ко внешним силам относятся, на основании 1 § 112, не только массовые силы и силы, действующие на действительную поверхность тела, но также и те силы, которыми часть тела 2 действует на воображаемую поверхность  $\sigma$ . Эти силы определяются следующим образом: если бы совершенно была удалена часть тела 2, то их необходимо было приложить для того, чтобы не было нарушено равновесие.



Черт. 1.

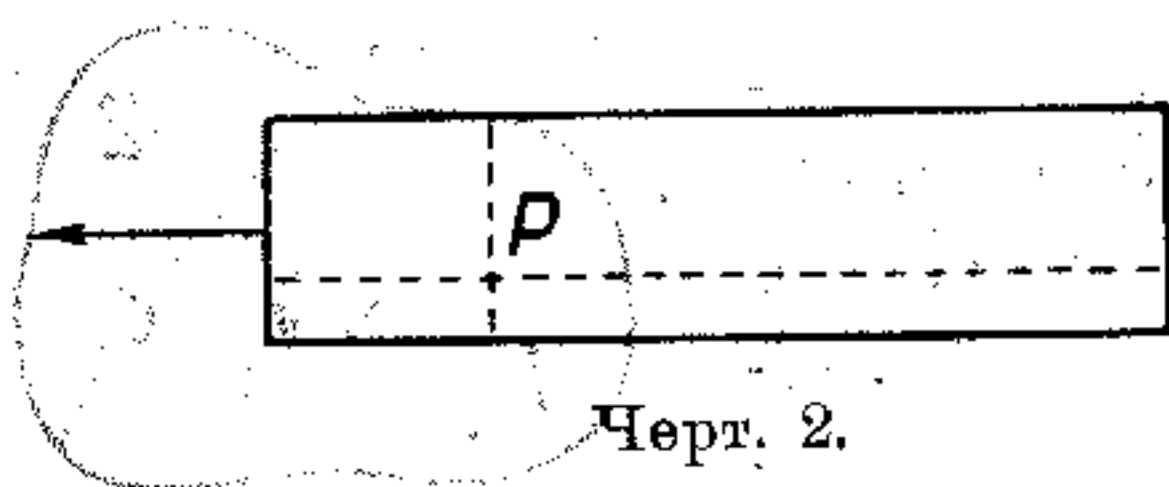
На каждый элемент  $d\sigma$  поверхности части тела 1 действует поверхностная сила с компонентами (68), согласно принятому нами обозначению. Таким образом можно положить, что и внутри какого-нибудь тела в каждой точке действуют некоторые силы давления. Однако величина их зависит не только от места, но и направления элемента поверхности  $d\sigma$  или, иначе, его нормали  $\nu$ . Если обратить направление  $\nu$ , т. е. рассматривать часть тела 2 как систему точек, то вместо (68) появится поверхностная сила, с которой часть 1 действует на часть 2 на элементе поверхности  $d\sigma$ . На основании принципа равенства действия и



противодействия, эта сила противоположна предыдущей. Поэтому имеем вообще:

$$X_{-} = -X_{+}, Y_{-} = -Y_{+}, Z_{-} = -Z_{+}. \quad 69$$

Чтобы убедиться, насколько различные значения принимает давление в одном и том же месте в зависимости от направления  $d\sigma$ , рассмотрим в качестве примера цилиндрический стержень, растягиваемый в длину двумя равными противоположными силами (черт. 2). Проведем мысленно горизонтальную плоскость через внутреннюю точку  $P$  и будем рассматривать лежащую над плоскостью часть стержня как систему точек. В таком случае на элемент поверхности в точке  $P$  действует давление нуль, так как равновесие совершенно не было бы нарушено, если бы была удалена вся нижняя часть стержня. Если же через ту же точку  $P$  провести вертикальную плоскость и рассматривать в качестве системы точек часть стержня, лежащую слева от плоскости, то на элемент плоскости в  $P$  действует более или менее значительное давление, так как равновесие системы точек было бы нарушено, если бы мы удалили всю правую часть стержня, не приложив при этом особой силы.



Черт. 2.

Общий закон, согласно которому величина и направление давления в определенной точке  $P$  зависят от направления нормали к элементу поверхности, проходящему через  $P$ , будет выведен в § 17 из динамических соотношений.

§ 16. Мы привели законы равновесия деформированного тела к законам общей механики, а теперь сделаем то же для более общего случая движения деформированного тела. Это можно проще всего сделать, применив принцип *д'Аламбера*, согласно которому при всяком движении системы материальных точек внешние силы и сопротивления инерции находятся в равновесии в каждый момент, — так, как если бы система была твердой (1, § 130).

Так как сопротивление инерции элемента массы, равное

$$-\frac{d^2x}{dt^2} k d\tau, \quad -\frac{d^2y}{dt^2} k d\tau, \quad -\frac{d^2z}{dt^2} k d\tau, \quad 70$$

пропорционально массе элемента, то оно принадлежит к числу массовых сил, и все различие между динамикой и статикой деформированного тела состоит только в том, что к компонентам

$X, Y, Z$  сил, отнесенных к единице массы; (67), прибавляются компоненты ускорения с обратным знаком.

Применим теперь шесть уравнений [1(306a)], выражающих условия равновесия твердого тела, к рассматриваемому случаю и воспользуемся введенными выше обозначениями. Тогда для движения деформированного тела получатся следующие шесть уравнений:

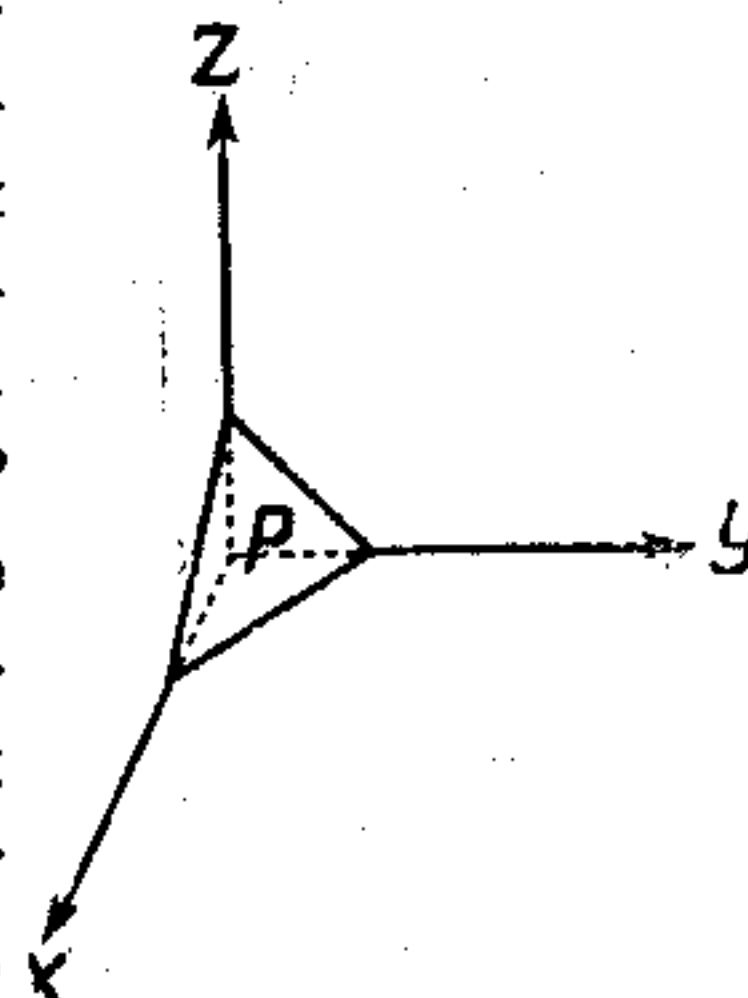
$$\int \left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) k d\tau + \int X_{\nu} d\sigma = 0, \text{ и т. д.} \quad 71$$

$$\int \left\{ y \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) - z \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right\} k d\tau + \int (y Z_{\nu} - z Y_{\nu}) d\sigma = 0, \text{ и т. д.,} \quad 72$$

где  $d\tau$  обозначает элемент объема,  $d\sigma$  — элемент поверхности любой выделенной части тела, а интегрирование распространяется на эту часть тела. Разумеется, эти уравнения действительны и для всего тела.

Уравнения (71) и (72) представляют совершенно исчерпывающим образом взаимоотношения между силами и ускорениями. В следующих параграфах мы лишь подробнее исследуем их содержание.

§ 17. Сперва применим уравнения (71) к бесконечно малому элементу тела, расположенному где-либо внутри последнего. Форму элемента выберем следующим образом. Через произвольную точку  $P$  проведем три прямые, параллельные положительным направлениям координатных осей (черт. 3), и пересечем их плоскостью, бесконечно близкой к  $P$ . На чертеже плоскость изображена впереди точки  $P$ . Образуется тетраэдр, в вершине которого  $P$  пересекаются три взаимно перпендикулярные ребра. Обозначим площадь грани, противоположной вершине  $P$ , через  $d\sigma$ , нормаль к этой грани, направленную внутрь тетраэдра, через  $\nu$ , и площади трех остальных граней  $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$ , соответственно нормальям. Последние грани представляют собою проекции  $d\sigma$  на три координатные плоскости. Поэтому имеют место следующие соотношения:



Черт. 3

$$d\sigma_x = -d\sigma \cos(\nu x), \quad d\sigma_y = -d\sigma \cos(\nu y), \quad d\sigma_z = -d\sigma \cos(\nu z), \quad 73$$



так как площади всех граней положительны, а нормаль  $\nu$  образует тупые углы с положительными направлениями всех координатных осей.

В уравнении (71) объемный интеграл сводится для данного случая к одному члену, который содержит объем тетраэдра  $d\tau$  в качестве множителя, а поверхностный интеграл равен сумме четырех членов, каждый из которых соответствует одной из граней тетраэдра и пропорционален площади ее. Так как  $d\tau$  — бесконечно малая величина третьего порядка, а все площади  $d\sigma$  — второго порядка, то объемный интеграл исчезает по сравнению с каждым из членов поверхностного интеграла и уравнение (71) переходит в:

$$X_x d\sigma_x + X_y d\sigma_y + X_z d\sigma_z + X_\nu d\sigma = 0.$$

При этом нужно иметь в виду, что внутренние нормали к граням тетраэдра суть прямые  $x, y, z, \nu$ . Отсюда, в связи с (73), получим:

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z), \\ Y_\nu &= Y_x \cos(\nu x) + Y_y \cos(\nu y) + Y_z \cos(\nu z), \\ Z_\nu &= Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z). \end{aligned} \right\} 74$$

Эти уравнения дают для каждой точки  $P$  тела зависимость величины и направления действующего в ней давления ( $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$ ) от направления нормали к элементу поверхности, на который действует давление (ср. конец § 15). То обстоятельство, что  $d\sigma$  проходит не через самую точку  $P$ , а лежит от нее на бесконечно близком расстоянии, не оказывает влияния на конечные величины составляющих давления.

Таким образом давление определено для любого направления  $\nu$ , если известны девять компонентов давления  $X_x, \dots, Z_z$ . Если  $\nu$  совпадает с направлением одной из координатных осей, то уравнения выполняются тождественно. Они удовлетворяют также всегда требованиям (69), так как косинусы изменяют знак, если направление  $\nu$  изменяется на обратное.

Из девяти компонентов давления, соответствующих координатным плоскостям  $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$ , „диагональные“ компоненты  $X_x, Y_y, Z_z$  представляют также давления, которые нормальны к их поверхности. При этом положительный знак обозначает давление сжатия, как у газа, независимо от выбранного направления координат, а отрицательный знак — натяжение, как у

растянутой проволоки (ср. § 19): при обращении направления координатных осей изменяется как знак компонента поверхностной силы, так и знак внутренней нормали. Конечно, все три нормальные давления не должны обязательно быть одного знака.

Остальные шесть компонентов давления суть тангенциальные или сдвигающие давления, которые называются также сдвигающими напряжениями, подобно тем, которые имеют место при кручении и при трении.

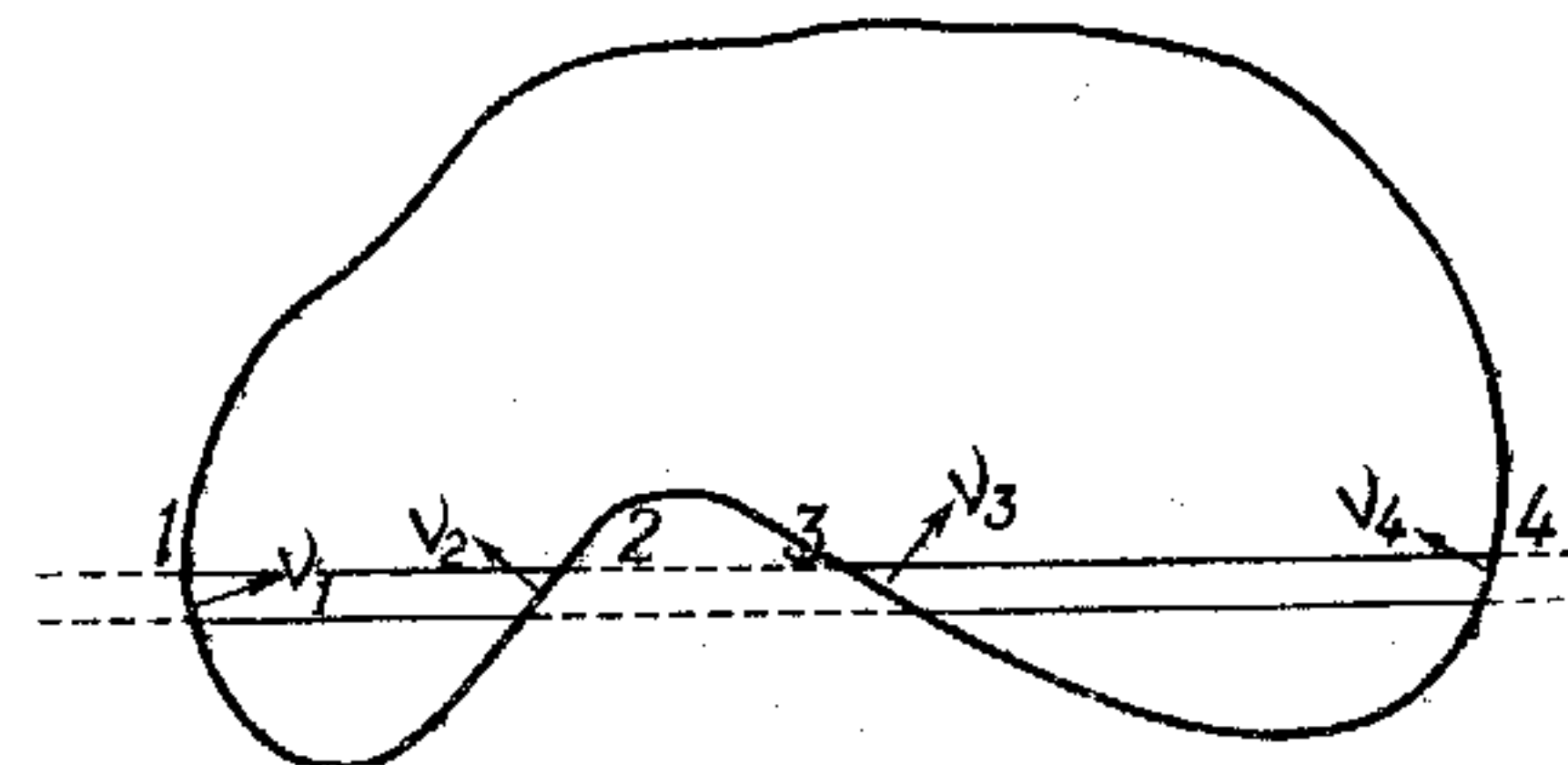
В заключение следует напомнить, что все вышеприведенные соображения относятся к бесконечно малому элементу тела, и что величины компонентов давления изменяются при переходе от одного элемента к другому. Поэтому девять компонентов давления  $X_x, \dots, Z_z$  нужно рассматривать вообще как функции места.

§ 18. Чтобы использовать динамические уравнения (71) и (72) для дальнейших заключений, выведем сперва одну математическую теорему, которая еще не раз окажется нам полезной в дальнейшем. Она касается обращения некоторого объемного интеграла в поверхностный интеграл. Пусть  $\varphi$  обозначает однозначную непрерывную функцию пространственных координат  $x, y, z$ , и требуется вычислить интеграл.

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau, \quad 75$$

взятый по некоторому объему. На черт. 4 этот объем изображен, ради большей общности, так, что поверхность его, глядя снаружи, вогнута в некоторых местах. Поверхность могла бы также состоять из нескольких совсем разделенных частей, что не повлияло бы на правильность выводимых положений.

Положим  $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$  и будем интегрировать сперва по  $x$ , по-



Черт. 4.

лагая  $y$  и  $z$ , а также  $dy$  и  $dz$  постоянными, т. е. будем производить суммирование по элементам объема бесконечно тонкого цилиндра, параллельного оси  $x$ , с поперечным сечением  $dy \cdot dz$ .

Если цилиндр пересекает наружную поверхность области интегрирования в нескольких точках 1, 2, 3, 4, то он разделяется на несколько отдельных цилиндров, и интеграл по всему цилиндру равен сумме интегралов по отдельным цилиндрам, т. е. в нашем случае

$$dy dz (\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3). \quad (76)$$

Обозначим площади элементов поверхности, которые вырезаются цилиндром из наружной поверхности области интегрирования, через  $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4$ , их внутренние нормали — через  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ . Тогда

$$dy dz = d\sigma_1 \cos(\nu_1 x) = -d\sigma_2 \cos(\nu_2 x) = d\sigma_3 \cos(\nu_3 x) = -d\sigma_4 \cos(\nu_4 x), \quad (77)$$

и интеграл по цилиндру будет равняться  $-\varphi_1 \cos(\nu_1 x) d\sigma_1 - \varphi_2 \cos(\nu_2 x) d\sigma_2 - \varphi_3 \cos(\nu_3 x) d\sigma_3 - \varphi_4 \cos(\nu_4 x) d\sigma_4$ .

Соответственные выражения относятся к каждому из бесконечно многих бесконечно тонких цилиндров, параллельных оси  $x$ , на которые можно мысленно разбить всю область интегрирования, и сумма всех этих выражений, т. е. искомый интеграл может быть написан в таком виде:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau = - \int \varphi \cos(\nu x) d\sigma. \quad (78)$$

Интеграл распределен по всем элементам  $d\sigma$  наружной поверхности области интегрирования.

Положим, для примера, что  $\varphi = \text{const}$ . Тогда получим тождество:

$$\int \cos(\nu x) d\sigma = 0.$$

В том, что это тождество имеет место при всякой форме поверхности, легко убедиться непосредственно, если уяснить себе содержание этого уравнения с помощью соотношения (77).

Теперь выведем еще несколько общих и частных применений выведенной формулы, которые пригодятся нам впоследствии.

Обозначим через  $\psi$  другую однозначную непрерывную функцию. Возьмем равенство

$$\frac{\partial(\varphi \cdot \psi)}{\partial x} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

и проинтегрируем его по некоторому объему. Согласно (78), в левой части получится поверхностный интеграл, а в правой части два объемных интеграла. Тогда можно написать:

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\tau = - \int \varphi \psi \cos(\nu x) d\sigma - \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau. \quad (79)$$

Это соотношение выражает правило интегрирования по частям в применении к области трех измерений.

Часто встречается такое приложение равенства (79):

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau = \\ & = - \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\nu x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\nu y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\nu z) \right) \psi d\sigma - \\ & - \int \psi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) d\tau, \end{aligned}$$

или, по [1, (120a)] и [1, (129)]

$$\int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau = - \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma - \int \psi \cdot \Delta \varphi \cdot d\tau. \quad (80)$$

В частном случае, при  $\psi = \varphi$ , получается:

$$\int \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = - \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma - \int \varphi \cdot \Delta \varphi \cdot d\tau, \quad (81)$$

и при  $\psi = \text{const}$ .

$$\int \Delta \varphi \cdot d\tau = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma. \quad (82)$$

**§ 19.** Возьмем теперь снова динамические уравнения (71) в применении к произвольной части тела. В первых из этих уравнений заменим  $x$ , выражением (74). Поверхностный интеграл можно написать, согласно (78), в виде объемного интеграла, так, как например,

$$\int X_x \cos(\nu x) d\tau = - \int \frac{\partial X_x}{\partial x} d\tau.$$



Последний интеграл соединим с первым интегралом в (71) в один объемный интеграл. Если взять бесконечно малую часть тела, объема  $d\tau$ , то объемный интеграл сведется к единственному члену. Сократив на  $d\tau$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} & \left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) k - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \text{Подобным образом} & \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) k - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ & \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) k - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad 83$$

Эти уравнения имеют место для каждой точки тела. Особенностью их является то, что в них входят не самые компоненты давления, а их пространственные производные.

Таким образом равномерное давление, как бы оно ни было велико, никогда не может вызвать движения. Последнее обуславливается всегда пространственной изменчивостью давления, или „надежением давления“. В этом отношении физическое значение давления напоминает значение потенциала (ср. 1, § 39 и сл.)

Подобным же образом можно превратить поверхностный интеграл в объемный интеграл в динамических уравнениях (72) по образцу преобразования:

$$\int y Z_x \cos(\gamma x) d\sigma = - \int \frac{\partial(yZ_x)}{\partial x} d\tau$$

и тем же путем получим из первого уравнения (72)

$$\left\{ y \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) - z \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right\} k - \frac{\partial}{\partial x} (yZ_x - zY_x) - \frac{\partial}{\partial y} (yZ_y - zY_y) - \frac{\partial}{\partial z} (yZ_z - zY_z) = 0,$$

или, исключив массовые силы при помощи (83) и выполнив дифференцирование:

$$Z_y = Y_z,$$

Подобным же образом,

$$X_z = Z_x \text{ и } Y_x = X_y. \quad 84$$

Следовательно, тангенциальные компоненты давления равны друг другу попарно, и девять компонентов давления  $X_x, \dots, Z_z$  сведется в общем случае к шести.

Уравнения (83) и (84) физически совершенно эквивалентны уравнениям (71) и (72), так как, проинтегрировав (83) и (84) по некоторой части тела, можно снова получить (71) и (72). В дальнейшем они послужат основой всех наших исследований над проблемами равновесия и движения.

§ 20. Соотношениями (84) значительно упрощаются законы давления (74). Теперь мы подробнее изучим эти законы. Прежде всего поставим такой вопрос: если даны любые шесть компонентов давления  $X_x, \dots, Z_z$ , то имеются ли такие элементы поверхности, к которым давление перпендикулярно, т. е. такие, для которых направление давления совпадает с направлением нормали? Условие для этого следующее:

$$X_x = p \cos(\gamma x), \quad Y_y = p \cos(\gamma y), \quad Z_z = p \cos(\gamma z),$$

где  $p$  обозначает величину давления. Подставив эти выражения в (74), получим:

$$\left. \begin{aligned} (X_x - p) \cos(\gamma x) + X_y \cos(\gamma y) + X_z \cos(\gamma z) &= 0, \\ Y_x \cos(\gamma x) + (Y_y - p) \cos(\gamma y) + Y_z \cos(\gamma z) &= 0, \\ Z_x \cos(\gamma x) + Z_y \cos(\gamma y) + (Z_z - p) \cos(\gamma z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 85$$

Эти уравнения совершенно одинаковы с уравнениями (40) или (63), кроме обозначений и того обстоятельства, что в них речь идет только о конечных величинах. Поэтому они приводят к одинаковым результатам, которые можно выразить в виде следующих правил.

Распределение давления в каком-либо элементе тела всегда может быть представлено при помощи симметричного тензора, — тензора давления и натяжения. Компоненты его суть шесть компонентов давления, а главные значения представляют собою так называемые „главные давления“  $p, q, r$ , которые равны корням кубического уравнения вида (62). Главные оси тензора суть нормали к тем элементам поверхности, на которые давление действует перпендикулярно. Эти оси представляют собою вместе с тем направления соответствующих главных давлений. Распределение давления целиком определяется величинами и направлениями главных давлений или же шестью компонентами давления по отношению к какой-либо системе координат, при помощи уравнений вида



(64). Если в частном случае три главные давления равны друг другу (что всегда бывает в совершенно упругой жидкости (§ 44), то нормальные давления  $X_x = Y_y = Z_z = p = q, r$ ; тангенциальные давления  $X_y = Y_z = Z_x = 0$ , и направления главных осей неопределенны.

Чтобы составить себе наглядное представление о взаимоотношении, в общем случае, между направлением давления ( $X_x, Y_y, Z_z$ ), и направлением нормали  $\gamma$  к элементу поверхности, на который действует давление, построим мысленно следующую идеальную поверхность второго порядка (эллипсоид или гиперболоид):

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_y z + 2Z_z x + 2X_x y = \pm 1, \quad 86$$

где знак правой части нужно выбрать так, чтобы геометрические операции, которые мы произведем, получились вещественными.

Относительно этой поверхности можно доказать следующую теорему: направление нормали к поверхности в конце диаметра, имеющего направление  $\gamma$ , дает направление давления, действующего на элемент поверхности, перпендикулярный к  $\gamma$ .

Именно, обозначим уравнение поверхности:  $f(x, y, z) = 0$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} \quad 87$$

суть отношения косинусов направления (угловые коэффициенты) нормали в точке  $(x, y, z)$  поверхности. Если эта точка лежит на диаметре, имеющем направление  $\gamma$ , то

$$x : y : z = \cos(\gamma x) : \cos(\gamma y) : \cos(\gamma z).$$

С помощью этих величин отношения (87) становятся равными

$$X_x : Y_y : Z_z,$$

если воспользоваться выражением (86) и принять во внимание уравнения (74).

Согласно выясненному нами физическому значению поверхности (86), форма и положение ее не зависят от выбора системы координат. Оси поверхности суть, очевидно, главные оси давления. При  $p = q = r$ , поверхность обращается в шар.

Можно вообще утверждать, что при переходе от координат  $x, y, z$  к каким-либо другим прямоугольным прямолинейным координатам

$x', y', z'$  выражение (86) остается инвариантным, так как уравнение, которое получится вместо (86), если написать в нем  $x', y', z'$  вместо  $x, y, z$  и в то же время  $X'_x, \dots, Z'_z$  вместо  $X_x, \dots, Z_z$ , представляет ту же самую поверхность. Взаимотношение между компонентами давления со штрихами  $X'_x, \dots$  и компонентами давления без штрихов  $X_x, \dots$  должно быть таково, чтобы при замене компонентов и координат со штрихами соответственными величинами без штрихов снова получилось уравнение (86). Это правило содержит законы преобразования компонентов давления от одной системы координат к любой другой.

Понятно, что все выведенные здесь соотношения годны не только для тензора давления, но и для тензора деформации, и вообще для каждого симметричного тензора второго ранга. Но физическое значение их совершенно различно и неодинаково важно в разных случаях. При помощи симметричного тензора можно представить также момент инерции какого-нибудь тела (1, § 142) относительно различных осей, проходящих через одну точку. Главные значения такого тензора (главные моменты инерции) всегда положительны. Поверхность (86) представляет собою эллипсоид инерции. Здесь, как нередко и в других случаях, можно сделать интересное наблюдение, что природа как бы неизмеримо разнообразна ни казались ее явления с первого взгляда, применяет одни и те же средства в совершенно разных областях. Если бы этого не было, то человеческому разуму, который большей частью работает с помощью уподоблений и заключений по аналогии, было бы, конечно, труднее пасть на след ее законов.

Прежде чем перейти к плодотворным приложениям динамических уравнений (83), нам необходимо ознакомиться с соотношениями, которые существуют между давлением и деформацией. Вопрос об этих соотношениях с неизбежностью приводит к вопросу о *материале* изучаемого тела. Вопроса этого мы пока еще не рассматривали, и о нем будет в первую очередь идти речь в ближайших параграфах.

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

## БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

\*

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

## ТВЕРДЫЕ ТЕЛА. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 21. Как мы видели в первой части, для однозначной формулировки законов движения деформируемых тел нам остается только узнать взаимоотношения между тензором деформации и тензором давления. Чтобы установить это взаимоотношение, введем прежде всего гипотезу, которой мы будем все время придерживаться в дальнейшем: что давление всегда и повсюду зависит исключительно только от деформации в данный момент и в данном месте, — и обратно. Это допущение вовсе не всегда выполняется в природе: строго говоря, все твердые тела проявляют в большей или меньшей степени зависимость деформации не только от мгновенных сил, но и от той обработки, которой они подвергались ранее, а также от температуры, которая может вообще изменяться совершенно независимо от давления и деформации. Но если и несколько тело удовлетворяет введенной нами гипотезе, мы называем его „совершенно упругим“.

Совершенно упругое тело должно, конечно, удовлетворять и такому условию: тело, которое в течение некоторого времени подвергалось каким-либо деформирующим силам, должно после прекращения этих сил перейти в то же самое состояние равновесия, которое оно занимало до приложения этих сил. Ибо нулевому давлению должна однозначно соответствовать нулевая деформация. Поэтому, если тело обнаруживает явление упругого последствия, т. е. после прекращения деформирующих сил лишь постепенно возвращается к первоначальному состоянию равновесия, то такое тело не является совершенно упругим.

Зато самая величина деформации, вызванной определенным давлением, не играет никакой роли в вопросе о совершенной упругости. В этом отношении научная терминология несколько расходится с житейским словоупотреблением, так как в обыденной жизни понятие о выдающейся упругости связано с понятием о значительной деформируемости и, например, резина считается в этом смысле более упругой, чем стекло. Напротив в научном понимании стекло более упруго, чем резина, так как далеко не в такой степени обнаруживает свойство упругого последствия.

Опыт показывает, что всякое тело можно рассматривать как совершенно упругое, если деформация его не превосходит определенной величины, которая называется „пределом совершенной упругости“. Поэтому наши дальнейшие исследования относятся ко всем телам, но только к таким деформациям, которые настолько малы, что лежат внутри предела упругости. Чтобы упростить математическую разработку, мы допустим, что деформации бесконечно малы.

§ 22. Тело, в котором все направления физически равнозначны, называется „изотропным“, а тело, в котором какие-либо направления физически отличаются от других, называется „анизотропным“. Для изотропных тел взаимоотношение между деформацией и давлением получается сразу: так как давление полностью определено деформацией, то при всякой деформации главные оси тензора давления должны совпадать с главными осями тензора деформации. Для анизотропных тел этого заключения нельзя вывести, так как здесь играют роль определенные преимущественные направления тела. Но так как мы желаем распространить наши дальнейшие соображения также и на кристаллы, т. е. на тела анизотропные, то мы должны выбрать более общий путь.

Тензор деформации характеризуется шестью компонентами  $x_x, x_y, \dots$  (§ 12), а тензор давления — шестью компонентами  $X_x, X_y, \dots$  (§ 19). Последние величины суть определенные функции первых величин. Так как компоненты деформации бесконечно малы, то можно при разложении в ряд Тейлора остановиться на первых членах. В результате получится, что компоненты давления суть *линейные* функции компонентов деформации, и притом, можно добавить, *однородные* функции, так как мы отсчитываем деформации от того состояния, которое соответствует нулевому давлению, т. е. от „естественного“ состояния тела. Тогда компоненты давления обращаются в нуль одновременно с компонентами деформации. Следовательно, общее выражение для



зависимости давления от деформации может быть написано в виде шести уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y, \\ Y_y &= a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y, \\ &\dots \end{aligned} \right\} 88$$

В этих уравнениях 36 постоянных  $a$  определяются материальными свойствами тела. Значки при постоянных составляются по такому правилу: цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 сопоставлены по порядку с компонентами деформации  $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$  и с компонентами давления  $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ . Если подставить выражения (88) в уравнения движения (83), то получатся общие законы движения.

Остается еще вопрос, являются ли постоянные  $a$  совершенно независимыми друг от друга или же между ними существуют определенные соотношения, введение которых упростило бы уравнения (88). Непосредственно очевидно, что при существовании симметрии какого-либо рода в кристалле число постоянных становится меньше 36 и выражения (88) сводятся к более простым частным случаям. Но пока мы еще оставим общий случай совершенно несимметричного кристалла и подчиним его условию, которого мы до сих пор еще не вводили, но о котором мы знаем, что оно постоянно выполняется в природе. Это условие — закон сохранения энергии. Мы увидим, что введение этого закона имеет следствием общее значительное упрощение системы уравнений (88).

§ 23. Согласно принципу сохранения энергии [1, (393)], изменение полной энергии  $L + U$  материальной системы, происшедшее в течение элемента времени  $dt$ , равно работе, совершенной за это время над системой внешними силами:

$$d(L + U) = A. \quad 89$$

Это равенство мы применим к рассматриваемому случаю. При этом, как и в § 15, мы выделим произвольную часть всего тела и будем рассматривать ее как материальную систему.

Первая часть энергии, живая сила  $L$ , равна сумме живых сил всех элементов массы  $kd\tau$  рассматриваемой части тела. Следовательно,

$$L = \frac{1}{2} \int \left\{ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 \right\} kd\tau, \quad 90$$

где  $u, v, w$  — компоненты смещения материальной точки из ее естественного положения, а интегрирование распространяется на рассматриваемую часть тела.

О второй части энергии, потенциальной энергии  $U$ , мы знаем, что она складывается из потенциальных энергий отдельных элементов массы и поэтому выражается в виде

$$U = \int F d\tau, \quad 91$$

где функция  $F$ , потенциальная энергия единицы объема, зависит в виду совершенной упругости тел, только от состояния деформации соответствующего элемента объема, т. е. от шести компонентов деформации,  $x_x, y_y, \dots$ . Так как речь идет всегда только об изменениях потенциальной энергии, а не об ее абсолютном значении, то мы можем, не ограничивая общности задачи, положить для естественного, недеформированного состояния тела  $F = 0$ .

Наконец, что касается работы внешних сил, то последняя состоит, по § 14, из работы массовых сил, которые действуют на все элементы рассматриваемой части тела и, кроме того, из работы сил давления, которые действуют извне на точки поверхности рассматриваемой части тела. Стало быть:

$$A = \int (Xdu + Ydv + Zdw) kd\tau + \int (X_x du + Y_y dv + Z_z dw) d\sigma, \quad 92$$

где первый интеграл берется по объему, а второй интеграл — по поверхности части тела.

Теперь, чтобы осуществить требование (89) принципа сохранения энергии, составим прежде всего выражение для  $dL$ . Так как масса  $kd\tau$  не зависит от времени, то мы можем непосредственно вывести из (90):

$$dL = \int \left( \frac{d^2u}{dt^2} du + \frac{d^2v}{dt^2} dv + \frac{d^2w}{dt^2} dw \right) kd\tau,$$

или, если подставить значения компонентов ускорения из уравнений движения (83),

$$dL = \int (Xdu + Ydv + Zdw) kd\tau - \int d\tau \cdot \left\{ \begin{aligned} &du \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) + \\ &+ dv \left( \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) + \\ &+ dw \left( \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right. \quad 93$$

Если теперь воспользоваться формулой преобразования (79), применив ее к каждому из девяти объемных интегралов, на которые распадается второй объемный интеграл, то мы получим, принимая во внимание (74),

$$dL = \int (Xdu + Ydv + Zdw) kd\tau + \int d\tau \cdot \left\{ \begin{array}{l} X_x \frac{\partial du}{\partial x} + X_y \frac{\partial du}{\partial y} + X_z \frac{\partial du}{\partial z} + \\ + Y_x \frac{\partial dv}{\partial x} + Y_y \frac{\partial dv}{\partial y} + Y_z \frac{\partial dv}{\partial z} + \\ + Z_x \frac{\partial dw}{\partial x} + Z_y \frac{\partial dw}{\partial y} + Z_z \frac{\partial dw}{\partial z} + \end{array} \right\} + \int d\sigma \cdot (X_x du + Y_x dv + Z_x dw). \quad 94$$

Если подставить это выражение для  $dL$  в уравнение энергии (89), то последнее значительно упрощается, так как член, зависящий от работы внешних сил  $A$  и выражающийся формулой (92), сокращается с равным ему членом в левой части. Тогда в уравнении энергии останется только потенциальная энергия  $dU$  и второй объемный интеграл из (94). Последний можно еще более упростить. Прежде всего, нужно принять во внимание, что в выражениях  $\frac{\partial du}{\partial x}$  и т. д. знак  $\partial$  относится к дифференцированию по пространственным координатам, а знак  $d$  — к дифференцированию по времени, и поэтому оба действия совершенно независимы друг от друга. Отсюда имеем

$$\frac{\partial du}{\partial x} = d \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial du}{\partial y} = d \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{и т. д.}$$

Если далее воспользоваться соотношениями (84) и сокращенными обозначениями (60), то уравнение энергии представится окончательно в таком виде:

$$dU + \int (X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + Z_y dx_y) d\tau = 0. \quad 95$$

Здесь можно, согласно (91), написать для изменения потенциальной энергии:

$$dU = \int dF \cdot d\tau. \quad 96$$

Строго говоря, следовало бы добавить сюда еще один член, который зависит от временного изменения величины элемента объема  $d\tau$ , а именно член  $\int Fd(d\tau)$ , где первое  $d$  соответствует дифференцированию по времени, а второе  $d$  — дифференцированию по объему. Но этим членом можно пренебречь на том основании, что при бесконечно малых деформациях временные изменения элемента объема, даже для конечных промежутков времени бесконечно малы по сравнению с величиной элемента объема, между тем как временные изменения потенциальной энергии  $F$  того же порядка величины, как и величина этой энергии.

Если воспользоваться (96), то можно написать выражение (95) в виде одного объемного интеграла, взятого по объему рассматриваемой части тела. Если взять часть тела бесконечно малую, в виде одного элемента объема  $d\tau$ , то можно отбросить знак интеграла и мы получим для каждого отдельного элемента тела:

$$-dF = X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + Z_y dx_y.$$

С другой стороны, так как  $F$  зависит от шести компонентов деформации, то мы имеем:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial F}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial F}{\partial z_z} dz_z + \frac{\partial F}{\partial y_z} dy_z + \frac{\partial F}{\partial z_x} dz_x + \frac{\partial F}{\partial x_y} dx_y,$$

и так как компоненты деформации и их изменения не зависят друг от друга, то вообще:

$$\left. \begin{array}{l} X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \quad Y_y = -\frac{\partial F}{\partial y_y}, \quad Z_z = -\frac{\partial F}{\partial z_z}, \\ Y_z = -\frac{\partial F}{\partial y_z}, \quad Z_x = -\frac{\partial F}{\partial z_x}, \quad X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}. \end{array} \right\} \quad 97$$

Это значит, что компоненты тензора давления равны взятым с обратным знаком производным единственной функции компонентов деформации по этим компонентам, совершенно подобно тому, как при центральных силах компоненты какой-нибудь силы равны взятым с обратным знаком производным единственной функции координат, — потенциала, — по этим координатам [1 (107)]. Поэтому потенциальную энергию единицы объема  $F$  называют также *упругим потенциалом* (потенциалом упругих сил).



Согласно (88)\*, упругий потенциал есть квадратическая функция компонентов деформации и, кроме того, функция однородная, так как, согласно сделанному нами выше допущению, не только линейные члены, но также и абсолютный член обращаются в нуль.

§ 24. Согласно полученным нами результатам, общее выражение упругого потенциала имеет вид:

$$F = \left. \begin{aligned} & \frac{a_{11}}{2} x_x^2 + a_{12} x_x y_y + a_{13} x_x z_z + a_{14} x_x y_z + a_{15} x_x z_x + a_{16} x_x x_y + \\ & + \frac{a_{22}}{2} y_y^2 + a_{23} y_y z_z + a_{24} y_y y_z + a_{25} y_y z_x + a_{26} y_y x_y + \\ & + \frac{a_{33}}{2} z_z^2 + a_{34} z_z y_z + a_{35} z_z z_x + a_{36} z_z x_y + \\ & + \frac{a_{44}}{2} y_z^2 + a_{45} y_z z_x + a_{46} y_z x_y + \\ & + \frac{a_{55}}{2} z_x^2 + a_{56} z_x x_y + \\ & + \frac{a_{66}}{2} x_y^2. \end{aligned} \right\} 98$$

Отсюда получаются, по (97), шесть компонентов давления в виде линейных однородных функций, от компонентов деформации, совершенно так, как в (88), с тем лишь различием, что теперь  $a_{12} = a_{21}$  и т. д. Другими словами: существование упругого потенциала равнозначно условию, чтобы в постоянных упругости  $a_{ij}$ , значки  $i$  и  $j$  можно было переставлять один на место другого. Отсюда получается значительное упрощение общей теории, рассмотренной в § 22: упругое состояние тела зависит уже не от 36, а от 21 постоянной. Об этих постоянных можно заранее высказать еще одно определенное суждение, не входи в рассмотрение частных свойств тела: постоянные удовлетворяют условию, чтобы потенциал  $F$  был положительным при всех обстоятельствах. Дело в том, что упругий потенциал есть потенциальная энергия деформации, а последняя, при переходе тела из деформированного состояния в естественное, т. е. при переходе потенциала от значения  $F$  к значению нуль, обращается в кинетическую, т. е. положительную, энергию, откуда неизбежно следует, что она сама должна быть положительной. Это рассуждение представляет собою приложение общего закона, что устойчивому состоянию равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии (1, § 105). Так как естественное,

недеформированное состояние тела представляет собою устойчивое состояние равновесия, то потенциальная энергия в каждом деформированном состоянии больше, чем в естественном состоянии, т. е. больше нуля.

Отсюда можно дальше заключить, что все шесть постоянных,  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{66}$ , положительны. Если бы, например,  $a_{11}$  было отрицательно, то достаточно было бы положить, что  $x_x$  не равно нулю, а все остальные компоненты деформации равны нулю, и получился бы отрицательный потенциал. Но и остальные постоянные  $a$  должны удовлетворять некоторым неравенствам, которых мы здесь формулировать не будем.

§ 25. На практике обычно приходится по данным внешним силам давления определять произведенное ими изменение тела. Тогда, прежде всего, возникает важный вопрос об *однозначности* решения этой задачи, т. е. вопрос, соответствует ли данным внешним силам давления вполне определенное изменение тела, или же уравнениям задачи удовлетворяют несколько различных изменений. Исследованием этого вопроса мы и займемся. При этом ограничимся случаем равновесия.

Положим, что нам даны давления, действующие извне на поверхность тела,  $X_x, Y_y, Z_z$ , а также массовые силы  $X, Y, Z$ . Допустим, кроме того, что найдены три функции  $u, v, w$ , зависящие от  $x, y, z$ , такие, которые можно рассматривать как смещения точек тела  $x, y, z$  и которые удовлетворяют всем условиям равновесия, т. е. уравнениям (83) внутри тела:

$$\left. \begin{aligned} Xk &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ Yk &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ Zk &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned} \right\} 99$$

и уравнениям (74) на поверхности. Во всех этих уравнениях нужно подставить вместо компонентов давления  $X_x, \dots$  те значения, которые получаются из выражений для смещений  $u, v, w$ , если сперва составить, по (60), соответствующие им компоненты деформации, а затем, по (97), компоненты давления.

Положим далее, что существуют еще три другие функции  $u', v', w'$  от  $x, y, z$ , отличные от предыдущих и также удовлетворяющие условиям равновесия. В таком случае уравнения (99) и (74) действительны также и для тех компонентов давления  $X_x', X_y', \dots$ ,

которые получаются, если вычислить компоненты деформации  $x'_x$ ,  $y'_y$ , ..., по (60), из  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  вместо  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и подставить эти значения в (97).

Рассмотрим теперь функции

$$u_0 = u' - u, \quad v_0 = v' - v, \quad w_0 = w' - w, \quad (100)$$

зависящие от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и исследуем то изменение тела, которое они представляют собою, если рассматривать их как компоненты смещения. Прежде всего отсюда получаются, по (60), компоненты деформации:

$$x_{x_0} = x'_x - x_x, \quad x_{y_0} = x'_y - x_y, \quad \dots \quad (101)$$

затем, по (97), компоненты давления:

$$X_{x_0} = X'_x - X_x, \quad X_{y_0} = X'_y - X_y, \quad \dots \quad (102)$$

С другой стороны, если вычесть уравнения (99) для компонентов давления без штрихов из таких же уравнений (99) для компонентов давления со штрихами и принять во внимание, что данные массовые силы,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , одинаковы в обеих системах уравнений, то получится:

$$0 = \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} + \frac{\partial X_{y_0}}{\partial y} + \frac{\partial X_{z_0}}{\partial z}, \quad \dots \quad (103)$$

Наконец, для поверхности тела, вычтя уравнения (74) без штрихов из уравнений со штрихами, получим:

$$0 = X_{x_0} \cos(\gamma x) + X_{y_0} \cos(\gamma y) + X_{z_0} \cos(\gamma z), \quad \dots \quad (104)$$

так как заданные поверхностные давления  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$  всякий раз одинаковы.

Здесь могло бы возникнуть сомнение в том, можно ли при таком вычислении считать одинаковыми косинусы направлений в обеих системах уравнений, так как форма поверхности тела ведь различна при обоих изменениях. Однако легко убедиться, что допущенная таким образом ошибка — меньшего порядка величины. Дело в том, что косинусы направления нормали к элементу поверхности конечны, поэтому их значения отклоняются при каком-нибудь бесконечно малом изменении тела лишь на бесконечно малую величину от тех значений, которые они имели при естественном состоянии тела, между тем как компоненты давления  $X_x$ , ... отличаются при обоих изменениях на такие

величины, которые заметны по сравнению со значениями самих компонентов давления.

Уравнения (103) и (104) имеют очень наглядное физическое истолкование. Они выражают условия для такого изменения  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , при котором внешние силы не действуют ни на элементы массы ни на поверхность тела. Таким образом поставленный выше вопрос об однозначности решения для  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , при заданных внешних силах, сводится к более простому вопросу, возможно ли при отсутствии всякого внешнего воздействия такое изменение тела  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , которое было бы отлично от нуля.

Ответ на этот вопрос можно найти при помощи следующего рассуждения. Если умножить три уравнения (103) соответственно на  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , сложить между собой, умножить на элемент объема  $d\tau$  и проинтегрировать по объему всего тела, то получится уравнение с девятью объемными интегралами, каждый из которых можно преобразовать, на основании (79), следующим образом:

$$\int u_0 \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} d\tau = - \int \frac{\partial u_0}{\partial x} X_{x_0} d\tau - \int u_0 X_{x_0} \cos(\gamma x) d\tau.$$

Поэтому уравнение преобразуется, принимая во внимание (104), в следующее:

$$\int (X_{x_0} x_{x_0} + Y_{y_0} y_{y_0} + Z_{z_0} z_{z_0} + Y_{z_0} y_{z_0} + Z_{x_0} z_{x_0} + X_{y_0} x_{y_0}) d\tau = 0.$$

или же, если подставить значения составляющих давления из (97):

$$\int F_0 d\tau = 0,$$

где  $F_0$  обозначает выражение (98), если подставить значок нуля при всех компонентах деформации. Но  $F_0$  всегда положительно и равно нулю только в предельном случае, когда энергия деформации обращается в нуль. Значит из последнего уравнения следует, что  $F_0$  обращается в нуль для каждого элемента объема, а отсюда вытекает, что каждая из составляющих деформации  $x_{x_0}$ ,  $x_{y_0}$ , ... равна нулю. Другими словами: если на тело не действуют никакие внешние силы, то деформация обязательно равна нулю.

Остается еще вопрос, обращается ли при этом в нуль также изменение  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ . Для ответа нужно исследовать, обязательно



ли обращаются в нуль компоненты смещения  $u_0, v_0, w_0$ , если равны нулю шесть компонентов деформации:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} 105$$

Как легко видеть, это вовсе не так. Можно даже получить  $u_0, v_0, w_0$  как общие решения дифференциальных уравнений (105) следующим образом. Для  $u_0$  существуют три условия:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0,$$

из которых два последние получаются дифференцированием уравнений, содержащих  $\frac{\partial u_0}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u_0}{\partial z}$ .

Поэтому  $u_0$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_0 = \lambda + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda' y z. \\ \text{Подобным образом} \\ v_0 = \mu + \mu_1 x + \mu_3 z + \mu' x z, \\ w_0 = \nu + \nu_1 x + \nu_2 y + \nu' x y, \end{aligned} \right\} 106$$

причем двенадцать коэффициентов  $\lambda, \mu, \nu$  постоянны. Далее, на основании (105):

$$\begin{aligned} \mu_3 + \mu' x + \nu_2 + \nu' x &= 0, \\ \nu_1 + \nu' y + \lambda_3 + \lambda' y &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda' z + \mu_1 + \mu' z &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda' = 0, \quad \mu' = 0, \quad \nu' = 0, \\ \nu_2 + \mu_3 = 0, \quad \lambda_3 + \nu_1 = 0, \quad \mu_1 + \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Ввиду этих шести условий, выражения (106) становятся совершенно одинаковыми с выражениями (39) для самого общего бесконечно малого изменения, которому тело может подвергнуться, не претерпевая деформации, т. е. для поступательного перемещения и вращения. Это очевидно, и этот результат можно было предвидеть заранее. Мы можем поэтому высказать следующее положение: хотя внешние силы, действующие на внутренность и

поверхность тела, не определяют однозначно компонентов смещения  $u, v, w$ , однако изменения тела, представляемые различными решениями задачи, отличаются друг от друга только поступательными перемещениями и вращениями всего тела и поэтому все соответствуют одинаковой деформации. В этом смысле можно сказать, что задача равновесия однозначно разрешается выведенными уравнениями. Впоследствии, при рассмотрении подобных задач мы будем произвольно выбирать те шесть постоянных, которые остаются неопределенными, так как они больше не представляют для нас интереса.

**§ 26.** Тела симметричной структуры. Кристаллические системы. Чтобы удобнее обозреть двадцать одну постоянную, от которых зависят упругие свойства кристалла, расположим их в виде следующей схемы:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{array} \right\} 107$$

Однако значения отдельных постоянных  $a$  зависят вообще не только от состояния кристалла, но также и от выбора системы координат, а именно от расположения координатных осей относительно направлений, которые играют особую роль в структуре кристалла. Это следует непосредственно из того соображения, что значение упругого потенциала  $F$ , т. е. упругой энергии, ни в каком случае не может зависеть от выбора координат. Если преобразовать какую-нибудь деформацию  $x_x, x_y, \dots$  к другой координатной системе  $x', y', z'$  и обозначить новые компоненты деформации при помощи штриха сверху, то, по (98):

$$\frac{a_{11}}{2} x_x^2 + a_{12} x_x x_y + \dots = \frac{a'_{11}}{2} x_x'^2 + a'_{12} x_x' x_y' + \dots \quad 108$$

Далее, если выразить компоненты деформации со штрихами через компоненты без штрихов и приравнять друг к другу соответственные члены в обеих частях тождества, то получатся соотношения между постоянными со штрихами и без штрихов, которые соответствуют соотношениям между координатами двух систем. В общем случае постоянные со штрихами  $a'$  все или частью отличаются от постоянных без штрихов  $a$ .

Если кристалл обладает таким частным свойством, что при определенном изменении системы координат все  $a'$  равны соответствующим  $a$ , т. е. если постоянные  $a$  инвариантны относительно преобразования координат, то говорят, что кристаллу свойствен определенный род симметрии. Если существует несколько таких изменений координат, то говорят о высшей симметрии кристалла.

Каждый род условий симметрии можно выразить не только на основании инвариантности постоянных упругости  $a$ , но и другим способом: система координат остается первоначальная, зато сам кристалл подвергается такому изменению, чтобы он расположился по отношению к системе координат таким же образом, как он был бы расположен по отношению к системе координат со значками при первом способе рассмотрения, когда он предполагался неподвижным. Существование симметрии проявляется тогда в том, что кристалл и после изменения обладает теми же свойствами по всем направлениям, как и до него, или же, как говорят, что кристалл приведен к совмещению с самим собою. Оба вида определения симметрии, очевидно, вполне эквивалентны и представляют собою лишь разные формулировки одного обстоятельства. Для наших целей удобнее первая формулировка, условие инвариантности  $a$  при преобразовании координат. Им мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Кристаллы разделяются, соответственно степени симметрии, проявляемой ими, на различные классы. Согласно сказанному выше, принцип этого подразделения не является заранее установленным, однозначно определенным на основании дедукции, а, подобно всякому определению понятия, до известной степени произволен и выводится лишь из соображений целесообразности. Мы воспользуемся здесь простым давно применяемым разделением на шесть кристаллических систем. В качестве преобразования координат, удобнее всего применить вращение координатной системы.

Если все постоянные упругости  $a$  какого-нибудь кристалла инвариантны по отношению к повороту координатной системы вокруг одной из осей координат на угол  $\frac{2\pi}{n}$  (или если кристалл приводится к совпадению с самим собою при повороте на угол  $\frac{2\pi}{n}$ ), то эта ось называется „осью симметрии  $n$ -го порядка“.

Очевидно, что ось симметрии не есть определенная прямая, а лишь определенное направление, так как все параллельные прямые совершенно равнозначны.

Существование оси симметрии первого порядка вовсе не является действительным условием симметрии, так как поворот координатной системы на угол  $2\pi$  не изменяет ее. Кристаллы, обладающие только осями симметрии первого порядка, образуют последнюю, шестую, или *асимметричную (триклиническую)* систему. К ним принадлежит, например, серпикислая медь. Ее упругие свойства определяются 21 постоянной, представленными в виде схемы (107).

Если кристалл обладает только одной осью симметрии второго порядка, то он принадлежит к пятой или *моносимметричной (моноклинической)* системе, как, например, слюда или сода. Чтобы установить условия для упругих свойств кристалла этой системы, мы поставим, прежде всего, общий вопрос о зависимости между постоянными упругости со штрихами и постоянными упругости без штрихов  $a$ , при повороте системы координат на угол  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  вокруг оси  $z$ .

В этом случае получится:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z.$$

Соответственным образом,

$$u' = -u, \quad v' = -v, \quad w' = w,$$

и, по (60),

$$x'_x = x_x, \quad y'_y = y_y, \quad z'_z = z_z,$$

$$y'_z = -y_z, \quad z'_x = -z_x, \quad x'_y = -x_y.$$

Если подставить эти значения в тождество (108), то получится, что из 21 постоянной  $a'$  13 постоянных равны соответствующим постоянным  $a$  без штрихов, между тем как

$$\begin{aligned} a'_{14} &= -a_{14}, & a'_{15} &= -a_{15}, & a'_{21} &= -a_{21}, & a'_{25} &= -a_{25}, \\ a'_{34} &= -a_{34}, & a'_{35} &= -a_{35}, & a'_{46} &= -a_{46}, & a'_{56} &= -a_{56}. \end{aligned}$$

Эти соотношения верны вообще для всякого кристалла. Если же ось  $z$  есть ось симметрии второго порядка, то все величины  $a$  инвариантны, и поэтому те из них, которые меняют свой знак при преобразовании, должны равняться нулю. Отсюда следует,



по (107), такая схема упругих постоянных кристаллов моносимметрической системы:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ & & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66} \end{array} \right\} 109$$

Если, кроме оси  $z$ , имеется еще одна ось симметрии второго порядка, например, ось  $x$ , то мы получим четвертую или ромбическую систему, к представителям которой относятся калийная селитра, арагонит, топаз. Подобно вышеприведенному способу, можно получить, что этой системе соответствует такая схема:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66} \end{array} \right\} 110$$

Из построения этой схемы видно, что в данном случае и третья координатная ось, т. е. ось  $y$ , есть также ось симметрии второго порядка.

От ромбической системы мы перейдем к третьей или *тетрагональной* (*квадратной*) системе (например, цирконий), если введем дальнейшее условие, что одна из координатных осей, например ось  $z$ , есть ось симметрии четвертого порядка. Повороту на угол  $\frac{\pi}{2}$  вокруг оси  $z$  соответствуют формулы преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= y, & y' &= -x, & z' &= z, \\ u' &= v, & v' &= -u, & w' &= w, \\ x'_x &= y, & y'_y &= -x_x, & z'_z &= z_z, \\ y'_z &= -x_z, & z'_x &= z_y, & x'_y &= -x_y, \end{aligned}$$

Отсюда получим на основании (108) общие соотношения для девяти постоянных тетрагональной системы:

$$\begin{aligned} a_{11}' &= a_{22}, & a_{12}' &= a_{12}, & a_{13}' &= a_{23}, \\ a_{22}' &= a_{11}, & a_{23}' &= a_{13}, & a_{33}' &= a_{33}, \\ a_{44}' &= a_{55}, & a_{55}' &= a_{44}, & a_{66}' &= a_{66}. \end{aligned}$$

Если все постоянные  $a$  со штрихами должны при этом равняться соответственным постоянным без штрихов, то

$$a_{11}' = a_{22}, \quad a_{13}' = a_{23}, \quad a_{44}' = a_{55}.$$

Поэтому, согласно (98), упругий потенциал тетрагонального кристалла равен:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a_{11}}{2} (x_x^2 + y_y^2) + a_{12} x_x y_y + a_{13} (x_x + y_y) z_z + \\ &+ \frac{a_{33}}{2} z_z^2 + \frac{a_{44}}{2} (y_y^2 + z_z^2) + \frac{a_{66}}{2} x_y^2. \end{aligned} \quad 111$$

Существование оси симметрии третьего, а также шестого порядка определяет вторую или *гексагональную* систему, представителями которой являются многие кристаллы, как, например, натровая селитра, известковый шпат, графит, турмалин, лед.

Наконец, первая или *правильная* система получится из тетрагональной системы, если положить, что и вторая ось, а поэтому также и третья ось суть оси симметрии четвертого порядка. Выражение для упругого потенциала правильного кристалла получится, согласно (111), в виде:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a_{11}}{2} (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + a_{12} (x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) + \\ &+ \frac{a_{44}}{2} (y_y^2 + z_z^2 + x_x^2). \end{aligned} \quad 112$$

Упругий потенциал зависит в этом случае только от трех постоянных. К правильной системе принадлежат каменная соль, плавиковый шпат, алмаз.

§ 27. Изотропные тела. Для того чтобы тело было изотропно упругим, т. е. чтобы оно вовсе не имело преимущественных направлений, необходимо и достаточно, чтобы все его постоянные упругости были инвариантны по отношению ко всякому изменению координатной системы, или, что сводится к тому же, чтобы при всяком повороте оно приводилось к совпадению с самим собою. Чтобы установить вытекающие отсюда условия для значений постоянных упругости, проще всего отнести деформацию к главным расширениям и к направлениям главных осей расширения. Иначе говоря, мы выразим, при помощи уравнений (64), шесть компонентов деформации  $x_x, y_y, \dots$  в зависимости от трех главных расширений  $l, m, n$ , и девяти

косинусов направлений  $\alpha_1, \dots, \gamma_3$  и эти величины подставим в выражение упругого потенциала (112). В изотропном теле последний должен полностью определяться величинами  $l, m, n$ , каковы бы ни были значения косинусов направления, причем он, очевидно, представляет однородную симметричную квадратичную функцию от  $l, m, n$ .

Смысл этого требования удобнее всего уяснить, если рассмотреть все однородные симметричные квадратичные функции от  $l, m, n$ . Имеется всего две такие функции, независимые друг от друга, а именно:

$$l^2 + m^2 + n^2, \\ lm + mn + nl.$$

К этим двум функциям приводятся все другие. Так например:

$$(l + m + n)^2 = (l^2 + m^2 + n^2) + 2(lm + mn + nl). \quad 113$$

Отсюда следует, что упругий потенциал изотропного тела обладает только двумя независимыми друг от друга постоянными  $\lambda$ , значит, имеет вид:

$$F = \frac{\lambda}{2}(l + m + n)^2 + \mu(l^2 + m^2 + n^2), \quad 114$$

причем  $\lambda$  и  $\mu$  положительны.

Теперь, чтобы выразить  $F$  через составляющие деформации,  $x_x, x_y, \dots$ , примем во внимание, что  $l, m, n$  суть корни уравнения третьей степени (62). Поэтому

$$l + m + n = x_x + y_y + z_z, \quad 115$$

как коэффициент при  $l^2$ , а

$$lm + mn + nl = (y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) - \frac{1}{4}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2), \quad 116$$

как коэффициент при  $l$  в упомянутом уравнении. Отсюда следует, согласно (113)

$$l^2 + m^2 + n^2 = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$$

(в этом можно убедиться и непосредственно при помощи (64)). Согласно (114)

$$F = \frac{\lambda}{2}(x_x + y_y + z_z)^2 + \mu \left( x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{y_z^2 + z_x^2 + x_y^2}{2} \right). \quad 117$$

Если подставить, для сокращения, объемное расширение

$$x_x + y_y + z_z = \sigma, \quad 118$$

то на основании (97), мы получим следующие выражения для компонентов давления изотропного упругого тела в зависимости от компонентов деформации.

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_z &= -\mu y_z, \\ Y_y &= -\lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x, \\ Z_z &= -\lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y. \end{aligned} \right\} \quad 119$$

Эти уравнения представляют собою то необходимое дополнение к общим уравнениям движения, о котором мы говорили в начале первой главы, в § 21.



## ГЛАВА ВТОРАЯ

## СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 28. Прежде всего займемся приложениями изложенной теории к статическим задачам о твердых телах. При этом мы ограничимся для простоты изотропными телами. Так как массовые силы, в роде тяжести, играют лишь незначительную роль в деформациях твердых тел, то мы положим их равными нулю. Тогда условия равновесия (99), относящиеся к внутренности тела, примут более простой вид:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \dots \quad 120$$

а условия для поверхности тела (74) останутся неизменными:

$$X_y = X_x \cos(\gamma x) + X_z \cos(\gamma z), \dots \quad 121$$

Каждое смещение  $u$ ,  $v$ ,  $w$  представляет собою возможное в природе состояние равновесия. Соответствующие компоненты деформации  $x_x$ ,  $x_y$ , ... вычисляются по (60) и приводят на основании (119) к выражениям для компонентов давления  $X_x$ ,  $X_y$ , ... которые удовлетворяют уравнениям (120). При этом деформация соответствует тем силам, действующим на поверхность тела, которые представлены компонентами давления  $X_y$ ,  $Y_x$ ,  $Z_x$  в уравнениях (121).

Здесь имеет важное значение доказанное в § 25 положение, что деформация *однозначно* определяется внешними силами. Поэтому если мы нашли каким бы то ни было способом решение условий равновесия, то мы можем быть уверены, что это единственное решение, соответствующее данным внешним силам давления. Обычно в природе задача бывает поставлена таким образом, что заданы внешние силы, а по ним требуется найти произведенную ими деформацию. Но, так как уравнения имеют

очень сложный вид, то задачу невозможно разрешить, отыскивая сперва общее решение дифференциальных уравнений (120), а затем вычисляя входящие в него произвольные постоянные на основании предельных условий (121). Обычно исходят из предельных условий (121) и пытаются подобрать такое частное решение уравнений (120), которое удовлетворяло бы предельным условиям. Если попытка удастся, то считается, что решение задачи найдено. Этим методом мы будем обычно пользоваться в дальнейшем.

§ 29. Рассмотрим прежде всего всестороннее равномерное, так называемое *кубическое сжатие* тела произвольной формы. На поверхность тела действует, всюду в направлении нормали, данное равномерное давление  $p$ . Поэтому

$$X_y = p \cos(\gamma x), \quad Y_x = p \cos(\gamma y), \quad Z_x = p \cos(\gamma z). \quad 122$$

Таким образом даны компоненты внешнего давления. Очевидно, мы удовлетворим предельным условиям (121), если положим, что на поверхности тела повсюду

$$\left. \begin{aligned} X_x = Y_y = Z_z = p, \\ X_y = Y_z = Z_x = 0. \end{aligned} \right\} \quad 123$$

Далее, предположим, что эти шесть уравнений представляют компоненты давления не только на поверхности, но и повсюду внутри тела. Тогда будут удовлетворены также уравнения (120). Затем мы получим из (119):

$$p = -\lambda z - 2\mu x_x, \quad \dots \quad y_z = 0, \quad \dots, \quad 124$$

откуда сложением первых трех уравнений получается:

$$3p = -3\lambda z - 2\mu(x_x + y_y + z_z),$$

и, согласно (118),

$$\sigma = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu}, \quad x_x = y_y = z_z = \frac{\sigma}{3}. \quad 125$$

Поэтому, если положить

$$u = \frac{\sigma}{3} x, \quad v = \frac{\sigma}{3} y, \quad w = \frac{\sigma}{3} z, \quad 126$$

то, согласно (60), будут удовлетворены уравнения (124) и мы имеем, таким образом, решение задачи. Обобщение, получающееся вследствие того, что в выражения для  $u, v, w$  можно ввести еще некоторые постоянные, не изменяет, согласно § 25, найденной деформации.

Таким образом всестороннее равномерное давление  $p$  вызывает всестороннее равномерное сжатие объема, величины (125), не зависящее от формы тела. Поэтому постоянная  $\frac{3}{3\lambda + 2\mu}$  называется также „коэффициентом объемного сжатия“, а обратная величина

$$\frac{p}{-\sigma} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (127)$$

называется „объемным модулем упругости“ вещества.

§ 30. Вслед за объемной упругостью рассмотрим так называемую „линейную упругость“, т. е. исследуем равновесие тела, растягиваемого односторонне, например по направлению оси  $x$ .

Чтобы не усложнять вычисления, положим, что тело имеет вид цилиндра, параллельного оси  $x$  (проволока, стержень), длины  $l$  и произвольного поперечного сечения. Положим, что начальное сечение лежит в плоскости  $yz$ , т. е.  $x=0$ , и неподвижно удерживается какими-либо силами. На конечное сечение,  $x=l$ , действует в направлении положительной оси  $x$  внешняя сила, величина которой равна  $F$ , а на боковую поверхность цилиндра никакие внешние силы не действуют. Требуется определить произведенную деформацию.

Для того чтобы удовлетворить пограничным условиям на поверхности (121), рассмотрим прежде всего боковую поверхность цилиндра. На боковой поверхности  $X_y = Y_x = Z_x = 0$ , далее  $\cos(\gamma x) = 0$ , между тем, как  $\cos(\gamma y)$  и  $\cos(\gamma z)$  могут принимать любые значения. Поэтому условия на поверхности будут удовлетворены, если мы положим:

$$X_y = Y_x = Z_x = 0, Y_y = Z_z = 0. \quad (128)$$

Предположим, что эти условия имеют место также повсюду внутри тела, так что из шести компонентов давления только  $X_x$  отлично от нуля. Тогда действительно дифференциальные уравнения (120), будут удовлетворены, если, кроме того, положить, что  $X_x$  постоянно. Значение этой постоянной получится из условия на поверхности для свободного сечения  $x=l$ , так как условие

для неподвижного сечения  $x=0$  дает только величину сил, которые удерживают сечение и которые нас здесь не интересуют.

На свободном сечении

$$\cos(\gamma x) = -1, \cos(\gamma y) = \cos(\gamma z) = 0,$$

поэтому, согласно (121) и (128):

$$X_y = -X_x, Y_y = 0, Z_y = 0.$$

Так как  $X_x$  постоянно, то мы имеем для результирующей всех параллельных сил давления, которые действуют на элементы свободного сечения:

$$\int X_x d\sigma = -X_x \cdot q = F, \quad (129)$$

где  $q$  обозначает площадь поперечного сечения. Отсюда

$$X_x = -\frac{F}{q}. \quad (130)$$

По составляющим давления можно найти также составляющие деформации, пользуясь уравнениями (119), следующим образом. Прежде всего,

$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

Затем получим из:

$$\frac{F}{q} = \lambda\sigma + 2\mu x_x,$$

$$0 = \lambda\sigma + 2\mu y_y,$$

$$0 = \lambda\sigma + 2\mu z_z,$$

сложив эти равенства:

$$\frac{F}{q} = 3\lambda\sigma + 2\mu\sigma.$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{F}{q}. \quad (131)$$

Отсюда

$$x_x = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{F}{q}, \quad y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{F}{q}. \quad (132)$$



Эти величины дают смещения

$$u = x_x \cdot x, \quad v = y_y \cdot y, \quad w = z_z \cdot z, \quad 133$$

т. е. полное решение задачи.

Как и следует ожидать найденная деформация связана с объемным расширением. Но величина этого расширения  $\sigma$ , которая получается из сравнения выражений (131) и (125), при линейном натяжении, равна лишь одной третьей части расширения при объемном натяжении. Что касается расширения отдельных осей, то оно, очевидно, положительно для оси  $x$ . Ему соответствует, по (133), смещение свободного сечения, т. е. удлинение цилиндра на величину:

$$u = x_x \cdot l = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{lF}{q}. \quad 134$$

Таким образом удлинение пропорционально растягивающей силе, пропорционально длине и обратно пропорционально поперечному сечению цилиндра и, наконец, пропорционально постоянной материала, обратная величина которой обозначается как „линейный модуль упругости“  $E$  данного вещества:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad 135$$

Но, на основании (132), растяжение по длине цилиндра связано с сжатием по каждому направлению, перпендикулярному к оси цилиндра. Величину сжатия удобнее всего рассмотреть, если составить отношение поперечного сжатия к продольному удлинению:

$$\frac{-y_y}{x_x} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \varepsilon < \frac{1}{2}. \quad 136$$

Измерив обе постоянные,  $E$  и  $\varepsilon$ , можно вычислить  $\lambda$  и  $\mu$ , и таким образом, определить все упругие свойства вещества.

Величина  $\varepsilon$  очень мала для пробки, а для каучука очень велика, близка к предельной величине  $1/2$ . Для металлов и стекла можно принять ее в первом приближении равной  $1/3$ , но отдельные материалы заметно отличаются друг от друга.

Модуль линейной упругости  $E$ , размерность которого одинакова, согласно (135) и (119), с размерностью давления, имеет для металлов и стекла величину порядка:

$$E \sim 10^{12} \left[ \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right] \text{ [ср. 1 (8a)].} \quad 136a$$

Поэтому такой же порядок величины имеют и коэффициенты упругости  $\lambda$  и  $\mu$ .

§ 31. Теперь рассмотрим случай *кручения*, также для цилиндра длины  $l$ , начальное сечение которого (основание цилиндра) пусть закреплено неподвижно в плоскости  $xy$  (т. е.  $z=0$ ), а свободное конечное сечение ( $z=l$ ) поворачивается в своей плоскости внешними силами на некоторый угол. Положим снова, что на боковую поверхность не действуют внешние силы.

На этот раз мы пойдем путем, обратным предыдущему: будем исходить не из внешних сил, а положим, что даны деформации и по ним требуется найти силы, производящие эти деформации. Пусть деформация состоит в том, что каждое сечение цилиндра, параллельное плоскости  $xy$ , поворачивается в своей плоскости без какого-либо искажения на угол, который пропорционален расстоянию  $z$  поперечного сечения от плоскости основания. Если  $\omega$  — угол поворота верхнего конечного сечения, то угол поворота какого-нибудь сечения на высоте  $z$  равен  $\frac{\omega \cdot z}{l}$ .

Отсюда однозначно получаются величины компонентов смещения  $u, v, w$ , причем удобнее всего ввести цилиндрические координаты:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad 136b$$

Действительно: согласно вышесказанному, материальная точка  $x, y, z$  имеет после деформации координаты:

$$\begin{aligned} x + u &= \rho \cos \left( \varphi + \frac{\omega z}{l} \right), \\ y + v &= \rho \sin \left( \varphi + \frac{\omega z}{l} \right), \\ z + w &= z. \end{aligned}$$

Следовательно, принимая во внимание, что  $\omega$  бесконечно мало:

$$u = -\frac{\omega y z}{l}, \quad v = \frac{\omega x z}{l}, \quad w = 0. \quad 137$$

п, согласно (60):

$$\begin{aligned} x_x = 0, \quad y_y = 0, \quad z_z = 0, \\ y_z = \frac{\omega x}{l}, \quad z_x = -\frac{\omega y}{l}, \quad x_y = 0. \end{aligned} \quad 138$$

По этим компонентам деформации получаются, согласно (119), компоненты давления:

$$\begin{aligned} X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad Z_z = 0, \\ Y_z = -\frac{\mu\omega x}{l}, \quad Z_x = \frac{\mu\omega y}{l}, \quad X_y = 0. \end{aligned} \quad 139$$

Так как эти выражения тождественно удовлетворяют уравнениям (120) также и внутри тела, то отсюда следует, что допущенная нами деформация представляет собою возможный в природе случай равновесия, которое должно наступить всегда, когда на поверхность цилиндра действуют силы, вычисляемые на основании (121).

Рассмотрим сперва силы давления, которые действуют на боковую поверхность цилиндра и которые, согласно сделанному нами допущению, обращаются в нуль. Так как для боковой поверхности  $\cos(\gamma z) = 0$ , между тем, как  $\cos(\gamma x)$  и  $\cos(\gamma y)$  могут принимать любые значения, то из (121), воспользовавшись (139), можно получить для всех точек боковой поверхности цилиндра:

$$X_y = 0, \quad Y_z = 0, \quad Z_x = \frac{\mu\omega}{l} [y \cos(\gamma x) - x \cos(\gamma y)]. \quad 140$$

Отсюда мы видим, что допущенная нами деформация только в том случае совместима с дальнейшим допущением, что на боковую поверхность цилиндра не действуют внешние силы, когда во всех точках боковой поверхности:

$$y \cos(\gamma x) - x \cos(\gamma y) = 0.$$

Это чисто геометрическое условие. Оно означает, что направление  $x:y$ , т. е. направление какого-нибудь радиуса-вектора, проведенного из какой-либо точки на оси  $z$  под прямым углом к ней, совпадает с направлением  $\cos(\gamma x) : \cos(\gamma y)$ , т. е. с направлением нормали  $\gamma$  в конечной точке радиуса-вектора, или

другими словами, что поперечное сечение есть круг, цилиндр круговой.

Поэтому, если мы хотим сохранить наши допущения, то мы вынуждены ограничиться в дальнейших умозаключениях частным случаем *кругового цилиндра*. При этом предположении, внешнее давление, действующее на элемент конечного сечения цилиндра, равно, на основании (121) и (139), а также того обстоятельства, что здесь

$$\begin{aligned} \cos(\gamma x) = 0, \quad \cos(\gamma y) = 0, \quad \cos(\gamma z) = -1, \\ X_y = -\frac{\mu\omega y}{l}, \quad Y_z = \frac{\mu\omega x}{l}, \quad Z_x = 0, \end{aligned} \quad 141$$

или, согласно (136b),

$$X_y = -\frac{\mu\omega\rho}{l} \sin\varphi, \quad Y_z = \frac{\mu\omega\rho}{l} \cos\varphi, \quad Z_x = 0.$$

Таким образом внешнее давление действует на каждый элемент верхнего свободного сечения цилиндра в плоскости сечения и перпендикулярно к направлению радиуса-вектора  $\rho$  в сторону отсчета угла кручения  $\omega$ , что нетрудно понять. Все силы давления

$$X_y d\sigma, \quad Y_z d\sigma, \quad Z_x d\sigma,$$

которые действуют на элементы поверхности, дают на основании [1 (306)] и так как  $d\sigma = \rho d\rho d\varphi$  результирующую силу:

$$F_x = \int X_y d\sigma = 0, \quad F_y = \int Y_z d\sigma = 0, \quad F_z = \int Z_x d\sigma = 0$$

и результирующую пару сил:

$$\mathfrak{M}_x = \int z Y_z d\sigma = 0, \quad \mathfrak{M}_y = \int z X_y d\sigma = 0, \quad \mathfrak{M}_z = \int (x Y_z - y X_y) d\sigma,$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{\mu\omega}{l} \int \int \rho^3 d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\mu\omega}{l} \cdot r^4 = N, \quad 142$$

где  $r$  обозначает радиус цилиндра.

Отсюда мы делаем обратное заключение: если на верхнее основание кругового цилиндра, нижнее основание которого подвижно, действует пара сил с вращающим моментом  $N$ , лежащая



в плоскости верхнего основания, то цилиндр испытывает кручение рассмотренного вида, причем верхнее основание поворачивается на угол:

$$\omega = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1N}{\mu r^4}. \quad 142a$$

Следовательно, угол кручения пропорционален длине цилиндра и вращающему моменту пары сил и обратно пропорционален четвертой степени радиуса и постоянной материала, которую поэтому называют также „модулем кручения“ вещества.

§ 32. Как же закручивается цилиндр *некругового*, например, эллиптического сечения, если на верхнее основание его действует та же пара сил  $N$ , причем на боковую поверхность не действуют внешние силы? Этим вопросом мы займемся теперь подробнее.

Прежде всего ясно, что в данном более общем случае придется несколько изменить простые допущения относительно деформации, сделанные в начале предыдущего параграфа, согласно которым каждое сечение поворачивается в своей плоскости без какого-либо искажения: ибо эти допущения годятся, как мы видели, только для кругового цилиндра. Какого рода должно быть это изменение, легко найти следующим образом. Хотя простая деформация, изображаемая уравнениями (137), и непригодна для цилиндра с произвольным поперечным сечением, однако она представляет собою возможный в природе случай равновесия, как мы заключили из того, что уравнения (120) удовлетворяются внутри цилиндра. Значит, она необходимо наступает тогда, когда соответствующие внешние силы действуют на поверхность цилиндра. Каковы эти внешние силы, которые должны действовать на боковую поверхность цилиндра, можно найти непосредственно из уравнений (140), подставив в последнее уравнение значение косинусов направления внутренней нормали, обусловленные видом сечения цилиндра. Следовательно, внешняя сила давления на боковую поверхность всегда параллельна оси  $z$ , т. е. она действует вверх или вниз, смотря по тому, положительна или отрицательна величина  $Z_z$ .

Вообще, можно написать:

$$Z_z = \frac{\mu \omega}{l} \cdot r \sin \delta, \quad 143$$

где  $\delta$  обозначает угол между внешней нормалью в какой-нибудь точке боковой поверхности цилиндра и радиусом-вектором  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , лежащем в соответствующем сечении; угол этот

положителен, если внешняя нормаль представляется повернутой вокруг оси  $z$  в положительном направлении относительно радиуса-вектора. Понятно, что для кругового сечения  $\delta = 0$ , но для эллиптического сечения, большая и малая ось которого совпадают с осями  $x$  и  $y$ ,  $\delta$  и вместе с ним  $Z_z$  (при положительном  $\omega$ ) положительны в первом и третьем квадрантах и отрицательны во втором и четвертом квадрантах. Поэтому, если закручивается эллиптический цилиндр, расположенный согласно допущению, то для того чтобы поперечные сечения только поворачивались в своей плоскости, необходимо, чтобы на боковую поверхность действовали внешние сдвигающие силы, направленные в первом и третьем квадрантах вверх, а во втором и четвертом квадрантах вниз. Отсюда непосредственно следует, что в том случае, когда таких внешних сил *не имеется*, соответствующие точки боковой поверхности претерпевают смещение *в обратном* направлении, вследствие чего первоначально плоские сечения загибаются в первом и третьем квадрантах вниз ( $w < 0$ ), а в двух других квадрантах вверх ( $w > 0$ ). Остаются на прежней высоте ( $w = 0$ ), только те точки боковой поверхности, в которых длина радиуса-вектора получает максимальное или минимальное значение при обходе периметра сечения ( $\delta = 0$ ), т. е., для эллипса вершины, а остальные поднимаются или опускаются.

Чтобы получить общие правила о направлении закручивания, независимо от выбора системы координат, положения неподвижного основания, знака  $\omega$  и направления внешнего вращающего момента, действующего на свободное основание цилиндра, полезно остановиться на различии между видами винтовых линий. Если точка движется по винтовой линии, то она совершает одновременно вращение и поступательное движение, попеременно к плоскости вращения. Если винтовая линия такова, что при движении по винту или, что одинаково по существу, при вращении винта в неподвижной гайке, положительная ось вращения (1 § 83) совпадает с направлением поступательного движения, как например, в обыкновенном штопоре, то винтовая линия называется правым винтом, в противоположном случае — левым винтом. При этом условии безразлично, в каком направлении точка пробегает винтовую линию или вращается винт: вместе с направлением вращения изменяется как направление поступательного движения, так и направление положительной оси вращения.

Вернемся теперь к нашему случаю и рассмотрим какое-нибудь волокно цилиндра, которое первоначально было параллельно оси кручения. После деформации оно примет форму

винтовой линии. С другой стороны, точки на периметре первоначально плоского сечения цилиндра образуют после деформации волновую линию. В таком случае существует следующее общее правило; те части этой волновой линии, которые примыкают к минимальным значениям радиуса-вектора  $r$ , образуют отрезки того же рода, как и ранее рассмотренные волокна цилиндра; если последние — правые винты, то и эти части такие же. Для частей волновой линии, соседних с максимальными значениями  $r$ , действительно обратное.

Так, например, в рассмотренном выше примере эллиптического сечения волокна цилиндра образуют, при принятых обозначениях, правые винтовые линии. Поэтому крайняя волновая линия проходит у концов малой оси как правый винт, т. е. поднимается при переходе от первого квадранта ко второму и от третьего к четвертому, совершенно так, как было установлено выше.

Для количественного решения задачи требуется рассмотреть аналитические условия. В согласии с результатами приведенных выше рассуждений, можно следующим образом обобщить выражения (137) компонентов смещения для эллиптического цилиндра с полуосями  $a$  и  $b$ :

$$u = -\frac{\omega yz}{l}, \quad v = \frac{\omega xz}{l}, \quad w = -Cxy, \quad 144$$

где  $C$  обозначает положительную постоянную. Это значение  $w$  выражает найденное выше свойство, что  $w$  отрицательно в первом и третьем квадрантах и положительно во втором и четвертом. Таким образом действительно удовлетворяются как условия (120) для внутренней части цилиндра, так и (121) для боковой поверхности, — первые тождественно, а вторые если положить:

$$C = \frac{\omega}{l} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad 145$$

Итак, мы имеем также полное решение задачи о кручении эллиптического цилиндра. Выражение (142) для внешнего вращающего момента при круговом цилиндре обобщается, согласно (121), следующим образом:

$$N = \frac{\pi \mu \omega}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad 146$$

## Глава третья

### КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 33. В основу излагаемой нами сейчас второй части этой книги мы положили общее допущение, что движение постоянно связано с бесконечно малыми деформациями. Такое движение не может, очевидно, быть односторонним, а должно попеременно совершаться в различных направлениях, т. е. должно происходить „колебание“ тела, при котором смещения и вместе с ними деформации постоянно изменяют свой знак. Таким образом мы имеем здесь дело с колебательными явлениями в упругих твердых телах, которые мы будем считать для простоты изотропными. Основные законы такого движения установлены уже в первой главе. Они формулированы в уравнениях движения (83), которые мы можем написать следующим образом, опустив силы тяготения:

$$\left. \begin{aligned} k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad 147$$

далее, в поверхностных условиях (74) и, наконец, в соотношениях (119) между тензором давления и тензором деформации в изотропном веществе.

Наиболее интересные случаи колебательных явлений подобного рода относятся к таким телам, которые имеют размеры неодинакового порядка величины по всем трем измерениям пространства, а простираются преимущественно по двум или по одному измерению пространства. Это дает, понятно, значительное упрощение законов движения, так как уменьшается число



независимых пространственных координат. Зато, с другой стороны, следует, имея в виду наиболее важные в практике колебательные движения, ввести некоторое обобщение в уравнения, выведенные выше. Прежде, в § 22, мы отсчитывали компоненты смещения  $u, v, w$  и вместе с ними компоненты деформации от того состояния тела, в котором все внешние силы давления равны нулю. Тогда компоненты давления представляют собою однородные функции от компонентов деформации, и в недеформированном состоянии все компоненты давления равны нулю. Но в природе особый интерес имеют часто именно такие колебания, в которых это ограничение не имеет места. Если мы возьмем, например, колебания скрипичной струны, то вполне естественно отсчитывать составляющие деформации от того положения струны, в котором она находится в состоянии устойчивого равновесия. Это — недеформированное состояние. Однако в нем составляющие давления вовсе не равны нулю, а в струне существует определенное и даже довольно сильное натяжение. Это натяжение представляет собою даже настолько существенную причину, определяющую характер колебаний, что даже влияние постоянных упругости  $\lambda, \mu, \nu$ , свойственных материалу струны, практически отступает перед ним на задний план.

Так, например, струна из кишки вовсе не колебалась бы, если бы не была натянута. Поэтому здесь можно в известном смысле говорить об искусственной вынужденной упругости, которая зависит не от материала, а от внешних сил. Чтобы должным образом принять в расчет эти обстоятельства, мы введем следующее обобщение в соотношения (119) между компонентами давления и компонентами деформации: мы будем, как и ранее считать компоненты давления за линейные функции от компонентов деформации, но теперь это будут уже неоднородные функции, и абсолютные члены в этих функциях будут соответствовать временному состоянию устойчивого равновесия тела.

Таким путем мы введем в уравнения движения, как уже было указано в приведенном примере, наряду с постоянными материала еще одну постоянную. В зависимости от того, имеют ли преобладающее влияние постоянные первого рода или последняя постоянная, мы получим совершенно различные колебательные движения: движения с естественной упругостью и движения с искусственной упругостью. Эти различия практически настолько важны, что резко выражаются также и в словоупотреблении. Так, из тел одного измерения „стержни“ колеблются с естественной, а „струны“ — с искусственной упругостью, из тел двух

измерений „пластины“ и „колокола“ колеблются с естественной, а „мембраны“ и „барабаны“ — с искусственной упругостью. В акустике, поскольку речь идет о твердых телах, наиболее важны колебания с искусственной упругостью. Поэтому мы займемся здесь преимущественно последними. В качестве простейшего примера рассмотрим колебания струны, которая натянута настолько сильно, что влияние упругости материала, так называемая жесткость струны, отступает на задний план по сравнению с влиянием натяжения.

§ 34. Сильно натянутая струна. Пусть струна, которая должна иметь форму цилиндра с бесконечно малым сечением, совпадает в состоянии равновесия с осью  $x$ . Тогда каждая точка струны характеризуется определенным значением  $x$ , и движение струны вполне известно, если компоненты смещения  $u, v, w$  определены как функции от  $x$  и  $t$ . Для решения этой задачи мы прежде всего введем необходимое, согласно предыдущему параграфу, обобщение соотношений (119). Состояние равновесия струны одинаково с рассмотренным в § 30 равновесием односторонне натянутого цилиндра, поэтому для него действительны уравнения (128) и (130), где  $F$  обозначает натягивающую силу,  $q$  — площадь поперечного сечения. Следовательно, эти уравнения дают значения компонентов давления для недеформированного состояния струны. Отсюда однозначно следует искомое обобщение уравнений (119) для нашего случая:

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{F}{q} - \lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_x &= -\mu y_x, \\ Y_y &= -\lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x, \\ Z_z &= -\lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y. \end{aligned} \quad 148$$

Предположение, что струна „сильно“ натянута, выражает собою условие, что первый член в выражении для  $X_x$ , зависящий от  $F$ , велик по сравнению с остальными членами. С другой стороны, нельзя принимать  $F$  бесконечно большим: так как  $\sigma$  и  $x_x$  бесконечно малы, то  $X_x$ , и вместе с тем также  $\frac{F}{q}$ , малы по сравнению с величинами  $\lambda$  и  $\mu$ . Таким образом, порядок величины натяжения  $F$  заключен в определенных пределах. Но если вспомнить, что для металлов, например, коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$ , согласно (136а), имеют порядок величины  $10^{12} \left[ \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right]$ , что соответствует давлению в 10 000 кг на 1 мм<sup>2</sup>, то мы увидим все же, что для

величины натяжения остаются еще практически довольно широкие границы.

Теперь установим пограничные условия для боковой поверхности цилиндра струны. Так как вся струна, кроме двух концов, которые мы считаем прочно зажатými, должна свободно колебаться, то на боковую поверхность не действуют внешние силы и мы имеем поэтому, согласно (74),

$$X_x \cos(\gamma x) + X_y \cos(\gamma y) + X_z \cos(\gamma z) = 0, \dots \quad (149)$$

Нормаль  $\gamma$  к боковой поверхности может принимать любое направление, но связана условием, что должна всегда и повсюду составлять прямой угол с той пространственной кривой, которую образует собою струна в какой-либо момент. Эта пространственная кривая образуется точками с координатами  $x + u, v, w$ , поэтому отношения косинусов направления ее (угловые коэффициенты) суть:

$$d(x + u) : dv : dw = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) : \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial x},$$

и поэтому имеет место условие:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cos(\gamma x) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(\gamma y) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\gamma z) = 0.$$

Так как деформации бесконечно малы, то, как легко видеть,  $\cos(\gamma x)$  бесконечно мал по сравнению с двумя другими косинусами, и можно написать проще:

$$\cos(\gamma x) = -\frac{\partial v}{\partial x} \cos(\gamma y) - \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\gamma z).$$

Подставим эти значения в три уравнения (149) и придем во внимание, что отношение  $\cos(\gamma y) : \cos(\gamma z)$  может принимать любое значение. Пренебрегая малыми членами второго порядка, получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X_y &= X_x \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{F}{q} \frac{\partial v}{\partial x} \\ X_z &= X_x \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{F}{q} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

$$Y_y = 0, Z_x = 0, Z_y = 0. \quad (151)$$

Остается еще точно выразить шестой компонент давления с точностью до членов второго порядка. Это можно сделать при помощи уравнений (148), которые дают сперва в связи с (151):

$$y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu} \sigma;$$

отсюда, на основании (118):

$$\sigma = \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_x,$$

и, наконец, согласно первому из уравнений (148) и (135)

$$X_x = -\frac{F}{q} - E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (152)$$

Теперь мы получим искомые уравнения движения из уравнений (147), подставив значения компонентов давления (150), (151), (152),

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (153a)$$

$$k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{F}{q} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (153b)$$

$$k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{F}{q} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (153c)$$

Таким образом каждый из компонентов смещения  $u, v, w$  следует своему особому закону, независимо от двух других, причем вид этих законов одинаков для всех трех компонентов. Однако величина характеристической постоянной, входящей в уравнения, не всюду одинакова: для  $u$  имеется другая величина, чем для  $v$  и  $w$ . Это зависит, конечно, от того, что направление  $u$  совпадает с направлением струны, а направления  $v$  и  $w$  перпендикулярны к ней. Поэтому колебания  $u$  называются „продольными колебаниями“ струны, а  $v$  и  $w$  — колебания, наоборот, поперечными колебаниями. Как мы видим, продольные колебания зависят только от упругости вещества струны, и в частности от линейного модуля упругости и не зависят от натяжения, а для поперечных колебаний действительно обратное.

Для дальнейшего исследования законов колебания достаточно рассмотреть один только компонент. Так как в акустике



поперечные колебания играют значительно большую роль, то мы ограничимся в дальнейших рассуждениях уравнением (153b), которое представляет плоские поперечные колебания в плоскости  $xy$ . Введи постоянную

$$a^2 = \frac{F}{kq}, \quad (154)$$

можно написать это уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (155)$$

Интегрирование последнего уравнения дает  $v$  в виде функции двух независимых переменных  $x$  и  $t$ . Если положить, что  $x$  постоянно, а  $t$  изменяется, то мы получим движение определенной точки струны. Если же положить, что  $t$  постоянно, а  $x$  изменяется, то мы получим форму кривой, которую образует струна в определенный момент. Соответственным образом  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  представляет ускорение какой-нибудь точки струны,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  — кривизну кривой струны, а уравнение (155) выражает такое правило: ускорение какой-либо точки струны, а, следовательно, и сила, действующая на нее, пропорциональна кривизне кривой, которую образует струна, в данной точке.

**§ 35. Интегрирование уравнения движения.** Чтобы найти общий интеграл дифференциального уравнения с частными производными (155), введем вместо независимых переменных  $x$  и  $t$  новые независимые переменные:

$$\xi = x + at; \quad \eta = x - at. \quad (156)$$

Тогда преобразование производных выражается следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_\eta \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_\xi \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot a - \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot a.$$

Отсюда, повторив то же действие, получим:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_x = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},$$

и совершенно аналогичным образом:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_t = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Если в уравнении (155) заменить производные по независимым переменным  $x$  и  $t$  производными по независимым переменным  $\xi$  и  $\eta$ , то получится:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Это уравнение выражает, что  $\frac{\partial v}{\partial \xi}$  зависит только от  $\xi$ , и  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  зависит только от  $\eta$ . Поэтому:

$$v = f(\xi) + g(\eta),$$

где  $f$  и  $g$  суть какие-то две функции, каждая из которых зависит только от одной переменной.

На основании (156), имеем:

$$v = f(x + at) + g(x - at). \quad (157)$$

Это и есть общий интеграл дифференциального уравнения (155). Действительно, непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что уравнение удовлетворяется выражением (157), каковы бы ни были функции  $f$  и  $g$ .

При этом нужно иметь в виду следующее обстоятельство.

Ограничение, которое налагается равенством (157) на значения  $v$ , и благодаря которому  $v$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (155), основано на том, что независимые переменные  $x$  и  $t$  входят в функцию  $f$  только в соединении  $x + at$ , а в функцию  $g$  только в соединении  $x - at$ . Эти выражения называются «аргументами» функций  $f$  и  $g$ . Каждая из этих двух функций зависит только от своего особого аргумента. Поэтому, если дифференцировать функцию по  $x$  или по  $t$ , то можно сперва дифференцировать по аргументу, а потом дифференцировать аргумент по соответствующей переменной. Таким образом, из (157) получается:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f' + g', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = f'a - g'a, \quad (157a)$$

где  $f'$  и  $g'$  обозначают производные  $f$  и  $g$  по их аргументам. Продолжение операции дает:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f'' + g'', \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f'' \cdot a^2 + g'' \cdot a^2.$$

Эти значения действительно удовлетворяют уравнению (155) в самом общем виде.

Частный вид функций  $f$  или  $g$  никак нельзя получить из дифференциального уравнения. Его можно найти только по начальным и пограничным условиям колеблющейся струны. Однако, прежде чем перейти к рассмотрению этих условий, исследуем в общем виде тот особенный физический характер, который накладывается на движение струны выражением (157) для смещения  $v$ .

Возьмем сначала частный случай, когда одна из двух функций, например  $g$ , обращается в нуль, так, что

$$v = f(x + at). \quad (158)$$

Тогда мы имеем движение струны, для которого характерно то обстоятельство, что смещение  $v$  не изменяется при таком изменении  $x$  и  $t$ , когда  $x + at$  остается постоянным, т. е. когда

$$dx + a dt = 0;$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -a.$$

Но последнее уравнение обозначает движение со скоростью  $a$  в направлении отрицательной оси. Отсюда следует, что если передвигаться глазом или указателем вдоль струны в направлении отрицательной оси  $x$  со скоростью  $a$ , то та точка струны, на которую попадают при этом, всегда имеет в данный момент определенное смещение  $v$ . Это можно выразить еще таким образом: каждое смещение  $v$  распространяется неизменным со скоростью  $a$  в направлении отрицательной оси  $x$ . Поэтому форма кривой, которую образует струна в каждый момент, остается одинаковой, кривая только постоянно смещается, как целое, указанным образом. Такое движение называется „волновым движением“, скорость смещения называется „скоростью распространения“ волны. Скорость распространения нужно отличать по существу от

корпускулярной скорости точек струны, которая не имеет с ней ничего общего (ср. I, § 1). Вид волны определяется функцией  $f$ , он может быть произвольным, и в частности не обязательно должен быть периодическим. Можно получить простой и очень наглядный образ движения, если начертить на полоске бумаги функцию  $f$  в виде кривой с абсциссой  $\xi$  и ординатой  $f$ , а затем передвигать эту полоску вдоль струны со скоростью  $-a$ . Тогда чертеж дает непосредственное изображение струны в каждый момент. При  $t=0$  аргумент  $\xi = x + at$  непосредственно совпадает с абсциссой  $x$  точки струны.

Соответственным образом частное решение

$$v = g(x - at) \quad (159)$$

обозначает также волновое движение с той же скоростью  $a$ , но распространяющееся в сторону положительной оси  $x$ . Поэтому общий случай колебания (157) представляет собою наложение друг на друга двух волн, распространяющихся с одинаковой скоростью  $a$  в противоположных направлениях. Если начертить каждую из двух волн в виде кривой на полоске бумаги и передвигать эти полоски вдоль струны со скоростями  $\pm a$ , то алгебраическая сумма двух ординат даст смещение  $v$  соответствующей точки струны в данный момент.

Теперь исследуем, как определяется вид обеих волн  $f$  и  $g$  на основании начальных и конечных условий колебательного процесса. Для этого рассмотрим сперва идеальный случай бесконечно длинной струны.

**§ 36.** Струна, неограниченная с двух сторон. Если струна простирается от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$ , то для полного определения движения достаточно рассмотреть только начальное состояние и можно обойтись без предельных условий.

Положим, что даны смещения и скорости всех точек струны в момент  $t=0$ , т. е.

$$v_0 = F(x) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = \Phi(x), \quad (160)$$

где  $F$  и  $\Phi$  обозначают две функции, известные при всех положительных и отрицательных значениях  $x$ . Подставив в (157) и (157a), получим:

$$f(x) + g(x) = F(x),$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a} \Phi(x).$$



Проинтегрировав последнее уравнение, имеем:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_c^x \Phi(x) dx.$$

Следовательно

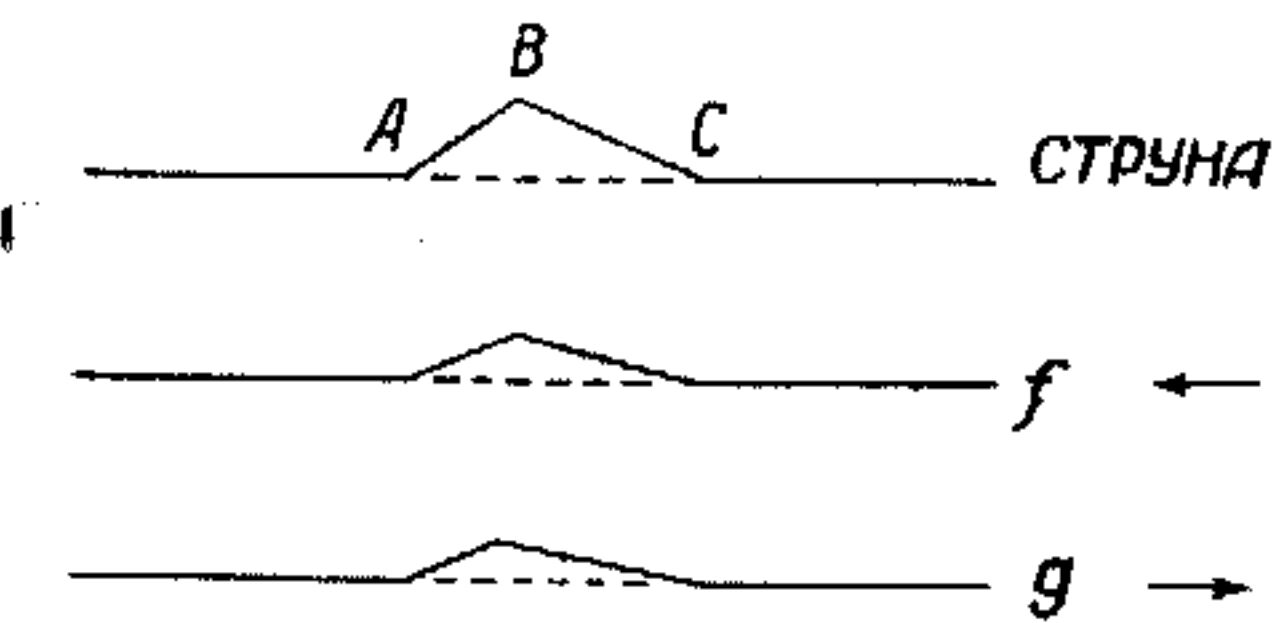
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2a} \int_c^x \Phi(x) dx, \\ g(x) &= \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2a} \int_c^x \Phi(x) dx. \end{aligned} \right\} 161$$

Эти выражения для  $f$  и  $g$  полностью определяют вид обеих волн и, значит, все движение. Нужно только подставить в функцию  $f$  вместо  $x$  аргумент  $x + at$  и в функцию  $g$  аргумент  $x - at$ . Неопределенность, заключающаяся в произвольном выборе постоянной интегрирования  $c$ , только кажущаяся, так как в выражение (157) для  $v$  функции  $f$  и  $g$  входят только в виде суммы, при изменении  $c$  обе функции изменяются на одинаковую величину в противоположных направлениях. Поэтому можно, не нарушая общности, положить  $c = 0$ .

Рассмотрим в виде примеров несколько частных случаев. Сначала рассмотрим такой случай, когда все начальные скорости равны нулю, как бывает, если дернуть струну, т. е. вывести ее из состояния равновесия и затем отпустить. В этом случае  $\Phi(x) = 0$ , поэтому, согласно (161),

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{2} F(x). \quad 162$$

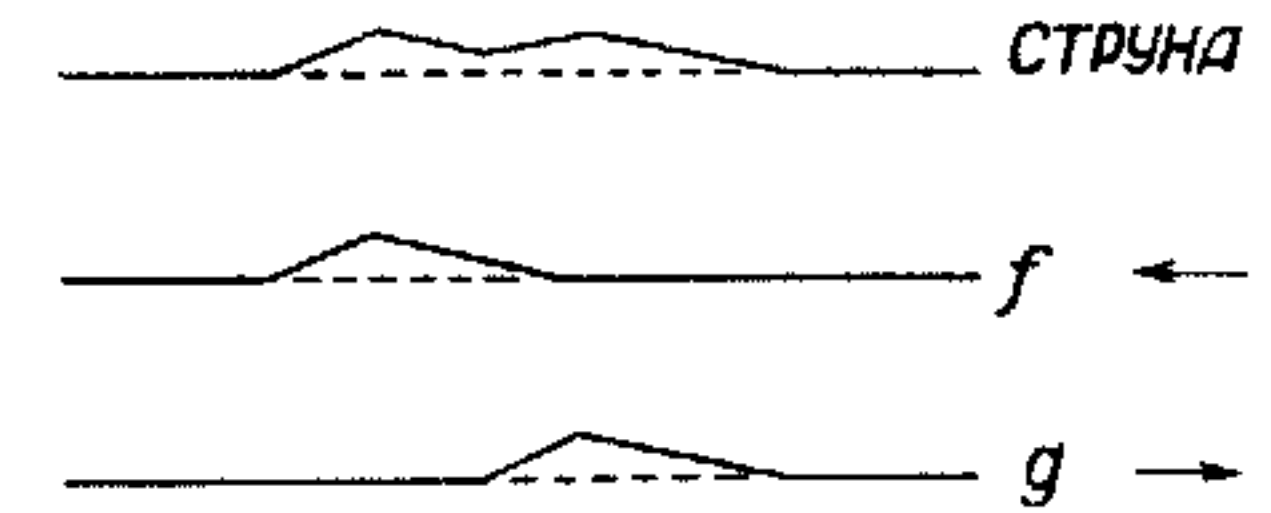
Следовательно, в этом случае обе волны равны между собой, и каждая из волновых функций равна половине величины начального смещения. Отсюда непосредственно получается весь процесс движения. На



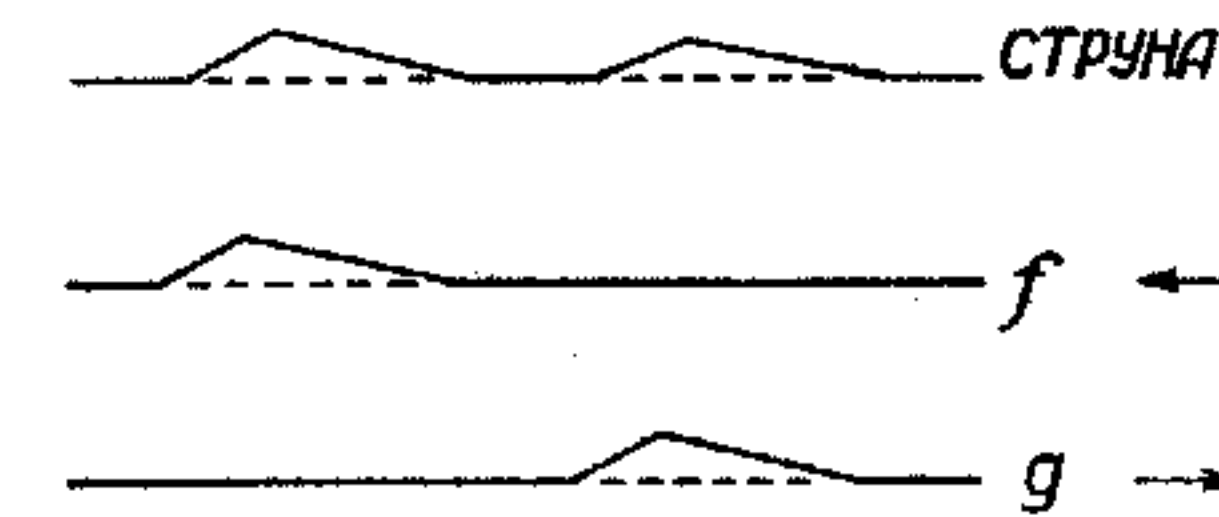
Черт. 5.

черт. 5 верхняя линия изображает вид струны в начальном состоянии. Нарушение равновесия ограничено здесь определенным участком струны. Оно может быть вызвано тем, что струна отдернута стерженьком в точке B и в то же время удерживается в точках A и C по обе стороны B

Если теперь отпустить струну без начальной скорости, то колебание ее совершается описанным выше образом: начерченные внизу изображения равных друг другу волновых функций  $f$  и  $g$  движутся в направлении стрелок вдоль струны со скоростью  $a$ , причем ординаты, лежащие друг над другом в каждый момент складываются. Таким образом первоначальное выпучивание струны разбивается на два одинаковых вдвое меньших выпучивания, которые раздвигаются в обе стороны со скоростями  $\pm a$ , между тем, как посредине снова наступает покой. Это изображено на чертежах 5а и 5б: верхняя линия дает изображение струны по истечении некоторого времени, а две нижние линии показывают способ построения изображения. Периодичности в этом явлении не имеется вовсе.



Черт. 5а.



Черт. 5б.

Аналогичным образом исследуется противоположный случай, когда все начальные смещения равны нулю, как бывает, если ударить молотком длинную фортепианную струну настолько быстро, чтобы удар был закончен раньше, чем подвергнувшиеся удару точки струны успели бы заметно оставить положение равновесия. Тогда, согласно (160),

$$F(x) = 0$$

и, согласно (161),

$$f(x) = -g(x) = \frac{1}{2a} \int_c^x \Phi(x) dx. \quad 163$$

Таким образом и в этом случае обе волновые функции равны друг другу, но противоположного знака. Дальнейшее исследование, производимое совершенно так же, как и в предыдущем случае, показывает, что от места удара удаляются в обе стороны две противоположные равные волны, между тем как посредине струна снова возвращается в неподвижное состояние.

Но не следует думать, что при *всяком* нарушении равновесия струны идут две волны в обе стороны. Чтобы убедиться в этом, поставим такой вопрос: какое условие должно быть выполнено в начальном состоянии, чтобы от места нарушения распространилась одна волна, например, волна  $f$ . Ответ на этот вопрос дают уравнения (161), если положить в них  $g=0$ , именно:

$$F(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \Phi(x) dx;$$

или

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{a} \Phi(x),$$

или, на основании (160),

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_0. \quad 164$$

т. е. в начальном состоянии скорость какой-нибудь точки струны равна тангенсу угла наклона струны к оси  $x$ , умноженному на  $a$ .

Если выполнено это соотношение между скоростью и смещением каждой точки струны, то все возмущение передвигается в виде одной неизменяемой волны в отрицательном направлении  $x$ . В этом можно убедиться также при помощи простого кинематического рассуждения, так как скорость каждой точки кривой непосредственно определяется видом кривой  $f$  и скоростью распространения  $a$ .

**§ 37.** Струна, ограниченная с двух сторон. Рассмотрим теперь колебания струны конечной длины  $l$ . Пусть струна закреплена в точках  $x=0$  и  $x=l$ . Для нее, конечно, также действительны уравнения (161), но эти уравнения имеют смысл только для тех значений  $x$ , которые находятся между 0 и  $l$ , так как функции  $F(x)$  и  $\Phi(x)$ , которые представляют начальные значения смещений и скоростей для точек струны, определены только для  $0 < x < l$ . Однако, для того, чтобы представить движение для *всех* значений времени, нужно, на основании (157), знать значения  $f$  и  $g$  также и для других значений их аргументов; например, при больших положительных значениях  $t$  нужны значения  $f$  при больших положительных значениях аргумента значения, а  $g$  — при больших отрицательных значениях аргумента. Поэтому мы должны еще дополнить то определение  $f$  и  $g$ , которое дается

уравнениями (161). Для этого служит условие  $v=0$  в пограничных точках  $x=0$  и  $x=l$ , или, согласно (157),

$$0 = f(at) + g(-at)$$

и

$$0 = f(l+at) + g(l-at).$$

Эти условия действительны при любых значениях  $t$ . Если написать в них  $x$  вместо  $at$ , то получится:

$$f(x) + g(-x) = 0, \quad 165$$

$$f(l+x) + g(l-x) = 0. \quad 166$$

Эти два уравнения, имеющие место при *всех* значениях  $x$  дают дополнительные условия, необходимые для вычисления волновых функций  $f$  и  $g$ . Действительно, если подставить в (166)  $(l+x)$  вместо  $x$ , то получится:

$$f(2l+x) + g(-x) = 0.$$

Из сравнения с (165) имеем:

$$\left. \begin{aligned} f(2l+x) &= f(x). \\ g(2l+x) &= g(x). \end{aligned} \right\} \text{Подобным образом} \quad 167$$

Это значит, что волновые функции  $f$  и  $g$  обе *периодичны* относительно  $x$  с периодом  $2l$ . Отсюда непосредственно следует на основании (157), что движение струны также периодически относительно времени  $t$  с периодом  $\frac{2l}{a}$ .

Теперь установим, как на самом деле определить значения волновых функций  $f$  и  $g$  при всех положительных и отрицательных значениях аргументов, на основании начальных условий (161) и предельных условий (165) и (167).

Прежде всего,  $f$  и  $g$  определены для  $0 < x < l$  на основании (161). Далее, уравнения (165) в виде

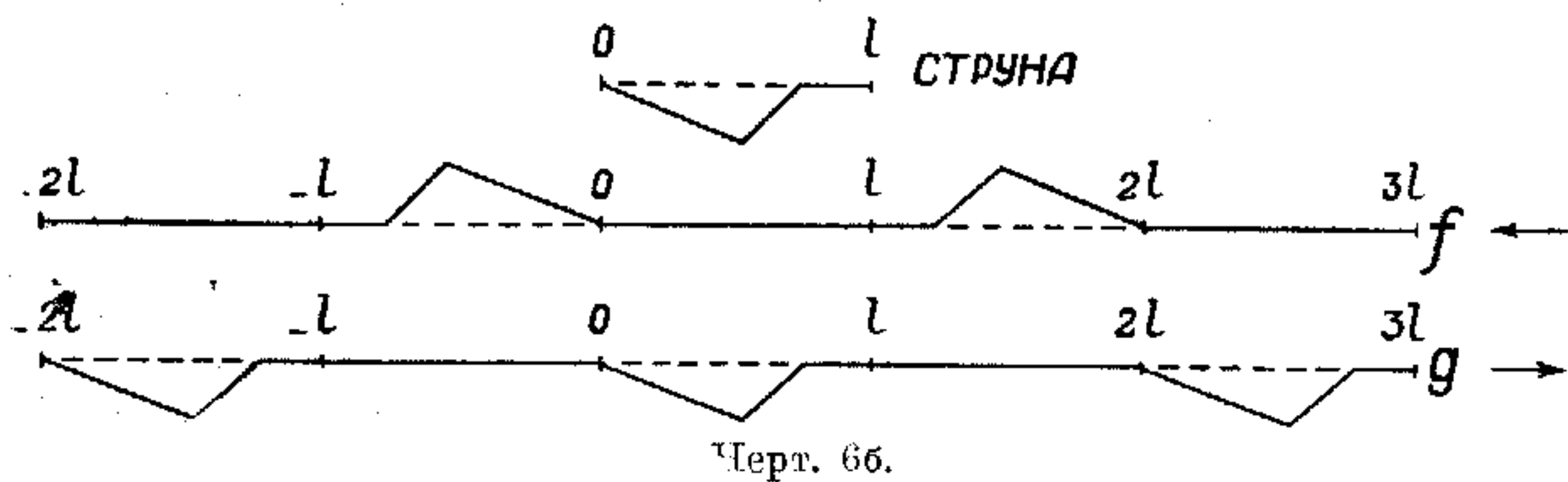
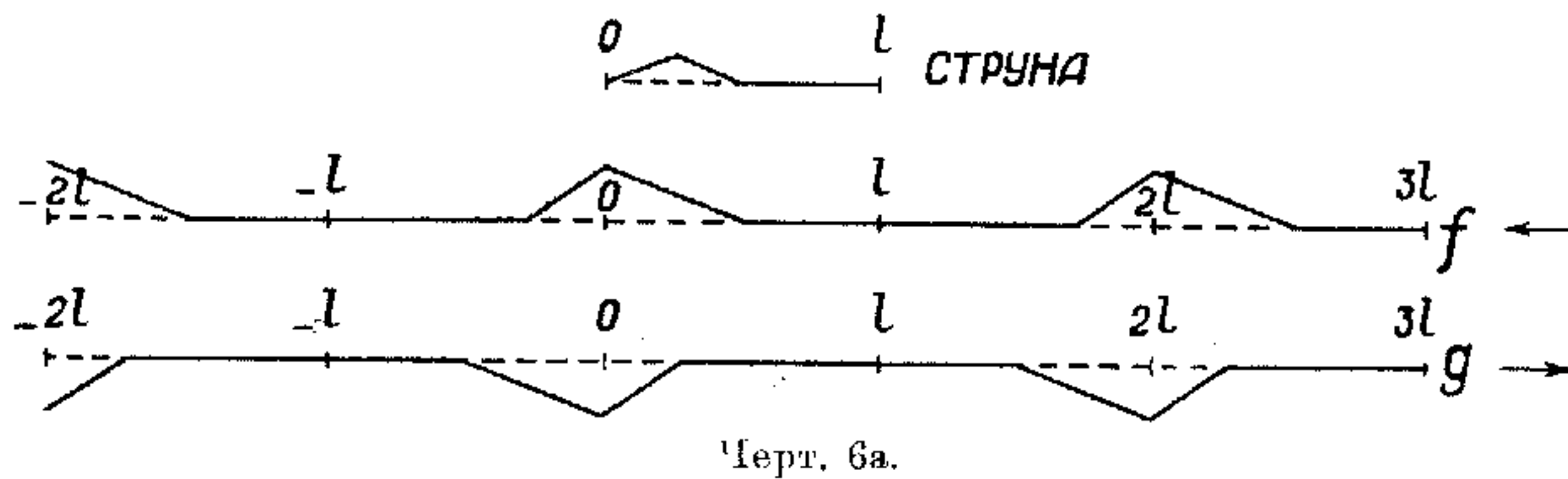
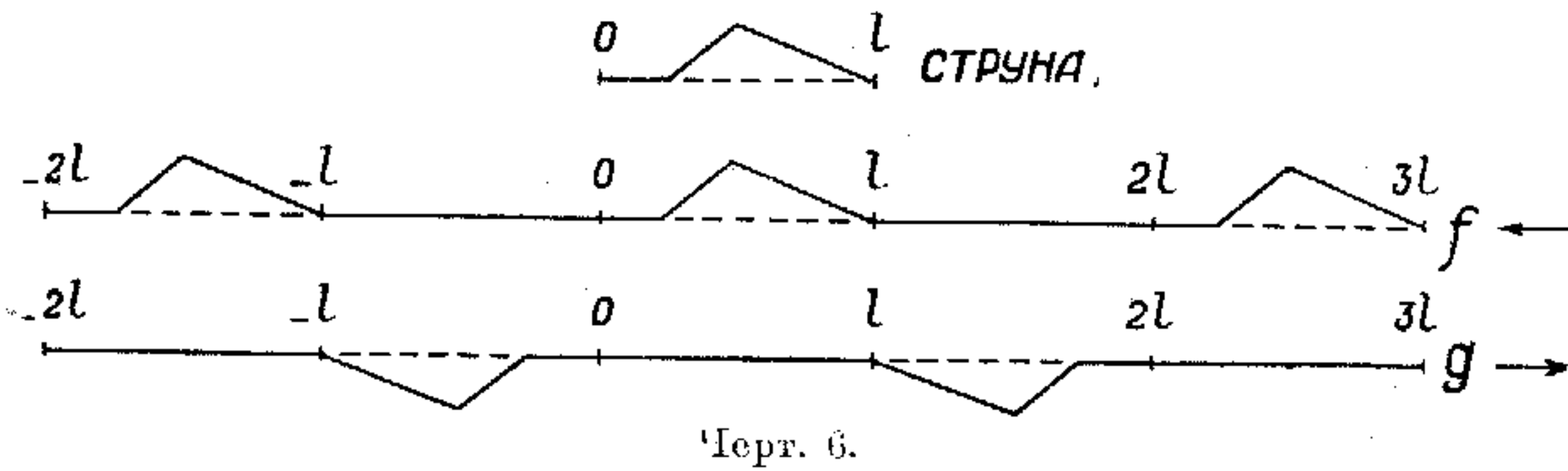
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -g(-x), \\ g(x) &= -f(-x) \end{aligned} \right\} \quad 168$$

дают также значения  $f(x)$  и  $g(x)$  при  $-l < x < 0$ , так как правые части двух уравнений известны для данной области значений  $x$ .



Но тогда  $f(x)$  и  $g(x)$  даны в пределах целого периода, от  $x = -l$  до  $x = +l$ , и таким образом полностью определены по (167).

Этот метод вычисления проведем на одном частном примере. Для этого выберем, ради простоты, колебания струны, на которой в начале есть только одна волна, например волна  $f$ . Значит, в начальном состоянии действительно соотношение (164). Пусть первоначальное состояние струны изображено на черт. 5. Тогда



волновая функция  $f(x)$  при  $0 < x < l$  будет представлена тем же изображением, причем  $g(x)$  равно нулю в этом промежутке. Напротив, при  $-l < x < 0$ , согласно (168),  $f(x)$  повсюду 0, между тем, как  $g(x)$  имеет нарисованную на чертеже форму, которую можно назвать „противоположным зеркальным изображением“  $f(x)$  относительно точки  $x=0$ . Эти формы повторяются периодически, как показано на черт. 6.

Начертив волновые функции  $f$  и  $g$ , мы можем уже определить известным способом весь процесс движения. На чертежах 6а и 6б в верхней линии представлено результирующее изображение струны по истечении некоторого времени, а на двух нижних линиях представлен способ, по которому это изображение составлено из  $f$  и  $g$ .

Отсюда вытекает, что волна  $f$ , попадая на закрепленную точку струны  $x=0$ , превращается в волну  $g$ , движущуюся в противоположном направлении, т. е. „отражается“ и при этом меняет знак. Затем волна  $g$  пробегает всю длину струны и отражается на другом конце,  $x=l$ , в виде волны  $f$ .

По истечении периода времени  $\frac{2l}{a}$  снова достигается первоначальное состояние, и все начинается снова.

Таким же образом решается общий случай, когда в начале обе волны,  $f$  и  $g$ , отличны от нуля.

**§ 38.** Аналитическое изображение периодических функций. До сих пор мы изображали периодические волновые функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в различных интервалах  $x$  при помощи различных уравнений. Но часто бывает важно обозначить волновую функцию  $f(x)$  на всем ее протяжении, от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$  при помощи одного только аналитического выражения.

Чтобы достигнуть этого, отыщем сперва наиболее общее аналитическое выражение функции  $f(x)$  с периодом  $x=2l$ , или, другими словами, общее решение функционального уравнения (167). Возьмем частное решение

$$f(x) = e^{ax}, \quad 169$$

которое, очевидно, удовлетворяет уравнению, если постоянная  $a$  удовлетворяет условию:

$$e^{2la} = 1.$$

Отсюда следует:

$$2la = 2n\pi i,$$

где  $n$  обозначает произвольное положительное или отрицательное целое число. Если подставить получающееся отсюда значение  $a$  в (169) и отделить вещественную от мнимой часть  $f(x)$ , то мы получим два частных решения:

$$\cos \frac{n\pi x}{l} \quad \text{и} \quad \sin \frac{n\pi x}{l},$$

которые можно еще обобщить, если умножить их на произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$ . Если составить такие решения для всевозможных значений  $n$ , причем для каждого  $n$  постоянные  $A_n$  и  $B_n$  могут иметь различные значения, и сложить их между собою, то мы также получим решение функционального уравнения (167). Это решение — *общее* (на доказательстве последнего утверждения мы не будем здесь останавливаться). Полученное решение можно записать в таком виде:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad 170$$

Здесь члены с отрицательными  $n$  опущены. Нетрудно видеть, что это не нарушает общности, так как каждый член с отрицательным  $n$  можно соединить в один с членом, содержащим положительное  $n$ . Поэтому каждый член в обеих суммах представляет в сущности два члена. Особое положение занимает член с  $n=0$ , который встречается только один раз и поэтому обычно содержит численный множитель  $1/2$ . Введение последнего оправдывается также, как мы покажем ниже, тем, что постоянная  $A_0$  получает в этом случае простое значение.

Ряд (170), который называется по имени автора „рядом Фурье“, действительно имеет период  $2l$  относительно  $x$ . В этом можно, конечно, непосредственно убедиться, если подставить  $x+2l$  вместо  $x$ , так как все углы увеличиваются на целые кратные  $2\pi$ . Но посредством ряда (170) можно представить *любую* функцию с периодом  $2l$  относительно  $x$ . Поэтому возникает вопрос, как вычислить коэффициенты  $A$  и  $B$ , если каким-либо образом задано течение функции внутри одного периода, например от  $x=0$  до  $x=2l$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, положим, что нам совершенно произвольно даны значения  $f(x)$  для  $0 < x < 2l$ . Вычислим сперва интеграл:

$$\int_0^{2l} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad 171$$

при каком-либо положительном отличном от нуля целом числе  $n$ . Допустим, что этот интеграл имеет известное вполне определенное значение.

С другой стороны, интеграл (171), если заменить в нем  $f(x)$  рядом (170), представится в виде суммы интегралов. Вычислим

каждый из них в отдельности. Первый интеграл, умноженный на  $A_0$ , обратится в нуль, так как

$$\frac{A_0}{2} \int_0^{2l} \frac{\cos n\pi x}{l} dx = 0. \quad 172$$

В следующие интегралы входят по порядку числа  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , которые вообще отличны от числа  $n$  в (171). Обозначим их поэтому через  $n'$ . Если  $n'$  не равно  $n$ , то соответствующие два отдельных интеграла выражаются в виде

$$A_{n'} \int_0^{2l} \cos \frac{n'\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + B_{n'} \int_0^{2l} \sin \frac{n'\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0. \quad 173$$

Только для двух членов, в которых  $n'=n$ , два соответствующих интеграла дают:

$$A_n \int_0^{2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx + B_n \int_0^{2l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = A_n l. \quad 174$$

Поэтому вся сумма интегралов, на которые распадается (171), сводится к одному выражению (174), и мы имеем соотношение:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned} \right\} \quad 175$$

Таким образом коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  полностью определены. Наконец, чтобы получить  $A_0$ , вычислим из (170):

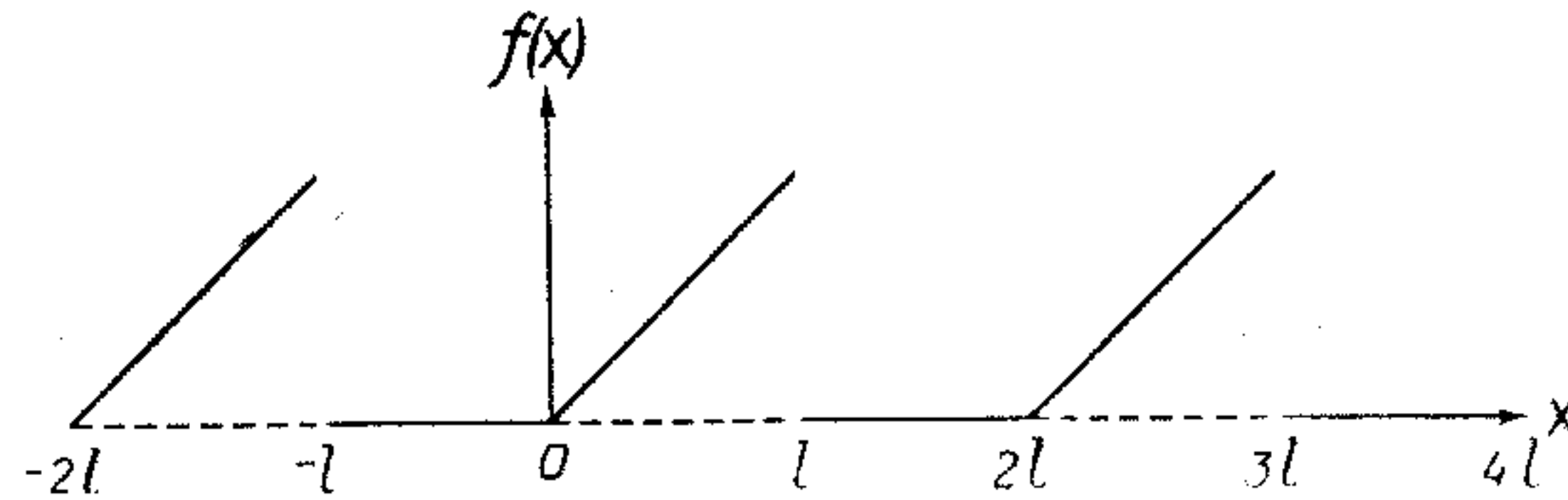
$$\int_0^{2l} f(x) dx = \frac{A_0}{2} \cdot 2l = A_0 l.$$

Отсюда мы видим, что уравнения (175) применимы также для случая  $n=0$ . В этом состоит преимущество обозначения постоянного члена через  $\frac{A_0}{2}$ . Значение  $B_0$  безразлично, так как  $\sin \frac{n\pi x}{l}$  обращается в нуль при  $n=0$ .



Из способа вычисления постоянных  $A_n$  и  $B_n$  видно, что это определение *однозначно*, т. е. существует только один ряд *Фурье* с периодом  $2l$ , который принимает определенные заданные значения внутри периода. Действительно, если бы существовал еще другой ряд с коэффициентами  $A_n'$  и  $B_n'$ , то эти коэффициенты также обязательно должны были бы удовлетворять уравнениям (175), а так как выражения в правых частях уравнений имеют заданные значения, то эти коэффициенты должны совпадать с коэффициентами  $A_n$  и  $B_n$ .

Чтобы еще лучше иллюстрировать значение ряда *Фурье*, произведем вычисление для частного примера. Допустим, что при  $0 < x < l$ ,  $f(x) = x$ , а при  $l < x < 2l$ ;  $f(x) = 0$ . Ход этой функции изображает кривая на черт. 7. В интервалах от  $-l$  до 0, от  $l$  до  $2l$ , и т. д., она совпадает с осью абсцисс, а в промежуточных интервалах представляет отрезок прямой, равноделящей координатный угол. Поэтому функция  $f(x)$  прерывна при  $x$  равном  $-l$ ,  $l$ ,  $3l \dots$  изменяясь скачком от  $l$  до 0. Совершенно такие же свой-



Черт. 7.

ства имеет ряд *Фурье*, который получается из (175), и который мы сейчас составим. Оба входящие в него интеграла разлагаются каждый на два отдельных интеграла, из которых первый берется от 0 до  $l$ , а второй от  $l$  до  $2l$ . В первом интеграле  $f(x) = x$ , а во втором  $f(x) = 0$ . Поэтому

$$A_n = \frac{1}{l} \int_0^l x \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx + 0 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \cdot l,$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \cdot l,$$

а при  $n = 0$  получается:

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \frac{l}{2}.$$

При этих значениях коэффициентов ряд (170) примет вид:

$$f'(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{2l}{9\pi^2} \cos \frac{3\pi x}{l} - \frac{2l}{25\pi^2} \cos \frac{5\pi x}{l} - \dots \\ + \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{l}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{l} - \dots, \quad 176$$

который охватывает ход кривой на черт. 7 в единственном аналитическом выражении.

Сделаем еще несколько проверок. При  $x = 0$ ,  $f(x) = 0$ , поэтому согласно (176)

$$0 = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} - \frac{2l}{9\pi^2} - \frac{2l}{25\pi^2} - \dots,$$

или

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \quad 177$$

При  $x = \frac{l}{2}$ ,  $f(x) = x = \frac{l}{2}$ . Поэтому, согласно (176),

$$\frac{l}{2} = \frac{l}{4} + \frac{l}{\pi} - \frac{l}{3\pi} + \frac{l}{5\pi} - \frac{l}{7\pi} + \dots,$$

или

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad 178$$

При  $x = -\frac{l}{2}$ ,  $f(x) = 0$ . Поэтому, согласно (176),

$$0 = \frac{l}{4} - \frac{l}{\pi} + \frac{l}{3\pi} - \frac{l}{5\pi} + \frac{l}{7\pi} - \dots,$$

что также приводит к последнему ряду.

Интересно свойство ряда *Фурье* при разрыве непрерывности, например, при  $x = l$ . В то время, как значение ряда  $= x$  или  $= 0$ , смотря по тому, приближается ли  $x$  к значению  $x = l$  от меньших или от больших значений, при самом  $x = l$ ,  $f(x)$  не равно ни  $l$  ни 0, но, как дает подстановка в (176),

$$f(l) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2} + \frac{2l}{9\pi^2} + \frac{2l}{25\pi^2} + \dots,$$

или согласно (177),

$$f(l) = \frac{l}{2},$$

т. е. равно среднему арифметическому из обоих значений. Это положение можно обобщить, но здесь нам незачем на нем останавливаться.

§ 39. Если в частном случае  $f(x)$  „четная“ функция, т. е. если  $f(-x) = f(x)$ , то из (175) следует, что интегрирование от 0 до  $2l$  можно просто заменить интегрированием от  $-l$  до  $+l$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

и для первого из этих интегралов, введя переменную  $x' = -x$ :

$$-\frac{1}{l} \int_l^0 f(-x') \cos \frac{n\pi x'}{l} dx' = \frac{1}{l} \int_0^l f(x') \cos \frac{n\pi x'}{l} dx'.$$

Оба интеграла равны друг другу, и

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \quad 179$$

Соответствующим образом получается  $B_n = 0$ , так как оба отдельных интеграла равны и противоположного знака.

Поэтому разложение четной функции в ряд Фурье с периодом  $2l$  имеет более простой вид:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad 180$$

где коэффициенты  $A$  определяются однозначно по (179) на основании хода функции внутри половины периода, от 0 до  $l$ . Действительно, каждый член ряда, а также постоянная  $A_0$ , есть четная функция  $x$ .

Если же  $f(x)$  „нечетная“ функция, т. е. если  $f(-x) = -f(x)$ , то таким же образом получится:  $A_n = 0$ , и

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad 181$$

так что ряд Фурье принимает вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad 182$$

Здесь коэффициенты ряда также однозначно определяются по (181) на основании хода функции внутри половины периода.

§ 40. Возвратимся к задаче о колебаниях струны длиной  $l$ . Воспользуемся методом, разработанным в последнем параграфе, для того чтобы привести решение задачи, т. е. выражение для смещения  $v$  как функции  $x$  и  $t$  к одному виду, пригодному для всех  $x$  и  $t$ . Согласно (157),

$$v = f(x + at) + g(x - at).$$

Здесь можно в общем случае свести функцию  $g$  к функции  $f$  при помощи пограничных условий (165), если подставить в них  $at - x$  вместо  $x$ :

$$f(at - x) + g(x - at) = 0.$$

Таким образом,

$$v = f(x + at) - f(at - x).$$

Но, согласно (167),  $f(x)$  периодична с периодом  $2l$ . Поэтому для  $f(x + at)$  и  $f(at - x)$  имеют место уравнения, которые получатся, если в обе части (170) подставить один раз  $at + x$ , а другой раз  $at - x$ , или:

$$\begin{aligned} v &= \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos \frac{n\pi}{l} (at + x) + \sum B_n \sin \frac{n\pi}{l} (at + x) \\ &- \frac{A_0}{2} - \sum A_n \cos \frac{n\pi}{l} (at - x) - \sum B_n \sin \frac{n\pi}{l} (at - x). \end{aligned} \quad 183$$

Суммирование нужно производить всякий раз от  $n=1$  до  $n=\infty$ .

Мы получили общее выражение для поперечных колебаний струны длины  $l$ . Его можно привести к различным более простым формам, каждая из которых обладает особыми преимуществами.

Если подставить

$$A_n = C_n \cos \vartheta_n, \quad B_n = -C_n \sin \vartheta_n, \quad 184$$



полагая, что  $C_n$  положительно, а  $\vartheta_n$  заключается между 0 и  $2\pi$ , то можно написать:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \frac{n\pi}{l} (at + x) + \vartheta_n \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \frac{n\pi}{l} (at - x) + \vartheta_n \right\}. \quad 185$$

Таким образом наиболее общее колебание струны состоит из попарно равных противоположных чисто периодических волн, пробегających в обе стороны, так называемых „парциальных волн“, каждая из которых имеет период

$$\frac{2l}{n} = \lambda_n \quad 186$$

относительно  $x$  и период

$$\frac{2l}{na} = \tau_n \quad 187$$

относительно  $t$ . Пространственный период называется „длиной волны“, а временной период  $\tau_n$  называется „периодом колебания“ соответствующей волны. Наибольшая длина волны (при  $n=1$ ) равна  $2l$ , т. е. удвоенной длине струны, ей соответствует наибольший период колебания  $\frac{2l}{a}$ . Это колебание называется „основным колебанием“ струны. Остальные длины волн и периоды колебаний суть  $n$ -ые доли соответствующих величин основного колебания.

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\frac{1}{\tau_n} = \nu_n = \frac{na}{2l} \quad 188$$

обозначает число колебаний в единицу времени и поэтому называется „числом колебаний“ соответствующей волны. Длина волны, период колебаний и число колебаний связаны между собою, на основании последних трех уравнений, следующей зависимостью:

$$\lambda_n \nu_n = a. \quad 189$$

Если ввести длины волн и числа колебаний, то уравнение (185) примет вид:

$$v = \left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \left( \frac{t}{\tau_n} + \frac{x}{\lambda_n} \right) 2\pi + \vartheta_n \right\} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left\{ \left( \frac{t}{\tau_n} - \frac{x}{\lambda_n} \right) 2\pi + \vartheta_n \right\}. \end{aligned} \right\} \quad 190$$

Весь угол, заключенный в фигурные скобки, называется „фазой“ соответствующей волны (1 § 12), а постоянная  $\vartheta_n$  называется „фазовой постоянной“.

Выражение для  $v$  значительно упрощается, если в (183) или в (190) соединить в один член два члена с одинаковым порядковым числом  $n$ . Тогда из (183) следует:

$$v = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \sin \frac{n\pi at}{l} - B_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad 191$$

Этот вид уравнения колебания наиболее удобен для вычисления коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  по начальному состоянию струны. Именно, при  $t=0$ , на основании (160) и (191):

$$\left. \begin{aligned} v_0 = F(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_0 = \Phi(x) &= -\frac{2\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \right\} \quad 192$$

Таким образом задача определения  $A_n$  и  $B_n$  приводится к разложению данных функций  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  в ряды Фурье по синусам. Но, как показывают уравнения (181) и (182), это можно сделать только единственным способом, так как разлагаемые в ряд функции заданы внутри половины периода ряда, от  $x=0$  до  $x=l$ . Нужно только подставить в (182)  $F(x)$  или  $\Phi(x)$  вместо  $f(x)$ , а также  $2B_n$  или  $-\frac{2\pi a}{l} n A_n$  вместо  $B_n$ . Тогда из (181) получится:

$$\left. \begin{aligned} 2B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ -\frac{2\pi a}{l} n A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \end{aligned} \right\} \quad 193$$

и коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  определены для всех значений  $n$ .

С другой стороны, если в (185) соединить попарно по две соответствующие парциальные волны, то получится:

$$v = -2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l} + \vartheta_n\right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 194$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \cos\left(\frac{n\pi at}{l} + \vartheta_n\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad 195$$

В этом виде колебание струны представляет собою совокупность парциальных колебаний, каждое из которых состоит из двух парциальных волн с одинаковым порядковым числом, движущихся в противоположных направлениях. Поэтому такие колебания называются „стоячими“ волнами в отличие от „проходящих“ волн. Рассмотрим одну из этих стоячих волн с порядковым числом  $n$ :

$$v = -2C_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l} + \vartheta_n\right) \sin \frac{n\pi x}{l} = \left. \begin{aligned} &= -2C_n \sin(2\pi\nu_n t + \vartheta_n) \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad 196$$

Она представляет сама по себе возможное колебание струны, так как выполняются предельные условия:  $v=0$  при  $x=0$  и при  $x=l$ , в чем легко убедиться. Особенность ее заключается в том, что все точки струны имеют одинаковую фазу, так как фазовый угол, содержащий время  $t$ , не зависит, как у проходящих волн, от  $x$ . Поэтому, например, все точки струны проходят одновременно через положение равновесия  $v=0$  и одновременно достигают наибольшего отклонения. Струна всегда изображается синусоидальной кривой, и движение каждой точки есть синусоидальное колебание, амплитуда которого изменяется периодически от одной точки к другой. В точках

$$x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}l, l \quad 196a$$

амплитуда колебаний равна нулю. Поэтому эти точки называются „узлами колебаний“. Они разделяют длину струны на  $n$  равных отрезков длины  $\frac{l}{n}$ , каждый из которых равен, на основании (186),

половине длины волны  $\lambda_n$ , соответствующей проходящей волне. Для основного колебания ( $n=1$ ) обе конечные точки струны суть узловые точки, для второго парциального колебания ( $n=2$ ) один узел лежит по середине струны и т. д. Колебания происходят между каждыми двумя узлами, в соседних отрезках — в противоположном направлении. Максимумы амплитуд колебания лежат по середине между узлами и называются „пучностями“ колебания. Главное колебание имеет только одну пучность. Вообще, для всякого парциального колебания число пучностей равно порядковому числу колебания  $n$ . На черт. 8 изображен вид струны и направления колебаний при  $n=3$ .



Черт. 8.

§ 41. Изображение колебания струны в виде суммы простых периодических колебаний (194) имеет не только формально-математический, но также выдающийся физический и физиологический интерес, ввиду его значения для акустики. Если колебания струны воспринимаются воздухом и через его посредство передаются уху, в частности барабанной перепонке, то органы слуха реагируют на каждый член суммы (196), т. е. на каждое простое периодическое колебание, с особой чувствительностью, — с чувствительностью к соответствующему „парциальному тону“. Число колебаний  $\nu_n$  определяет высоту тона, постоянная амплитуды  $C_n$  — силу его, а фазовая постоянная  $\vartheta_n$  не имеет акустического значения. Как показали глубокие исследования Гельмгольца, тому, что в акустике называется качеством тона или окраской звука (тембром), не соответствует особого физического атрибута. Тембр звука колеблющейся струны скорее всего приводится к тем численным отношениям, в которых отдельные парциальные тоны входят в колебание и которые сильно зависят, конечно, от того, как подействовал на струну. Чем многочисленнее и сильнее высокие парциальные тоны, тем звук вообще резче и пронзительнее, между тем как основной тон ( $n=1$ ) или же отдельный парциальный тон звучат мягко и бесцветно.

Благодаря этим своеобразным акустическим воздействиям, парциальные колебания, и вместе с тем отдельные члены ряда Фурье для волны приобретают самостоятельное значение также и в физическом смысле. Поэтому некоторые склонны даже приписывать им самостоятельное существование уже в самом колебании струны и в воздушной волне, вызванной колебанием струны, независимо от органа слуха. Однако не следует забывать, что такое

Благодаря этим своеобразным акустическим воздействиям, парциальные колебания, и вместе с тем отдельные члены ряда Фурье для волны приобретают самостоятельное значение также и в физическом смысле. Поэтому некоторые склонны даже приписывать им самостоятельное существование уже в самом колебании струны и в воздушной волне, вызванной колебанием струны, независимо от органа слуха. Однако не следует забывать, что такое



представление допустимо и даже очень целесообразно, но вовсе не необходимо. Пока мы рассматриваем колебание струны и воздушную волну, зависимость смещения материальной точки,  $v$ , от независимых переменных  $x$  и  $t$  и вместе с тем все особенности физического явления полностью представлены одной единственной функцией, и лишь при помощи некоторого произведения можно разложить эту функцию на отдельные составные части. Поэтому парциальные тоны не содержатся уже, как нечто реальное, в колебании струны или в воздушной волне, а отделяются друг от друга лишь в органе слуха.

Однако орган слуха чувствителен не только по отношению к абсолютной величине числа колебаний, но реагирует также очень характерным образом на отношение чисел колебаний двух звуковых волн, одновременно попадающих на него: если это отношение простое рациональное, т. е. может быть выражено отношением двух небольших целых чисел, то орган слуха воспринимает созвучие как приятное, гармоническое, консонирующее. Абсолютная высота обоих тонов не играет при этом роли. Поэтому расстояние между двумя различными тонами, музыкальный „интервал“, измеряется в акустике не по разности, а по отношению чисел колебаний, или, что одинаково по существу, по разности их логарифмов. Чем проще это отношение, тем совершеннее созвучность (консонантность). Так как, на основании (188), числа колебаний  $\nu$ , парциальных тонов колеблющейся струны относятся между собой, как ряд натуральных чисел  $1:2:3:4 \dots$ , то тоны с небольшим порядковым числом консонируют с основным тоном и между собою и поэтому носят также название „гармонических обертонов“.

Самый простой интервал, кроме „однозвучия“ (унисона)  $1:1$ , есть отношение  $2:1$ , или „октава“. Здесь созвучие обоих тонов настолько совершенно, что они часто сливаются в одно ощущение и тогда даже опытный слух с трудом может, а то вовсе не в состоянии отличить их друг от друга. Затем следует отношение  $3:2$ , или „квинта“, далее  $4:3$ , или „кварта“. Квинта и кварта дают вместе октаву, так как  $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$ .

Вообще, интервал, который дополняет другой интервал до октавы, называется „обращением“ последнего. Поэтому кварта есть обращение квинты. Затем следует отношение  $5:4$ , или „большая терция“, и ее обращение  $8:5$  или „малая секста“; потом отношение  $6:5$  или „малая терция“ и ее обращение  $5:3$ , — „большая секста“. Этим исчерпывается число интервалов, которые считаются

консонирующими, если ограничиться интервалами, которые лежат в пределах одной октавы, т. е.  $< 2$ . Большие интервалы приводятся к интервалам  $< 2$  путем деления на целые степени 2.

Для обозначения тонов вся область тонов делится сперва на октавы. При этом исходят от произвольного нормального тона, установленного с общего согласия. Согласно парижскому соглашению, это тон  $\nu_0 = 261$ , или  $c'$  с одним штрихом (нога „до“ первой октавы, в русском обозначении), который легко доступен для мужского и женского голоса, а также для важнейших инструментов. Затем идут с одной стороны октавы вверх до  $c''''$ , с пятью штрихами, т. е.  $\nu = 261 \cdot 2^4$ , с другой стороны вниз до малого  $c$ , большого  $C$ , контра  $C_1$  и субконтра  $C_{11}$ :  $\nu = 261 \cdot 2^{-4}$ . Звуковые волны, числа колебаний которых лежат вне указанных пределов, уже не производят впечатления тона на наше ухо, а оказывают лишь механическое действие, высокие — колющее, а низкие — держающее. Область тонов между  $c'$  (с одним штрихом) и  $c''$  (с двумя штрихами) называется октавой с одним штрихом или первой октавой. Точно так же всякая октава носит название того  $c$ , которое ограничивает его снизу. Все тона, которые отличаются на целое число октав, обозначаются одинаковыми буквами, а положение самих октав указывается так же, как и для различных  $c$ .

Так, например, струна с основным тоном  $C$  (самая толстая струна виолончели) имеет следующие гармонические обертоны:

$n=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
парциальный тон: $C$	$c$	$g$	$e'$	$e'$	$g'$	$c''$	$d''$	$e''$	...	

Обертоны  $n=7, 11, 13, 14, \dots$  не употребляются в современной музыке и не имеют поэтому особых обозначений. Но так называемая натуральная септима  $7:4$ , ближайшая к малой септима  $9:5$ , благозвучнее последней; в этом можно отчетливо убедиться, если иметь возможность сравнить слухом эти два интервала. Несомненно также, что важная роль, которую играет в музыке так называемый доминант-септаккорд (основной тон, большая терция, квинта, малая септима), основана на том обстоятельстве, что интервалы этого аккорда приблизительно выражаются отношениями  $4:5:6:7$ .

§ 42. Консонирующие интервалы образуют основу всей практической музыки. От этого закона природы искусство не может безнаказанно отступить. Совокупность всех тонов, которую можно получить, исходя от одного нормального тона  $\nu_0$  и двигаясь определенными консонирующими интервалами, образует *натуральную*

систему тонов. Числа колебаний тонов, принадлежащих к определенной системе, могут быть представлены при помощи простого математического выражения. Если ограничиться октавами, то числа колебаний имеют вид:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n, \quad 197$$

где  $n$  обозначает какое-либо целое положительное или отрицательное число. Эти тоны отличаются от нормального тона на целое число октав и поэтому образуют совокупность, еще недостаточную для практической музыки. Если же присоединить к ним квинты, то получатся тоны с числами колебаний:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p, \quad 198$$

где  $p$  также обозначает целое положительное или отрицательное число. Все тоны, числа колебаний которых могут быть выражены в виде (198), образуют *пифагорейскую* систему тонов. Последняя обнимает практически все воспроизводимые тоны и, значит, все интервалы, так как всякое число можно, хотя и не точно, но с желаемым приближением, выразить при помощи (198). Так, например, большая терция 5:4 может быть получена с практически достаточным приближением при помощи четырех квинт вверх и двух октав вниз, т. е. при помощи интервала  $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{64}$ , так называемой пифагорейской терции, которая несколько больше, чем натуральная терция. Различие между этими двумя терциями составляет  $\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$ , — так называемая „синтоническая комма“.

Увеличив число квинт и октав, можно, конечно, получить еще лучшее совпадение. Однако в абсолютном смысле совершенно невозможно получить интервал натуральной терции при помощи квинт и октав, как бы ни увеличивать число ступеней, и в этом смысле пифагорейская система тонов является неудовлетворительной. Лучше удовлетворяет теоретической потребности система тонов, обогащенная терциями:

$$\nu = \nu_0 \cdot 2^n \cdot 3^p \cdot 5^q, \quad 199$$

которая действительно послужила основой для музыки на долгое время.

Однако и эта система, подобно всем натуральным системам тонов, имеет тот практически важный недостаток, что каждая из них обнимает, строго говоря, неограниченное множество тонов,

между тем, как практическая музыка, особенно после введения инструментов с неизменными тонами (орган, пианино), вынуждена обходиться при помощи ограниченного, не очень многочисленного количества тонов. Но если произвольно оборвать систему тонов на определенных значениях чисел  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , т. е. после определенного числа интервалов, то этим тоны на границах будут лишены своей роли, так как невозможно будет идти от них вперед, между тем как неограниченная возможность модулирования образует основную потребность новой музыки. Этот недостаток оказался настолько невыносимым в течение долгого времени, что было принято решение пожертвовать для устранения его абсолютной чистотой натуральной системы тонов и несколько изменить, „темперировать“, консонирующие интервалы. Из всех искусственных систем тонов наиболее употребительной оказалась так называемая *двенадцатиступенчатая темперированная система Иоганна-Себастьяна Баха*. В этой системе все октавы, в качестве важнейших консонансов, абсолютно чисты, зато квинты темперированы, исходя из того обстоятельства, что двенадцать квинт, т. е.  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ , приблизительно равны семи октавам, т. е.  $2^7$ . Различие составляет  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx \frac{74}{73}$ , — так называемая „пифагорейская комма“. Если в равной мере уменьшить все эти двенадцать квинт так, чтобы они образовали ровно семь октав, то условие для интервала  $x$  темперированной квинты представится в виде уравнения:

$$x^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 1, \quad 200$$

или же

$$x = 2^{\frac{7}{12}} = 1,498.$$

Таким образом различие между чистой и темперированной квинтой составляет всего

$$1,5 : 1,498 \approx \frac{886}{885},$$

и непосредственно не воспринимается даже самым опытным слушателем. Если распределить двенадцать соседних тонов, которые получаются при помощи двенадцати темперированных квинт и соответствующих октав, в пределах одной октавы, например,



малой октавы, от  $c$  до  $c'$ , то последняя разделится на двенадцать равных интервалов по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 2^0 & 2^{\frac{1}{12}} & 2^{\frac{2}{12}} & 2^{\frac{3}{12}} & 2^{\frac{4}{12}} & 2^{\frac{5}{12}} & 2^{\frac{6}{12}} & 2^{\frac{7}{12}} & 2^{\frac{8}{12}} & 2^{\frac{9}{12}} & 2^{\frac{10}{12}} & 2^{\frac{11}{12}} & 2^{\frac{12}{12}} \\
 c & cis & d & dis & es & e & f & fis & ges & g & gis & as & a & ais & b & h & c'
 \end{array}$$

Определенные таким способом тоны образуют темперированную систему, которая повторяется совершенно одинаковым образом в каждой октаве.

Интервал между двумя соседними тонами есть темперированный полутон:

$$2^{\frac{1}{12}} = 1,0595.$$

Темперированная большая терция состоит из четырех полутонов. Она больше натуральной терции, именно на

$$\sqrt[3]{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{126}{125}$$

но меньше пифагорейской терции, так как последний интервал меньше синтонической коммы  $\frac{81}{80}$ .

Вполне естественное нежелание сознательно отказаться от абсолютного соответствия природе нередко выражалось в теории консонирующих интервалов в виде возражений против темперированной настройки и в требованиях возвращения к натуральной настройке. Однако нужно иметь в виду, что вопрос о признании такой настройки в практической музыке не является предметом научного обсуждения. В искусстве решающую роль играют не теоретические основания, а единственно только фактическое эстетическое воздействие. Поэтому преимущественное положение будет занимать всегда та система тонов, которая обладает наиболее действительными художественными способами выражения. Натуральная настройка также лишь тогда восстановит свое практическое значение, когда явится художник, который в состоянии будет сказать больше и выразительнее на языке натуральной настройки, чем можно было бы выразить другими средствами.

§ 43. После этого отступления в область искусства возвратимся снова к общей акустике. Обратим сперва внимание на следующий замечательный факт: когда ухо выделяет из попадающей на него

волны отдельные парциальные тоны, оно совершает в сущности то же самое, что и математик, который по данной периодической, но произвольно сложной функции вычисляет отдельные коэффициенты соответствующего ряда Фурье,  $A_n$  и  $B_n$ , при помощи интегрирования, указанного в уравнениях (175). Раздражения, на которые реагирует слуховой нерв, целиком во всех подробностях заключаются в том возбуждении, которому подвергается барабанная перепонка под влиянием падающей на нее волны. Они вполне исчерпывающе изображаются при помощи единственной функции времени  $f(t)$ , которая дает смещение барабанной перепонки от положения равновесия в каждый момент, а при разложении звука в ухе на отдельные парциальные тоны происходит разложение функции  $f(t)$  в ряд Фурье. Об этой удивительной способности органа слуха можно составить себе некоторое представление, если вспомнить, что опытный слух дирижера оказывается в состоянии выделить из звуковой массы хора, сопровождаемого оркестром, не только тоны и тембр отдельных инструментов, но и отдельные буквы слов, которые поются. В этом отношении ухо бесконечно превосходит глаз, так как мы всегда воспринимаем какой-нибудь цвет, — белый, зеленый, голубой, как нечто цельное и совершенно не можем определить, состоит ли этот цвет из других цветов и из каких именно.

Перед нами возникает теперь такой фундаментальный вопрос: каким образом ухо в состоянии совершать такие действия? и какие физические явления лежат в основе разложения звука на его парциальные тона? Ответ на этот вопрос дал Гельмгольц, исходя из допущения, что с каждым субъективным процессом, — ощущением определенного парциального тона с числом колебаний  $\nu$ , — всякий раз связан объективный процесс, — маятникообразное колебание некоторого элементарного материального образования во внутреннем ухе с тем же числом колебаний  $\nu$ , — и обратно. Сколько различных парциальных тонов в состоянии ощущать наш слух, столько же имеется внутри уха таких элементарных маятников, расположенных рядом, подобно струнам арфы. Когда барабанная перепонка совершает колебания  $f(t)$  под влиянием падающей на нее воздушной волны, то парциальный тон  $\nu$  ощущается в том случае, если тот элементарный маятник, которому свойственно число колебаний  $\nu$ , совершает заметные колебания при сотрясении барабанной перепонки. Таким образом вопрос о том, содержится ли парциальный тон  $\nu$  в звуковой волне  $f(t)$ , сводится по существу к вопросу, в состоянии ли сила, величина которой  $f(t)$ , привести в заметные колебания маятник с периодом

колебаний  $\tau = \frac{1}{\nu}$ . На этот вопрос дает точный ответ общая механика следующим образом.

Маятник с определенным периодом колебаний  $\tau = \frac{1}{\nu}$  может быть изображен, согласно 1 § 13, при помощи материальной точки, которая совершает небольшие колебания около положения устойчивого равновесия  $x = 0$ . Если колебания вызваны одним толчком, а затем происходят без нарушения извне, то они следуют уравнению движения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -4\pi^2 m \nu^2 x, \quad 201$$

которое получается из уравнения [1 (15)], если выразить в нем постоянную  $c$  через число колебаний  $\nu$ , на основании зависимости:

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = \tau = \frac{1}{\nu}. \quad 202$$

В этом случае маятник совершает „свободные“ колебания, период которых называется поэтому „собственным“ периодом колебаний маятника.

Но если на маятник действует, кроме того, внешняя сила, то он совершает „вынужденные“ колебания, согласно уравнению движения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -4\pi^2 m \nu^2 x + f(t). \quad 203$$

Вычислим сперва вынужденные колебания для частного случая, когда внешняя сила  $f(t)$  — периодическая, т. е. имеет вид:

$$f(t) = C \cos(2\pi\nu't + \vartheta), \quad 204$$

при том допущении, что в начальном состоянии при  $t = 0$  маятник покоится в состоянии равновесия, т. е.  $x = 0$  и  $\frac{dx}{dt} = 0$ .

Общее решение дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 4\pi^2 m \nu^2 x = C \cos(2\pi\nu't + \vartheta) \quad 205$$

имеет вид

$$x = \alpha \cos(2\pi\nu t + \vartheta_0) + \beta \cos(2\pi\nu't + \vartheta). \quad 206$$

Если подставить это выражение для  $x$  в уравнение (205), то в левой части останутся только члены с  $\beta$ . Поэтому получится:

$$\beta = \frac{C}{4\pi^2 m (\nu^2 - \nu'^2)}, \quad 207$$

между тем как  $\alpha$  и  $\vartheta_0$  остаются неопределенными и поэтому представляют собою постоянные интегрирования. Если определить их значения по начальным условиям и подставить их, а также значение  $\beta$ , в (206), то получится искомое колебание маятника:

$$x = \frac{C}{4\pi^2 m (\nu^2 - \nu'^2)} \cdot \left\{ -\cos \vartheta \cos 2\pi\nu t + \frac{\nu'}{\nu} \sin \vartheta \sin 2\pi\nu t + \cos(2\pi\nu't + \vartheta) \right\}. \quad 208$$

Таким образом маятник совершает движение, которое состоит вообще из двух колебаний с двумя различными периодами, числа колебаний которых  $\nu$  и  $\nu'$  соответствуют собственному колебанию и внешнему возбуждающему колебанию.

Однако исключение составляет тот случай, когда период возбуждающего колебания совпадает с периодом собственного колебания, так что  $\nu' = \nu$ . Тогда выражение (208) принимает вид:  $\frac{0}{0}$ .

Истинное значение последнего получится, если положить  $\nu' = \nu + \Delta\nu$ , разложить числитель и знаменатель по степеням  $\Delta\nu$  и перейти к пределу  $\Delta\nu = 0$ :

$$x = \frac{C}{8\pi^2 m \nu^2} \cdot \left\{ 2\pi\nu t \sin(2\pi\nu t + \vartheta) - \sin 2\pi\nu t \sin \vartheta \right\}. \quad 209$$

Конечно, можно и непосредственно убедиться в том, что выражение (209) удовлетворяет как начальным условиям, так и дифференциальному уравнению (205) при  $\nu' = \nu$ .

Это движение маятника, ввиду того, что перед синусом стоит множитель  $t$ , совершенно отлично от движения, изображаемого формулой (208), не только по закону движения, но даже по порядку величины: оно не состоит из периодических колебаний, а бесконечно возрастает с течением времени. Отсюда следует, что внешняя периодическая сила с произвольно малой амплитудой  $C$ , если только период силы совпадает с собственным периодом маятника, может с течением времени произвести более значительное действие, чем любая произвольно большая сила с каким-либо другим периодом. Тогда говорят, что возбуждающая сила находится в *резонансе* с маятником. Резонанс дает объяснение многих замечательных явлений природы, — разумеется, не только в области акустики. Когда слабая звуковая волна приводит



в звучании зубцы большого камертона, или когда мальчик приводит в сильное колебание пудовый колокол, или когда крепкий мост начинает совершать опасные колебания под влиянием идущих в ногу людей, то все это — явления резонанса. Естественно допустить, что подобно тому, как бывает в акустике и электродинамике, также и в химии и даже в биологии интенсивность некоторых реакций сводится по существу к явлению резонанса.

Сделаем теперь более общее допущение, что сила, колеблющая маятник, не просто периодична, а состоит из ряда простых периодических колебаний, т. е. может быть выражена при помощи ряда *Фурье*. Как нам известно, это представляет собою наиболее общий случай. Тогда колебания маятника будут бесконечно возрастать с течением времени в зависимости от того, содержится ли в ряде *Фурье* член с собственными колебаниями маятника. Величина коэффициента этого члена по сравнению с другими членами ряда *Фурье* не играет при этом роли. По тому, как маятник реагирует на возбуждающее колебание, можно определить имеется ли соответствующий член в ряде *Фурье*. Таким образом маятник служит для анализа ряда при помощи резонанса, поэтому он называется также „резонатором“. Резонатор заметно отзывается только на то колебание, которое соответствует его собственному периоду, поэтому действие его избирательное, „селективное“. Благодаря явлению резонанса, отдельные члены ряда *Фурье* также получают физическое значение, между тем как до сих пор физически определена была только их сумма.

Подойдем теперь еще ближе к количественному взаимоотношению между возбуждающей силой  $f(t)$  и энергией вызванного ею колебания резонатора. Рассмотрим процесс в течение определенного промежутка времени. Допустим, что возбуждающая сила  $f(t)$  настолько слаба, что в течение этого промежутка времени маятник колеблется почти как свободный, т. е. периодически. Тогда изменение колебательной энергии  $E$  (кинетической и потенциальной вместе) в течение элемента времени  $dt$  равно, согласно [1 (393)]:

$$dE = \mathbf{F}_x \cdot dx = f(t) \cdot dx,$$

или

$$dE = f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt.$$

Поэтому изменение энергии за время от  $t$  до  $t'$  равно

$$E' - E = \int_t^{t'} f(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt. \quad 210$$

Смотря по тому, как выражаются отклонения маятника  $x$ , во время рассматриваемого промежутка времени — через  $\cos 2\pi \nu t$  или через  $\sin 2\pi \nu t$ , производная  $\frac{dx}{dt}$  пропорциональна  $\sin \nu t$  или  $\cos 2\pi \nu t$ , а интеграл (210) принимает такой же вид, как интегралы (175), служащие для вычисления коэффициентов ряда *Фурье* для функции  $f(t)$  с той лишь разницей, что там переменная интегрирования обозначена через  $x$ , а здесь через  $t$ . Представим себе длинный ряд таких маятников-резонаторов с соответственно подобранными периодами колебаний и фазами и подвергнем их одновременно действию одной и той же возбуждающей силы  $f(t)$ . Тогда энергия колебаний каждого маятника укажет величину соответствующего коэффициента разложения  $f(t)$  в ряд *Фурье*. Согласно *Гельмгольцу*, этот процесс одинаков по существу с тем процессом, который происходит в ухе, когда каждое из слуховых волокон, отзывающееся на определенное число колебаний, воспринимает, благодаря резонансу, свой тон из колебаний барабанной перепонки и передает его чувствительным нервам. Отсюда мы видим, что слух не только производит такое разложение звуковой волны, которое, как мы видели в начале параграфа, соответствует превращению этой волны в сумму простых периодических волн, но что природа пользуется при этом тем же самым методом, как и математика. Ибо последнее уравнение (210) есть не что иное, как механическая иллюстрация математического определения коэффициентов ряда в (175). Благодаря этому, нам становится физически совершенно понятной способность уха разлагать звук на отдельные тоны.

Другой принципиально важный вопрос — это объяснение своеобразного созвучного действия консонирующих интервалов. По этому вопросу *Гельмгольц* также разработал теорию, согласно которой понятие консонанса возникло не из бессознательно мистического удовлетворения, которое слуховой нерв испытывает при появлении простых рациональных числовых отношений, но что и здесь также играют решающую роль вполне определенные реальные физически определяемые обстоятельства, которые вызывают удовольствие в случае консонанса и неудовольствие в случае диссонанса. Кратким обсуждением этой теории мы и займемся в ближайшей главе, в которой будет идти речь об акустических звуковых волнах (§ 46).

и может быть вычислен при всяком состоянии вещества, если дана функция  $f$  в уравнении (211). Так как масса элемента тела объема  $dV$ , не изменяется, то для бесконечно малого расширения объема  $d\sigma$  существует соотношение:

$$dV \cdot k = dV \cdot (1 + \sigma) \cdot (k + dk). \quad 213a$$

Поэтому

$$\sigma = -\frac{dk}{k},$$

и из (213):

$$\lambda = k \frac{dp}{dk}. \quad 214$$

Так как жидкое и газообразное состояние можно рассматривать как частный случай твердого состояния, то мы выведем уравнения движения непосредственно из уравнений для твердых тел, и при этом также опустим силы тяготения. Тогда из (147) и (212) получится:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad 215$$

или же, в векториальной форме, если еще ввести постоянную

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{dp}{dk} = a^2,$$

получится:

$$\mathbf{q} = a^2 \cdot \text{grad } \sigma. \quad 216$$

Произведем над этим уравнением векторное действие rot (§ 13). Ввиду (65), следует:

$$\mathbf{div} = 0.$$

Принтегрировав это уравнение дважды по  $t$ , получим:

$$\mathbf{o} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2.$$

Отсюда следует, что составляющие вращения материальной частицы  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , суть линейные функции времени. Значит, вращение возрастает с течением времени до бесконечности, если только вектор  $\mathbf{c}_1$  не равен нулю. Так как мы намерены заняться бесконечно малыми колебаниями около положения равновесия и

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

**§ 44.** Жидкости и газы могут быть выделены как частный случай среди совершенно упругих изотропных тел (§ 21), так как в них все три главные давления (§ 20) равны. Отсюда следует, что на каждый элемент поверхности действует перпендикулярное к нему давление  $X_x = Y_y = Z_z = p$ , независящее от расположения элемента поверхности и положительное, если тело подвергается сжатию. Так как тангенциальные давления обращаются в нуль, то постоянная упругости в уравнениях (119) также равна нулю, и давление зависит только от объема или же от плотности:

$$p = f(k). \quad 211$$

Вид функции  $f$  зависит от природы тела. Для капельных жидкостей  $p$  чрезвычайно сильно изменяется при изменении  $k$ , поэтому удобнее представить  $k$  в виде функции от  $p$ . Предельный случай образуют несжимаемые жидкости, для которых  $k$  постоянно. Подробнее о виде функции  $f$  мы будем говорить позднее, при обсуждении конечных деформаций (§ 56).

В интересах общности мы распространим последующие исследования как на капельные жидкости, так и на газы. Для этого мы воспользуемся обобщением уравнений (119), которое мы уже ввели в § 33, а именно мы положим, что в недеформированном состоянии ( $\sigma = 0$ ) давление  $p$  не равно нулю, а равно  $p_0$ , так как газ в устойчивом равновесии всегда обладает конечным давлением. Тогда шесть уравнений (119) обратятся в одно уравнение:

$$p = p_0 - \lambda \sigma. \quad 212$$

Коэффициент упругости  $\lambda$  зависит от сжимаемости, так как

$$\frac{-\sigma}{p - p_0} = \frac{1}{\lambda}, \quad 213$$



поэтому постоянное во времени вращение также не представляет для нас интереса, то мы ограничимся рассмотрением случая, когда обе постоянные  $e_1$  и  $e_2$  обращаются в нуль и тогда

$$\mathbf{O} = \text{rot } \mathbf{q} = 0. \quad 217$$

Общее решение этого дифференциального уравнения равно:

$$\mathbf{q} = - \text{grad } \varphi, \quad 218$$

где  $\varphi$  обозначает некоторую скалярную функцию места и времени. Эта функция находится в таком же соотношении к вектору смещения  $\mathbf{q}$ , в каком потенциал  $U$  находится к силовому вектору  $\mathbf{F}$ , согласно I (121). Поэтому можно назвать  $\varphi$  „потенциалом смещения“. Таким образом существование потенциала смещения равнозначно с условием, чтобы при смещении не происходило вращений. Как видно из уравнения (218), в величине потенциала смещения  $\varphi$  аддитивная функция времени не имеет физического значения и поэтому может быть определена только при помощи произвольного допущения.

Если потенциал смещения  $\varphi$  известен как функция  $x, y, z, t$ , то отсюда однозначно следуют все подробности движения. Прежде всего, из уравнения (218) получим для скорости:

$$\dot{\mathbf{q}} = - \text{grad } \dot{\varphi}. \quad 219$$

Таким образом скорость также имеет потенциал: „потенциал скорости“. Далее, для объемного расширения следует из (66):

$$\sigma = \text{div } \mathbf{q} = - \text{div grad } \varphi = - \Delta \varphi, \quad 220$$

и для изменения давления следует из (212):

$$p - p_0 = - \lambda \sigma = \lambda \Delta \varphi. \quad 221$$

Поэтому вся задача сводится к нахождению потенциала смещения. Для этого служит следующее дифференциальное уравнение, вытекающее из уравнений движения (216):

$$\text{grad } \ddot{\varphi} = a^2 \cdot \text{grad } \Delta \varphi,$$

которое после интегрирования по трем координатным направлениям примет вид:

$$\ddot{\varphi} = a^2 \Delta \varphi. \quad 222$$

Как легко убедиться при помощи дифференцирования, уравнение (222) имеет место не только для потенциала смещения  $\varphi$ ,

но и для каждого из компонентов смещения и скорости, а также для объемного расширения  $\sigma$  и для давления  $p$ . Это уравнение представляет собою обобщение уравнения (155) для колебаний натянутой струны и поэтому называется также пространственным „волновым уравнением“. Конечно, постоянная  $a$  также играет при этом роль скорости распространения. Однако волны, которые мы здесь будем рассматривать, существенно отличаются от волны поперечно колеблющейся струны, так как здесь упругие действия обуславливаются не вращениями, а изменениями, плотности и давления.

Как уже было сказано при обсуждении проблем статики (§ 28), нас всегда меньше интересует с физической точки зрения общее решение характеристического дифференциального уравнения, чем такие частные решения, которые возможно больше соответствуют известным важным процессам в природе. В дальнейшем мы займемся некоторыми такими решениями.

**§ 45.** Самое простое частное решение дифференциального уравнения (222) получается в том случае, когда функция  $\varphi$  зависит только от одной пространственной переменной, например, от  $x$ . Тогда уравнение (222) приводится к простому виду (155) и поэтому представляет две волны, которые распространяются со скоростью  $a$  в направлении положительной и отрицательной оси  $x$ . Так как физическое состояние всех материальных частиц, лежащих в какой-либо плоскости, перпендикулярной к оси  $x$ , совершенно одинаково, то эти волны называются *плоскими волнами*, каждая плоскость  $x = \text{const.}$  называется „волновой плоскостью“, а перпендикулярное к ней направление  $x$  — „волновой нормалью“. Вид волн определяется начальным состоянием и пограничными условиями. Так как потенциал смещения зависит, кроме времени, только от  $x$ , то из трех составляющих смещения только  $u$  не равно нулю. Поэтому колебания происходят в направлении распространения. Такие волны, в противоположность рассмотренным в предыдущей главе с поперечным и колебаниям струны, являются продольными.

Плоские волны можно приблизительно осуществить, заключив жидкость или газ, например воздух, в длинный достаточно узкий цилиндр. Такой цилиндр служит „трубой“, нормальные сечения суть волновые плоскости, а колебания воздуха происходят исключительно в продольном направлении, которое мы примем за ось  $x$ , по тем же законам, с которыми мы познакомились при изучении колебаний струны. Поэтому мы можем и не останавливаться на подробностях. Только введение пограничных условий

требует особого обсуждения. Конец какой-либо трубы может быть открыт или закрыт. В последнем случае на конце  $u = 0$ , так как воздух не может ни войти в стенку сосуда, ни выйти из нее. Это пограничное условие соответствует струне, закрепленной на одном конце. А в первом случае у открытого сечения, на основании принципа равенства действия и противодействия, давление колеблющегося в струне воздуха на внешний атмосферный воздух  $p$ , равно давлению атмосферы на воздух в трубе, следовательно постоянно  $= p_0$ , т. е.  $\sigma = 0$ , или плотность постоянна во времени. Отсюда однозначно получаются законы колебаний воздуха в открытых и закрытых трубах.

Если труба закрыта с обоих концов, то мы имеем, как в § 40, стоячие колебания вида (194), где нужно только подставить  $u$  вместо  $v$ . Колебания могут быть вызваны сотрясением извне или при помощи небольшого отверстия для дутья. На каждом конце трубы находится узел смещения  $u$  и скорости  $\dot{u}$ . Положение остальных узлов для  $n$ -го парциального колебания дано в (196a). Посредине между двумя соседними узлами находится пучность. Что касается объемного расширения, то на основании (194) получается:

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l} + \theta_n\right) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad 223$$

Отсюда видно, что объемное расширение, а вместе с тем и колебание давления, имеют пучность на обоих концах трубы и что узлы объемного расширения  $\sigma = 0$ , т. е. те места, в которых плотность и давление остаются постоянными, совпадают с пучностями смещения и скорости, посредине между узлами последних.

Представим себе, что колеблющаяся труба разрезана в таком узле расширения  $\sigma = 0$ , и отверстие сообщается со свободной атмосферой. Это совершенно не нарушает колебаний ни в одной из половин трубы, так как установленное выше предельное условие осуществлено в отверстии. Отсюда следует закон колебаний в открытой или частью открытой трубе.

Если труба открыта с обоих концов, то на каждом конце находится узел объемного расширения и пучность смещения. Ряд парциальных тонов такой же, как у закрытой с обоих концов трубы или у струны, закрепленной на обоих концах, только узлы и пучности поменялись ролями. При основном колебании  $\sigma$  имеет единственную пучность,  $u$  имеет единственный узел посредине трубы.

Совершенно иной закон парциальных тонов получается для трубы, закрытой с одного конца и открытой с другого. Здесь смещение  $u$  имеет на одном конце узел, а на другом конце пучность. Поэтому в такой трубе главное колебание не имеет посредине ни узла, ни пучности. Для главного колебания в этом случае вся длина трубы равна расстоянию между узлом и пучностью, т. е. равна половине расстояния между двумя соседними узлами в более длинной трубе, которая совершает такое же стоячее колебание. Таким образом труба, закрытая на одном конце, обладает таким же основным колебанием, как и труба, открытая с двух концов, или закрытая с двух концов, но двойной длины. Для обертонов трубы, закрытой на одном конце, длина трубы содержит нечетное кратное расстояния между узлом и пучностью. Отсюда следует, что числа колебаний парциальных тонов относятся как нечетные целые числа 1:3:5:7.

§ 46. В открытом воздухе также могут быть приблизительно осуществлены плоские волны, если звуковая волна занимает сравнительно небольшое пространство и точка воздействия (I, § 35) достаточно удалена от источника звука. Тогда расстояние  $x$  между точкой воздействия и источником звука представляет собою нормаль к волне, и для простого тона с числом колебаний  $\nu = \frac{1}{\tau}$  и длиной волны  $\lambda$  мы имеем, как и в (190), частное решение уравнения (222) в виде:

$$\varphi = C \cos \left\{ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta \right\}, \quad 224$$

где между  $\tau$ ,  $\nu$  и  $\lambda$  существуют соотношения (189). Сложив несколько таких частных решений, мы получим более общее решение, которое соответствует тому случаю, когда несколько звуковых волн одновременно попадает в ухо по одному направлению. Особый интерес представляет случай, когда взаимодействуют два тона одинаковой интенсивности и с мало отличающимися числами колебаний  $\nu$  и  $\nu'$ . Тогда мы имеем для колебания в точке, которую мы примем для простоты за начало координат;

$$\varphi = C \cos(2\pi\nu t + \theta) + C \cos(2\pi\nu' t + \theta'),$$

или

$$\varphi = 2C \cos \left( 2\pi \frac{\nu' - \nu}{2} t + \frac{\theta' - \theta}{2} \right) \cdot \cos \left( 2\pi \frac{\nu' + \nu}{2} t + \frac{\theta' + \theta}{2} \right). \quad 225$$



Если  $\nu' - \nu$  мало по сравнению с  $\nu$ , то первый косинус в (225) медленно изменяется с течением времени, и пройдет много колебаний отдельных тонов, пока заметно изменится его величина. Поэтому колебание (225) действует на ухо так же, как колебание одного тона с переменной амплитудой

$$C_t = 2C \cos \left( 2\pi \frac{\nu' - \nu}{2} t + \frac{\theta' - \theta}{2} \right) \quad 226$$

и числом колебаний  $\frac{\nu' + \nu}{2}$ , равным среднему арифметическому из чисел колебаний отдельных тонов. В этом случае слышится определенный тон, интенсивность которого колеблется медленно и периодически между нулем и максимумом. Эти колебания интенсивности называются „биениями“ обоих совпадающих тонов, их максимумы называются „толчками“ биений. Частота биений зависит от времени между двумя последовательными нулевыми значениями  $C_t$ , число их составляет  $\nu' - \nu$  в единицу времени. Чем ближе друг к другу оба тона, тем медленнее и отчетливее становятся биения. Когда тона расходятся, биения становятся частыми и менее заметными. Поэтому биения представляют прекрасное средство, для того чтобы испытать при помощи слуха не только различие двух почти одинаковых тонов, но также отклонение от полного консонанса двух музыкальных тонов, близких к консонансу. Ибо при двух почти консонирующих музыкальных тонах (звучаниях) возникают биения, конечно, не основных тонов, но отдельных пар, содержащихся в звучаниях парциальных тонов. Так, например, при расстроенной октаве первый обертона более низкого звука дает биения с основным тоном более высокого звука, при расстроенной квинте второй обертона более низкого звука дает биения с первым обертоном более высокого звука. Поэтому значительно легче настроить инструменты в натуральной системе тонов, чем в темперированной системе.

Эти биения по Гельмгольцу и составляют физическую основу для противопоставления консонанса и диссонанса. Ибо для всех органов чувств установлен факт, что прерывистые раздражения, при известной частоте, действуют назойливо, утомительно, неприятно. Достаточно вспомнить, например, чтение при мигающем освещении или некоторые виды световой рекламы. Подобным же образом и слуховой нерв страдает от трескучих, щелкающих, тремоллирующих звуков, если частота следования их достигает определенной степени. Если она заметно превзойдена,

то ухо уже не в состоянии различить отдельные толчки, и неприятное чувство ослабевает. Если, с другой стороны, биения становятся очень медленными, то слуху легче следовать за повышением и понижением силы звука; в тот момент, когда интервал между двумя постепенно сближающимися тонами переходит в созвучие, и биения становятся все медленнее, теряясь в бесконечности, слух испытывает облегчение, а иногда даже своего рода наслаждение.

Такие же явления, как и при созвучии двух тонов, происходят согласно изложенному и при совпадении обертонов двух консонирующих звучаний. Поэтому неприятное чувство при слушании диссонансирующего интервала и удовольствие при слушании консонирующего интервала могут быть также приведены в связь с появлением и исчезновением неприятно действующих биений. Согласно этой точке зрения, гармония, основанная на консонансе, лишается своего мистического характера, и особый характер соответствующего слухового ощущения сводится к физико-физиологическим процессам.

§ 47. Можно получить еще одно довольно простое решение волнового уравнения (222), если предположить, что потенциал смещения зависит, кроме времени, только от расстояния

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

между точкой воздействия  $(x, y, z)$  и началом координат. Тогда согласно [1 (110)]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогичные выражения получаются для  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ . Поэтому

$\Delta \varphi$  преобразуется следующим образом:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi), \quad 227$$

а волновое уравнение (222) можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}. \quad 228$$

Последнее уравнение имеет такой же вид, как и (155) и поэтому имеет общее решение, согласно (157):

$$r\varphi = f(r + at) + g(r - at). \quad 229$$

Это — две *шаровые волны* (сферические волны), из которых одна распространяется внутрь, а другая — наружу, обе со скоростью  $a$ . Но, в отличие от плоских волн, здесь распространяется неизменным не потенциал смещения, а произведение его на  $r$ .

Рассмотрим сперва шаровую волну, распространяющуюся наружу, т. е. положим  $f = 0$ . Тогда

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot g(r - at). \quad 230$$

Для того чтобы волновая функция  $g$  была конечной необходимо, чтобы, при  $r = 0$ ,  $\varphi$  было бесконечно велико. Стало быть, начало координат есть особенная точка этой волны. Поэтому при реализации волны начало координат должно быть исключено из области колеблющейся жидкости (воздуха). В действительности, в этом месте находится источник звука. Можно представить себе, например, что источником звука служит шар, окруженный со всех сторон жидкостью и сделанный из какого-нибудь упругого твердого вещества. Под влиянием какого-нибудь внутреннего механизма объем этого шара попеременно увеличивается и уменьшается по какому-нибудь закону, — так называемый „пульсирующий“ шар. Последний передает свои колебания непосредственно примыкающей к нему жидкости. Это пограничное условие определяет вид волновой функции  $g$ . С другой стороны, величина смещения  $q$  на границе получается из потенциала смещения, на основании (218) и (230). Смещение происходит в радиальном направлении, поэтому такие шаровые волны продольны. Величина смещения убывает с увеличением расстояния от источника звука.

Можно обобщить частное решение (230) волнового уравнения (222), сложив несколько таких решений. Потенциал смещения выразится в виде:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} g_1(r_1 - at) + \frac{1}{r_2} g_2(r_2 - at) + \dots \quad 231$$

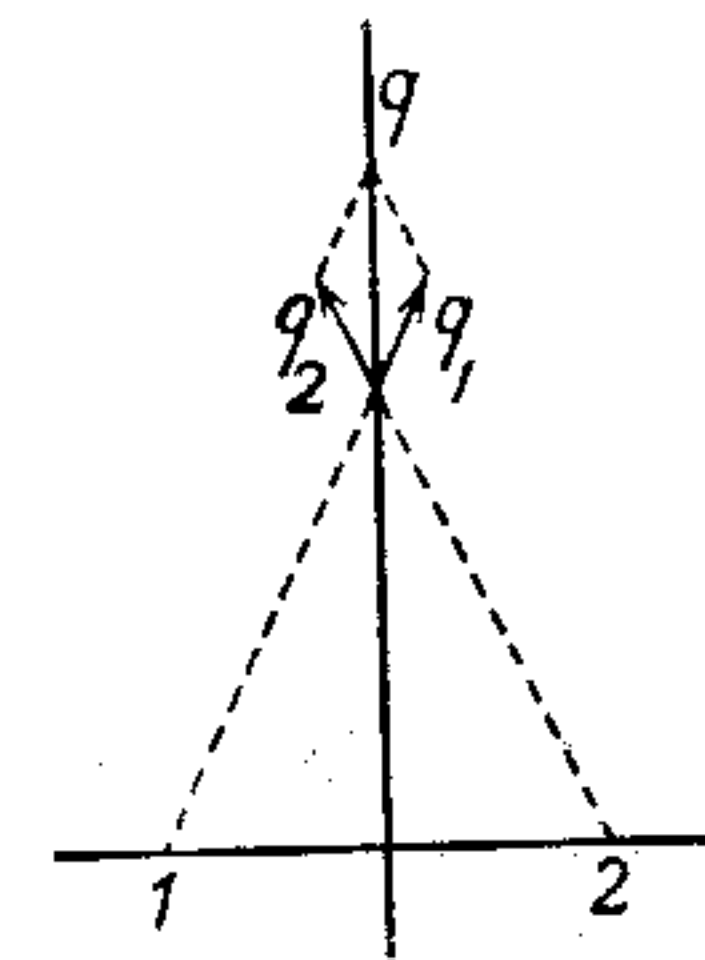
где  $r_1, r_2, \dots$  — расстояния точки воздействия от некоторых неподвижных центров;  $g_1, g_2, \dots$  — некоторые функции одного аргумента. Это движение жидкости вызывается взаимодействием

нескольких шаров, пульсирующих в ней по любым законам, если шары так далеки друг от друга, что можно пренебречь возмущениями, которые претерпевают пограничные условия на поверхности какого-либо шара под влиянием волны, исходящей из других шаров.

Возьмем в частном случае два шара и положим  $g_1 = g_2 = g$ . Тогда получится:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} g(r_1 - at) + \frac{1}{r_2} g(r_2 - at). \quad 232$$

Этот случай может быть осуществлен также другим интересным образом. Проведем плоскость симметрии обоих центров  $r_1 = 0$  и  $r_2 = 0$ , т. е. такую плоскость, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей оба центра, в ее середине. Тогда для каждой точки воздействия, лежащей в этой плоскости симметрии, смещение  $q = q_1 + q_2$  произойдет в этой же плоскости, так как равнодействующая двух равных друг другу радиальных смещений  $q_1$  и  $q_2$  делит пополам угол между ними (черт. 9). Если в плоскости симметрии поместить твердую стену, то это несколько не нарушит процесса движения, так как предельное условие для твердой стены, чтобы компонент смещения в направлении нормали к стене обратился в нуль, уже осуществлено повсюду. Следовательно, движение будет происходить совершенно одинаковым образом, если поместить твердую стену и вовсе удалить половину пространства с источником звука 2. Или, другими словами: твердая плоская стена, противопоставленная источнику звука, действует совершенно так же, как и зеркальное изображение источника звука относительно стены.



Черт. 9.

Теперь рассмотрим шаровую волну, распространяющуюся внутрь и представленную функцией  $f(r + at)$  в уравнении (229). Ее можно представить себе осуществленной при помощи большого тонкостенного полого шара, наполненного воздухом, который попеременно сжимается и растягивается каким-либо внешним механизмом. Все подробности процесса однозначно определены уравнением (229) в связи с начальными и пограничными условиями. Особый интерес представляет здесь такой вопрос: что произойдет с какой-нибудь заданной распространяющейся



внутри шаровой волны, когда она достигнет центра шара  $r=0$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, допустим, что в начальный момент,  $t=0$ , существует только одна идущая внутрь волна  $f(r)$  произвольного заданного вида. Так как центр шара находится в жидкости, то для него также имеет место уравнение (229). Так как в природе не встречается бесконечно больших смещений, то при  $r=0$  потенциал смещения также конечен, и мы имеем во всякий момент:

$$0 = f(at) + g(-at),$$

или, если написать  $at-r$  вместо  $at$ :

$$0 = f(at-r) + g(r-at).$$

Подставив это выражение в (229), получим:

$$r\varphi = f(at+r) - f(at-r). \quad 233$$

Таким образом в центре шара происходит своего рода отражение шаровой волны, подобно тому явлению, которое мы рассмотрели в § 37 в связи с уравнением (168). Волна, распространяющаяся внутрь, превращается в противоположную волну, распространяющуюся наружу, или, как можно выразиться, шаровая волна проходит сама сквозь себя в центре шара. Уравнение (233) не находится в противоречии со сделанным нами допущением, что в начале движения имеется только одна волна, распространяющаяся внутрь. Ибо функция  $f(r)$ , которая изображает вид волны при  $t=0$ , определена только для положительных значений  $r$ , между тем, как в уравнении (233) рассматриваются также отрицательные значения аргумента  $at-r$ . Поэтому достаточно лишь допустить, что функция  $f$  равна нулю при всех отрицательных значениях аргумента, и мы можем однозначно вывести из уравнения (233) весь ход движения для данного случая.

Действительно, тогда при  $t=0$ :

$$r\varphi = f(r),$$

и волна, распространяющаяся наружу, также исчезает при всех значениях  $t < \frac{r}{a}$ . Это значит, что отраженная волна попадает на точку воздействия  $r$  лишь после того, как пройдет путь от центра шара до точки воздействия, со скоростью  $a$ .

§ 48. Теория шаровых волн дает нам еще одно решение общего волнового уравнения (222) для неограниченной со всех сторон жидкости. Проинтегрируем сперва это уравнение по некоторому объему жидкости, обозначив элемент объема через  $d\tau$ . Тогда получим, принимая во внимание преобразование (82):

$$\int \ddot{\varphi} d\tau = a^2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma. \quad 234$$

Возьмем в качестве области интегрирования шар с центром в начале координат и радиусом  $r$ , и введем полярные координаты  $\rho, \vartheta, \phi$  (I(92)). Тогда, согласно [I(93)]:

$$d\tau = \rho^2 d\rho d\Omega, \quad 235$$

причем для сокращения мы обозначили

$$\sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\phi = d\Omega, \quad 236$$

$d\Omega$  — „телесный угол“ конуса, определенного дифференциалами  $d\vartheta$  и  $d\phi$ . Он измеряется участком поверхности, который вырезывается конусом из поверхности шара с центром в начале координат и радиусом равным единице. Далее,

$$d\sigma = r^2 \cdot d\Omega, \quad \nu = -\rho. \quad 237$$

Следовательно,

$$\iiint \ddot{\varphi} \rho^2 d\rho d\Omega = a^2 r^2 \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_r d\Omega. \quad 238$$

Интегрирование по  $\Omega$  производится в обеих частях уравнения от  $\vartheta=0$  до  $\vartheta=\pi$  и от  $\phi=0$  до  $\phi=2\pi$ , кроме того, в левой части по  $\rho$  от 0 до  $r$ . Значок  $\rho$  в правой части показывает, что после дифференцирования нужно подставить  $\rho=r$ .

Введем теперь *среднее значение* потенциала смещения на определенном расстоянии  $\rho$  от начала, т. е. сумму произведений значений  $\varphi$  во всех элементах поверхности шара на площади этих элементов, разделенную на сумму всех элементов площади, т. е. на поверхность всего шара:

$$\frac{1}{4\pi\rho^2} \int \varphi \rho^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \varphi d\Omega = \bar{\varphi}. \quad 239$$

Тогда можно написать предыдущее уравнение в таком виде:

$$\int_0^r \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \rho^2 d\rho = a^2 r^2 \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right)_r,$$

Если продифференцировать его по  $r$ , то получится:

$$r^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right) = a^2 \left( 2r \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} \right),$$

где нужно полагать, что в выражение  $\bar{\varphi}$  подставлено  $r$  вместо  $\rho$ . Но это уравнение одинаково с волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial r^2} \quad 240$$

и дает нам такую теорему: при любом колебательном процессе в жидкости законы шаровых волн имеют место для средних значений потенциала смещения, отнесенных к поверхности шара, описанного около любой точки жидкости, принятой за начало. В частности, для шаровых волн  $\bar{\varphi} = \varphi$ , и (240) совпадает с (228).

Интересное следствие получается из (240), если применить его к предельному случаю несжимаемой жидкости, для которой, согласно (215), скорость распространения  $a$  становится равной  $\infty$ . Тогда полное уравнение (222) переходит в уравнение  $\Delta \varphi = 0$ , т. е. в уравнение Лапласа [1(129)], а уравнение (240) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial r^2} = 0,$$

общее решение которого равно:

$$r\bar{\varphi} = A + Br,$$

или

$$\bar{\varphi} = \frac{A}{r} + B. \quad 241$$

Так как, при  $r = 0$ ,  $\bar{\varphi}$  конечно, то  $A = 0$ , и

$$\bar{\varphi} = B. \quad 242$$

Это значит, что функция  $\varphi$ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа, например, потенциальная функция тяготеющих масс вне

этих масс, обладает таким свойством, что средние значения ее на поверхностях ряда концентрических шаров равны между собою, стало быть, равны значению в центре. Отсюда следует также, что функция не может иметь абсолютного максимума или абсолютного минимума ни в одной точке пространства, а на основании (1, § 41) вытекает, что вне системы тяготеющих масс никогда не может существовать места абсолютно устойчивого или абсолютно неустойчивого равновесия.

§ 49. Мы можем пользоваться законом, выраженным в уравнении (240), для того чтобы вычислить по заданному начальному состоянию, потенциал смещения какой-нибудь массы жидкости, занимающей достаточно большой объем, в любой точке жидкости, принятой за начало координат, для любого момента времени.

Прежде всего, из (240) следует общий интеграл:

$$r\bar{\varphi} = f(r + at) + g(r - at),$$

или, так как  $\bar{\varphi}$  остается конечным при  $r = 0$ , совершенно подобно (233) для шаровых волн:

$$r\bar{\varphi} = f(at + r) - f(at - r). \quad 243$$

Вид функции  $f$  получается однозначно из условий начального состояния. Для характеристики его мы можем допустить, что при  $t = 0$  потенциал смещения  $\varphi$ , а также его производная по времени  $\dot{\varphi}$  даны как функции места. Ибо  $\varphi$  определяется, кроме несущественной аддитивной постоянной, по смещению  $q$  из (218), а  $\dot{\varphi}$  определяется по скорости  $\dot{q}$  из (219).

Поэтому напишем:

$$\varphi_0 = F(r, \theta, \phi), \quad \dot{\varphi}_0 = \Phi(r, \theta, \phi), \quad 244$$

полагая, что  $F$  и  $\Phi$  даны. Тогда нужно считать заданными функциями  $r$  также:

$$\bar{\varphi}_0 = \bar{F}(r), \quad \dot{\bar{\varphi}}_0 = \bar{\Phi}(r). \quad 245$$

С другой стороны, продифференцировав (243) по  $t$ , получим:

$$r\dot{\bar{\varphi}} = a f'(at + r) - a f'(at - r). \quad 246$$



Следовательно при  $t=0$ , на основании (243), (246) и (245):

$$r\bar{F} = f(r) - f(-r), \quad 247$$

$$r\bar{\Phi} = af'(r) - af'(-r). \quad 248$$

Интегрирование последнего уравнения дает:

$$\frac{1}{a} \int r\bar{\Phi} dr = f(r) + f(-r).$$

Отсюда, в связи с (247):

$$f(\pm r) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} \int r\bar{\Phi} dr \pm r\bar{F} \right\}. \quad 249$$

Таким образом функция  $f$  определена для всех положительных и отрицательных значений аргумента, а вместе с тем, согласно (243),  $\bar{\varphi}$  непосредственно дано как функция  $r$  и  $t$ . Аддитивная постоянная в интеграле совершенно произвольна и не оказывает влияния на значение  $\bar{\varphi}$ .

Из выражения  $\bar{\varphi}$  при произвольном  $r$  и произвольном  $t$  можно вывести также значение  $\varphi_t(0)$  при  $r=0$ . Так как, согласно (243),

$$\varphi_t(0) = \bar{\varphi}(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(at+r) - f(at-r)}{r} = 2f'(at),$$

и, согласно (249),

$$f'(\pm r) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{a} \bar{\Phi}(r) \pm \frac{d[r\bar{F}(r)]}{dr} \right\},$$

то для всех положительных значений  $t$  следует:

$$\varphi_t(0) = t\bar{\Phi}(at) + \frac{d[t\bar{F}(at)]}{dt}. \quad 250$$

Это уравнение дает потенциал смещения  $\varphi$  в какой-нибудь точке жидкости в какой-нибудь момент  $t$ , в зависимости от значений (244) для  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  при  $t=0$  на поверхности шара, описанного вокруг точки радиусом  $at$ . Например, если колебания вызваны возмущением равновесия, которое сначала ограничено замкнутой областью жидкости, „очагом возмущения“, то какая-нибудь точка, находящаяся вне очага возмущения, подвергнется

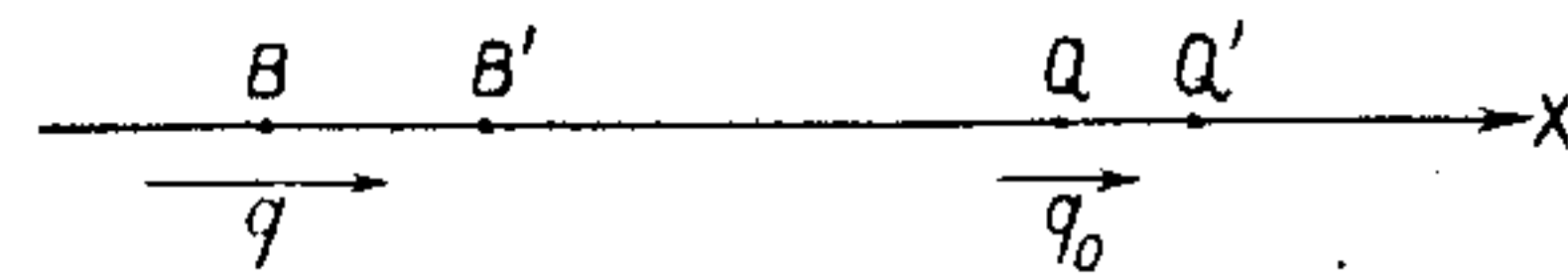
волне возмущения лишь по истечении промежутка времени, необходимого для того, чтобы расстояние до ближайшей точки очага возмущения могло быть пройдено со скоростью  $a$ . С другой стороны, движение прекратится вполне лишь по истечении промежутка времени, в течение которого может быть пройдено со скоростью  $a$  расстояние до самой отдаленной точки очага возмущения. То же самое относится и к точке, лежащей внутри очага возмущения. Итак, начальное возмущение распространяется во все стороны от очага с начальной скоростью  $a$ , а внутри жидкости образуется непрерывно увеличивающаяся область покоя, начиная с той точки, расстояние которой от наиболее удаленной точки очага возмущения наименьшее.

Уравнение (250) относится не только к потенциалу смещения, но и к каждому компоненту смещения или скорости, а также к объемному расширению и давлению, и вообще к каждой величине, которая удовлетворяет волновому уравнению (222).

**§ 50.** В заключение последуем влиянию, которое оказывает движение источника звука или наблюдателя на высоту слышимого тона. Существование такого влияния следует из того, что высота тона обусловлена числом волн, попадающих в ухо в течение единицы времени, а это число зависит от того, остается ли неизменным расстояние между наблюдателем и источником звука, или изменяется. Но было бы неправильно предположить, что высота тона зависит только от относительного движения источника звука и наблюдателя. Положим, например, что источник звука неподвижен, а наблюдатель удаляется от него со скоростью звука; тогда наблюдатель вовсе ничего не услышит, так как звуковые волны не достигают его. Но зато звуковые волны всегда достигнут наблюдателя, если он сам неподвижен, а источник звука удаляется от него с любой скоростью. Основание для этого различия состоит не в том, что оно имеет какое-либо отношение к абсолютному движению, — „абсолютное“ движение вообще не имеет смысла, — а в следующем обстоятельстве: при распространении звука играет существенную роль та среда, в которой звук распространяется, например, воздух, и поэтому необходимо принимать во внимание движение относительно воздуха. Правила, которые определяют это явление, обычно формулируются под названием „принципа Доплера“, хотя мы имеем здесь дело, очевидно, не с принципом, а просто с элементарными правилами кинематики.

Допустим, что источник звука  $Q$ , который испускает в единицу времени  $\nu_0$  колебаний и наблюдатель  $B$  оба движутся вдоль

оси  $x$ , первый со скоростью  $q_0$ , второй — со скоростью  $q$  относительно воздуха, который мы считаем неподвижным. Источник звука находится с положительной стороны (справа) от  $B$ . Тогда в случае  $q > q_0$  наблюдатель приближается к источнику звука.



Черт. 10.

Каково будет число колебаний тона, слышимого теперь наблюдателем?

Рассмотрим сперва частный случай, когда

источник  $Q$  неподвижен, а наблюдатель  $B$  приближается к нему со скоростью  $q$ . В единицу времени наблюдатель проходит расстояние  $BB' = q$ . Если бы он оставался в  $B$ , то за это время до него дошло бы  $\nu_0$  волн. Но так как он двигался навстречу волнам, то, кроме этих  $\nu_0$  волн до него дошли также все те волны, которые укладываются на расстоянии  $BB'$ , т. е.  $\frac{q}{\lambda_0}$ , или, согласно (189),  $\frac{q\nu_0}{a}$  волн.

Следовательно, число колебаний слышимого тона равно

$$\nu_0 \left(1 + \frac{q}{a}\right) = \frac{a+q}{\lambda_0} \quad 251$$

Теперь сделаем более общее допущение, что источник звука  $Q$  также движется направо со скоростью  $q_0$ . Тогда источник придет по истечении единицы времени в точку  $Q'$  причем  $QQ' = q_0$ . Из звуковых волн, которые вышли в течение этого времени от источника по направлению к  $B$ , первая волна прошла расстояние  $a$  от  $Q$ , а последняя находится в точке  $Q'$ . Все это расстояние  $a + q_0$  равномерно заполнено волнами. Так как имеется всего  $\nu_0$  волн, то длина волны равна  $\frac{a+q_0}{\nu_0} = \lambda$ . Если подставить эту длину волны  $\lambda$  в уравнение (251) вместо  $\lambda_0$ , то мы получим число колебаний слышимого тона:

$$\nu = \frac{a+q}{a+q_0} \cdot \nu_0. \quad 252$$

Полученная формула представляет собою общее выражение принципа *Допплера* для рассмотренного случая. Если, например, наблюдатель и источник звука движутся с одинаковой скоростью, так что расстояние между ними остается постоянным, то  $\nu = \nu_0$ , и движение не оказывает влияния на высоту тона. Но если

расстояние между наблюдателем и источником изменяется, то получаются различные результаты в зависимости от того, неподвижен ли наблюдатель или источник. Если наблюдатель удаляется от неподвижного источника со скоростью звука, то  $q = -a$ , и  $q_0 = 0$ , следовательно  $\nu = 0$ . Если же источник удаляется от неподвижного наблюдателя со скоростью звука, то  $q_0 = a$ ,  $q = 0$ , следовательно  $\nu = \frac{\nu_0}{2}$ , в согласии со сказанным выше.

Только в том случае, если  $q$  и  $q_0$  малы по сравнению с  $a$ , то в первом приближении имеем:

$$\nu = \left(1 + \frac{q - q_0}{a}\right) \nu_0. \quad 253$$

Тогда уже играет роль только разность скоростей, т. е. относительное движение источника звука и наблюдателя.



ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

\*

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 51. От частного случая движений с бесконечно малыми деформациями перейдем к более общему случаю движений с конечными деформациями. В нашем изложении мы будем непосредственно исходить из того, что было сказано в § 2 о произвольном конечном движении непрерывно протянутого материального тела. Чтобы представить это движение, мы снова воспользуемся уравнениями (1) и (1а), при помощи которых вычисляется место  $(x, y, z)$ , занимаемое материальной точкой  $(a, b, c)$  в момент  $t$ .

Обратно, разрешив уравнения (1) относительно  $a, b, c$ , получим уравнения вида;

$$\left. \begin{aligned} a &= f'(x, y, z, t), \\ b &= \varphi'(x, y, z, t), \\ c &= \psi'(x, y, z, t), \end{aligned} \right\} \quad 254$$

которые дают ответ на вопрос, какая материальная точка  $(a, b, c)$  находится в месте  $(x, y, z)$  в момент  $t$ .

Противопоставление уравнений (1) и (254) соответствует противопоставлению двух точек зрения, которое проходит через всю гидродинамику и придает ей характер дуализма: „субстанциальной“ (вещественной) и „локальной“ (местной) точки зрения. Согласно первой из них, рассматривают определенную материальную точку  $(a, b, c)$  или определенную материальную систему и ставят вопрос об изменениях ее в пространстве.

Согласно второй точке зрения, рассматривают определенную точку пространства  $(x, y, z)$  или определенную часть пространства и ставят вопрос о тех материальных точках, которые проходят через эту точку или вступают в эту часть пространства. При субстанциальной точке зрения за независимые переменные берут  $a, b, c, t$ , при локальной точке зрения —  $x, y, z, t$ .

Чтобы подчеркнуть это различие также в обозначениях, мы будем обозначать в дальнейшем дифференциалы, относящиеся к независимым переменным  $a, b, c, t$ , с помощью прямого  $d$ , а дифференциалы, относящиеся к независимым переменным  $x, y, z, t$ , с помощью круглого  $\delta$ . Тогда, например  $\frac{dx}{dt} = u$  обозначает компонент по  $x$  скорости материальной точки  $(a, b, c)$ , между тем, как  $\frac{\delta x}{\delta t} = 0$ . Далее,  $\frac{du}{dt}$  есть компонент по  $x$  ускорения, между тем как  $\frac{\delta u}{\delta t}$  относится к разнице в скоростях тех двух материальных точек, которые находятся в месте  $(x, y, z)$  в момент  $t$  и в момент  $t + \delta t$ . Так, например, при стационарном (§ 62) истечении жидкости из сосуда, повсюду  $\frac{\delta u}{\delta t} = 0$ , между тем, как ускорение  $\frac{du}{dt} \neq 0$ . Вообще, между этими двумя величинами существует соотношение:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{\delta x} \cdot u + \frac{du}{\delta y} \cdot v + \frac{du}{\delta z} \cdot w. \quad 255$$

§ 52. Что касается чисто кинематической стороны рассматриваемых движений, то понятно, что здесь сохраняют свою годность все законы, выведенные в первой главе этой книги. Мы воспользуемся в особенности теми из них, которые относятся к произвольному бесконечно малому изменению и были формулированы в § 12. Ибо каждое движение можно привести к бесконечно малому изменению, если рассматривать его в течение бесконечно малого промежутка времени, от  $t$  до  $t + \tau$ . В этом случае можно пользоваться всеми формулами § 12, с тем лишь различием, что теперь координаты материальной точки до изменения обозначаются не через  $a, b, c$ , а  $x, y, z$ , и компоненты бесконечно малого смещения суть не  $u, v, w$ , а  $u\tau, v\tau, w\tau$ , где  $u, v, w$  обозначают конечные компоненты скорости. Согласно сказанному, девять бесконечно малых коэффициентов  $\lambda, \mu, \nu$  (57), которые характеризуют вращение и деформацию материальной частицы, также пропорциональны элементу времени.

Чтобы получить возможность производить вычисления над конечными величинами, разделим все эти бесконечно малые величины на  $\tau$ , т. е. введем вместо бесконечно малых компонентов поступательного перемещения, вращения и деформации конечные компоненты скорости поступательного перемещения, скорости вращения и скорости деформации, а для обозначения их возьмем те же буквы, как и в § 12. Поэтому отныне буквы

$$u, v, w; \xi, \tau, \zeta; x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y \quad 256$$

будут обозначать соответствующие компоненты скоростей. Между ними и координатами  $x, y, z$  существуют соотношения такого же вида, как и прежние соотношения (59), (60), (61) и т. д.

Скорость расширения объема материальной частицы

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{q}$$

определяет также изменение плотности ее. Ибо мы имеем так же как в (213а), для изменения материальной частицы первоначального объема  $dV$ , происшедшего в течение времени  $dt$ :

$$dV \cdot k = dV \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt \right] \cdot \left( k + \frac{dk}{dt} dt \right).$$

Отсюда:

$$k \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{dk}{dt} = 0, \quad 257$$

или, ввиду того, что

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial x} u + \frac{\partial k}{\partial y} v + \frac{\partial k}{\partial z} w + \frac{\partial k}{\partial t}, \quad 258$$

получим:

$$\frac{\partial(ku)}{\partial x} + \frac{\partial(kv)}{\partial y} + \frac{\partial(kw)}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0. \quad 259$$

Интересно вывести это равенство, которое часто называют „уравнением непрерывности“, исходя не из субстанциальной, а из локальной точки зрения. Рассмотрим некоторый конечный объем, ограниченный каким-либо образом. Вся масса, заключенная в нем в момент  $t$ , равна  $\int k d\tau$ , а изменение ее в течение времени равно:

$$dt \cdot \int \frac{\partial k}{\partial t} d\tau.$$

С другой стороны, это изменение равно алгебраической сумме масс всех тех частиц тела, которые входят внутрь объема через его поверхность в течение времени  $dt$ . Но через элемент поверхности  $d\sigma$  с внутренней нормалью  $\nu$  проникает в течение  $dt$  следующая масса:

$$d\sigma \cdot k \cdot (u \cos(\nu x) + v \cos(\nu y) + w \cos(\nu z)) \cdot dt. \quad 260$$

Это — масса (косоугольного) цилиндра плотности  $k$ , с площадью основания  $d\sigma$  и длиной образующей  $\mathbf{q} \cdot dt$ . Следовательно, имеем уравнение:

$$\int \frac{\partial k}{\partial t} d\tau = \int d\sigma \cdot k \cdot (u \cos(\nu x) + v \cos(\nu y) + w \cos(\nu z)),$$

или, согласно (78),

$$\int \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku)}{\partial x} + \frac{\partial(kv)}{\partial y} + \frac{\partial(kw)}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Это уравнение остается годным и в том случае, если мы уменьшим объем до размеров одного элемента объема, откуда получится (259).

Уравнение непрерывности можно отнести также, вместо бесконечно малого промежутка времени  $dt$ , к конечному промежутку  $t$ , если положить, что масса элемента тела в момент  $t$  равна массе того же элемента тела в момент 0, и воспользоваться выражением (51) функционального определителя для изменения объема. Тогда

$$dV_0 \cdot k_0 = dV_0 \cdot D \cdot k,$$

причем значок 0 показывает, что нужно положить  $t = 0$ . Следовательно:

$$D \cdot k = k_0, \text{ или } \frac{d(Dk)}{dt} = 0. \quad 261$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, смотря по надобности, той или иной формой уравнения непрерывности.

§ 53. Теперь перейдем к выводу динамических уравнений движения. Если мы хотим сохранить введенную в § 21 гипотезу „совершенной упругости“, т. е., что давление зависит только от деформации в данный момент, также и для произвольных конечных деформаций, то мы вынуждены будем в дальнейшем



рассматривать только жидкости и газы: при непрерывно возрастающей деформации в твердом теле будет раньше или позже перейден предел упругости.

Поэтому настоящая третья часть книги представляет собою область гидродинамики (включая аэродинамику).

Подставим, как в § 44:

$$Y_z - Z_x = X_y = 0; \quad X_x = Y_y = Z_z = p = f(k). \quad 261a$$

Получим из (83) основные уравнения гидродинамики:

$$\left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) k - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \dots \quad 262$$

Последние уравнения можно написать еще в более простом виде, если допустить, что массовая сила имеет потенциал, т. е.

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad 263$$

и, кроме того, ввести функцию давления или плотности

$$P = \int \frac{dp}{k}. \quad 264$$

в которой остается неопределенной только добавочная постоянная. Тогда уравнения (262) можно написать в таком виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \dots \quad 265$$

или в векторальной форме:

$$\dot{q} + \text{grad}(V + P) = 0. \quad 266$$

Между тем, эти уравнения не так просты, как кажется с первого взгляда, так как координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  входят в них один раз (в ускорении) в качестве зависимых переменных, а другой раз (в падении потенциала и давления) в качестве независимых переменных. Если же производить вычисления, то обычно необходимо провести единую точку зрения, т. е. пользоваться повсюду либо субстанциальным, либо локальным способом рассмотрения. В зависимости от этого получаются две различных формы

равнений движения, которые построены сложнее, чем (265) или (266).

Чтобы провести субстанциальную точку зрения, умножим три уравнения (265) по очереди на  $\frac{dx}{da}$ ,  $\frac{dy}{da}$ ,  $\frac{dz}{da}$ .

Тогда получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{da} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{da} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{da} + \frac{dV}{da} + \frac{dP}{da} = 0, \quad 267$$

и аналогичные уравнения для  $b$  и  $c$ .

Это так называемые уравнения Лагранжа. Дополнением к ним является уравнение непрерывности в субстанциальной форме (261).

С другой стороны, при локальной точке зрения, мы получим из (265), с помощью (255):

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad 268$$

и два соответствующих уравнения для  $y$  и  $v$  и для  $z$  и  $w$ .

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера. К ним относится локальная формулировка уравнения непрерывности (259).

Как мы видим, уравнения движения сделались не только длиннее, благодаря этим преобразованиям, но также, — что существенно, — потеряли свой линейный характер. Это обстоятельство и сообщает гидродинамическим проблемам свойственные им математические трудности.

**§ 54.** Первое приложение, которое мы дадим уравнениям гидродинамики, будет применение и подтверждение принципа сохранения энергии. При этом мы будем целиком руководиться методом, примененным в § 23 для бесконечно малых деформаций: будем исходить из уравнения энергии (89) и подставим входящие в него величины, — кинетическую энергию  $L$ , потенциальную энергию  $U$ , внешнюю работу  $A$ , — по образцу уравнений (90), (91) и (92). Но нужно помнить, что компоненты смещения материальной точки, происходящего в течение времени  $dt$ , обозначаются теперь не через  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$ , а через  $u \cdot dt$ ,  $v \cdot dt$ ,  $w \cdot dt$ . Кроме того теперь, когда плотность  $k$  подвергается конечным изменениям, удобнее относить потенциальную энергию не к элементам объема, а к элементам массы. Таким путем, мы получим из (90):

$$L = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) k \, d\tau. \quad 269$$

из (91):

$$U = \int F \cdot k \, d\tau, \quad 270$$

где  $F$  обозначает потенциальную энергию единицы массы, зависящую только от  $k$  или ( $p$ ). Из (92) получим:

$$A = dt \cdot \int (Xu + Yv + Zw)k \, d\tau + dt \cdot \int (X_x u + Y_y v + Z_z w) d\sigma, \quad 271$$

причем, согласно (74),

$$X_x = p \cos(\gamma x), \quad Y_y = p \cos(\gamma y), \quad Z_z = p \cos(\gamma z). \quad 272$$

Составляя дифференциалы  $dL$  и  $dU$  по времени, будем иметь в виду, что произведение  $k \, d\tau$ , масса элемента тела, не зависит от времени. В таком случае получим из (269):

$$dL = dt \cdot \int \left( u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right) k \, d\tau,$$

и из (270):

$$dU = dt \int \frac{dF}{dt} \cdot k \, d\tau;$$

далее, из (271) и (272), при помощи преобразования (78):

$$A = dt \cdot \int (Xu + Yv + Zw)k \, d\tau - dt \int \left( \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right) d\tau. \quad 272a$$

Если подставить эти выражения в уравнение энергии (89), принимая во внимание значение компонентов ускорения из (262), то ряд членов в обеих частях уравнения сократится, и останется соотношение:

$$\int \frac{dF}{dt} k \, d\tau = - \int p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau,$$

или, так как это уравнение имеет место также для одного элемента объема  $d\tau$ , то принимая во внимание (257), имеем:

$$dF = \frac{p}{k^2} dk. \quad 273$$

Таким образом требования принципа сохранения энергии выполняются тогда и только тогда, если потенциальная энергия единицы массы равна:

$$F = \int \frac{p}{k^2} dk = - \int p d \left( \frac{1}{k} \right). \quad 274$$

где  $\frac{1}{k}$  есть объем единицы массы (удельный объем). Вместо последнего уравнения можно написать, произведя интегрирование по частям и подставив функцию  $P$  из (264):

$$F = - \frac{p}{k} + \int \frac{dp}{k} = - \frac{p}{k} + P. \quad 275$$

Если потенциальная энергия известна как функция плотности или удельного объема, то отсюда можно непосредственно вычислить зависимость давления  $p$  от плотности. Ибо из (274) следует:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = - p, \quad 276$$

где  $v$  временно обозначает удельный объем. Это соотношение находится в очевидной аналогии с выражениями (97). Последние являются более общими, поскольку обнимают также и сдвигающие силы, и в то же время более частными, поскольку относятся лишь к бесконечно малым деформациям.

В частном случае, для несжимаемой жидкости,  $k = \text{const.}$ , поэтому, согласно (264):

$$P = \frac{p}{k}, \quad 277$$

или, согласно (275):

$$F = 0,$$

т. е. несжимаемая жидкость не обладает потенциальной энергией. Этот результат находится в согласии с такого рода соображением: несжимаемость жидкости можно рассматривать, подобно перастяжимости нити (I § 107) как наложенную связь между координатами частиц тела (объемное расширение равно нулю), независимо от величины сил давления; обусловленные таким образом силы связи никогда не совершают работы [I (314)].

Отметим еще для позднейшего применения, частное выражение, получающееся из (271), (272) и (272a), для работы внешнего



давления, действующего *равномерно* во всех точках поверхности, при любом изменении:

$$\begin{aligned} A &= dt \cdot p \int \left( u \cos(\gamma x) + v \cos(\gamma y) + w \cos(\gamma z) \right) d\sigma = \\ &= - dt \cdot p \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Иначе, так как  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt$  есть расширение элемента объема  $d\tau$ , происшедшее в течение времени  $dt$ , то

$$A = -p \cdot dV, \quad 278$$

где  $dV$  обозначает изменение объема всей массы жидкости.

§ 55. Переходя к частным применениям законов гидродинамики, поставим, прежде всего, вопрос об условиях *равновесия*. Для этого получим, проинтегрировав уравнение (265):

$$V + \int \frac{dp}{k} = \text{const.} \quad 279$$

Следовательно, при равновесии поверхности уровня массовых сил (I, § 40),  $V = \text{const.}$ , суть в то же время поверхности постоянного давления и постоянной плотности. Если две различные жидкости соприкасаются друг с другом, то на пограничной поверхности плотность  $k$  вообще претерпевает скачок; напротив, давление  $p$  изменяется непрерывно при всех обстоятельствах, согласно закону равенства действия и противодействия. Если на поверхность жидкости действует равномерное внешнее давление то давление жидкости постоянно также на границе, и наружная поверхность есть поверхность постоянного потенциала массовых сил. В особенности это верно в том частном случае, когда внешнее давление равно нулю или давлению атмосферного воздуха, и жидкость имеет, как говорят, „свободную“ поверхность. От этого закона происходит название поверхностей уровня.

Если постоянная интегрирования в уравнении (279) определена по условиям на поверхности, то тем самым дана величина давления повсюду внутри жидкости, совершенно независимо от того, как ограничена жидкость в остальной части, т. е. независимо от величины и формы сосуда, в котором она находится. Например, если единственная массовая сила, есть вес самой

жидкости, действующий в направлении отрицательной оси  $z$ , то, согласно (67),

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z k d\tau = -g k d\tau,$$

и согласно (263),

$$V = gz + \text{const.} \quad 280$$

Поэтому (279) переходит в:

$$\int \frac{dp}{k} + gz = \text{const.} \quad 281$$

и для *несжимаемой* жидкости:

$$p = \text{const.} - kgz. \quad 282$$

Таким образом давление одинаково во всех точках, лежащих на одинаковой высоте, и растет с уменьшением высоты пропорционально разности высот.

В уравнении (282) содержатся законы сообщающихся сосудов, действия ливеров, барометров и манометров с жидкостью.

Например, для ртутного барометра пусть обозначает  $z=0$  уровень открытой поверхности, подверженной действию внешнего давления  $p_0$ ;  $z=h$  — высота столба жидкости, граничащего с вакуумом.

$$\text{При } z=0, \quad p=p_0.$$

$$\text{При } z=h, \quad p=0.$$

Поэтому, на основании (282):

$$p_0 = kgh. \quad 283$$

Величину  $p_0$  определяют как „давление в одну атмосферу“ при:

$$k = 13,956 \text{ [г см}^{-3}\text{]}, \quad g = 980,6 \text{ [см сек}^{-2}\text{]}, \quad h = 76 \text{ [см]}.$$

Отсюда

$$p_0 = 1\,013\,250 \text{ [гп см}^{-1}\text{ сек}^{-2}\text{]}. \quad 284$$

Вместо атмосфер, давление измеряют часто также по соответствующей величине  $h$  („миллиметры ртутного столба“) в уравнении (283), разделив  $p$  на  $kg$ .

§ 56. Перейдем теперь к условиям равновесия для *сжимаемой* жидкости, например, для столба воздуха произвольной высоты.

Тогда требуется знать функцию  $f(k)$  в (211). Если можно считать, что температура воздуха всюду одинакова, напр.  $0^\circ\text{C}$ , то можно положить

$$p = ck \quad 285$$

где  $c$  определяется из того условия, что при давлении  $p_0$ , равном одной атмосфере,  $k = k_0 = 0,001293 [\text{г см}^{-3}]$ , т. е.

$$c = \frac{p_0}{k_0} \quad 286$$

Отсюда получим, по (281), произведя интегрирование и зная, что  $z = 0$  при  $p = p_0$ :

$$z = \frac{p_0}{gk_0} \cdot \ln \frac{p_0}{p} \quad 287$$

Это так называемая барометрическая формула высоты для изотермического равновесия, при помощи которой находят высоту  $z$ , соответствующую давлению воздуха  $p$ . Если подставить числовые данные и ввести десятичные логарифмы, то формула гласит:

$$z = 18\,400 \log_{10} \frac{p_0}{p} [\text{метр}]. \quad 288$$

В отношении  $p_0 : p$  удобнее всего измерять давление в миллиметрах ртутного столба.

В свободной атмосфере лишь в редких случаях осуществляется допущение о постоянстве температуры, так как выравнивание температур между различными слоями воздуха при помощи теплопроводности происходит довольно медленно и постоянно нарушается воздушными течениями. Тогда формула (285) вместе со следствиями из нее теряет вообще свое значение, так как давление зависит не только от плотности, но и от температуры. Но не следует думать, что постоянство температуры есть необходимое условие для применения изложенной теории, в частности для применения гипотезы о совершенной упругости (§ 21). Ибо эта гипотеза не требует, чтобы температура оставалась постоянной, а только, чтобы давление  $p$  зависело только от плотности  $k$ . Температура может изменяться при этом, но, со своей стороны, должна быть целиком определена плотностью. Важный случай, при котором осуществлено такое условие, имеет место тогда, когда исключена возможность теплопроводности, т. е.

когда все изменения объема происходит не „изотермически“ при постоянной температуре, а „адиабатически“, при отсутствии перехода теплоты от одной частицы вещества к другой. Изотермические процессы соответствуют предельному случаю бесконечно большой теплопроводности вещества, адиабатические процессы соответствуют бесконечно малой теплопроводности. В процессах последнего рода давление также зависит исключительно от плотности, поэтому и для них имеет место уравнение совершенной упругости (211), но функция  $f(k)$  уже не изотермическая (285), а адиабатическая:

$$p = c'k^\gamma, \quad 289$$

где постоянная  $\gamma$  равна 1,405 для воздуха, а коэффициент  $c'$  получается из уравнения:

$$c' = \frac{p_0}{k_0^\gamma} \quad 290$$

Таким образом в адиабатических процессах давление быстрее возрастает при сжатии и убывает при расширении, чем в изотермических процессах. Это происходит от того, что воздух нагревается при адиабатическом сжатии и охлаждается при адиабатическом расширении.

Если подставить выражение (289) в (281) и произвести соответствующие действия, то получится барометрическая формула при адиабатическом равновесии:

$$z = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_0}{gk_0} \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right), \quad 291$$

или, если воспользоваться численными данными:

$$z = 27\,700 \cdot \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{0,288} \right) [\text{метр}]. \quad 292$$

Такое убывание давления с высотой соответствует допущению, что каждый слой воздуха имеет ту температуру, которая получается при адиабатическом расширении воздуха от  $0^\circ\text{C}$  и атмосферного давления до плотности данного слоя.

Еще более важную роль, чем в состояниях равновесия, адиабатические процессы играют в явлениях колебательных, так как повышения и понижения температур, вызванные попеременным сжатием и расширением, следуют друг за другом с такой быстротой,



что можно совершенно пренебречь теплопроводностью, которая и без того очень незначительна у газов. Поэтому нужно при вычислении скорости звука в газах из формулы (215) применить формулу (289), которая, в связи с формулой (290) дает для скорости звука в газе плотности  $k_0$  при давлении  $p_0$  следующее выражение:

$$a^2 = \frac{\gamma p_0}{k_0} \quad 293$$

Для воздуха при  $0^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении получится, если подставить численные данные:

$$a = 332 \left[ \frac{\text{метр}}{\text{сек}} \right]$$

в согласии с результатами измерений.

Изотермическая сжимаемость (285) дает по (215)

$$a^2 = \frac{p_0}{k_0} \quad 294$$

и для воздуха при тех же температуре и давлении:

$$a = 280 \left[ \frac{\text{метр}}{\text{сек}} \right]$$

т. е. значительно меньше.

Для капельных жидкостей разница между адиабатической и изотермической сжимаемостью незначительна.

**§ 57.** В качестве следующего примера применения уравнений гидродинамики рассмотрим несжимаемую жидкость, вращающуюся вокруг оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В этом случае движение всех материальных точек задано наперед. Примем за ось вращения ось  $z$ . Тогда положение какой-либо точки  $a, b, c$  жидкости в момент  $t$  получится из уравнений (11), если подставить в них:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(\omega t), & \alpha_2 &= -\sin(\omega t) & \alpha_3 &= 0, \\ \beta_1 &= \sin(\omega t), & \beta_2 &= \cos(\omega t) & \beta_3 &= 0, \\ \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= 0 & \gamma_3 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad 295$$

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t), \\ y &= a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t), \\ z &= c. \end{aligned} \right\} \quad 296$$

Если дважды „субстанциально“ продифференцировать эти уравнения по времени  $t$ , то получится:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Подставив в уравнения движения (265), имеем:

$$-\omega^2 x + \frac{\partial(V+P)}{\partial x} = 0, \quad -\omega^2 y + \frac{\partial(V+P)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(V+P)}{\partial z} = 0.$$

Проинтегрировав и приняв во внимание (277), выводим окончательно:

$$p = \frac{1}{2} k \omega^2 \rho^2 - kV + \text{const.}, \quad 297$$

где  $\rho$  — расстояние точки воздействия  $(x, y, z)$  от оси вращения. Применим это уравнение к нескольким интересным случаям.

**§ 58.** Пусть несжимаемая тяжелая жидкость вращается с постоянной скоростью  $\omega$  в полном открытом сверху круговом цилиндре с горизонтальным дном. Положим, например, что мы сильно размешиваем ложкой воду в стеклянном стакане, а затем сразу вынимаем ложку. Чтобы избежать тормозящего действия трения о стенки сосуда, можно допустить, что сосуд тоже вращается. Тогда при равномерном вращении вовсе не будет трения, так как движение происходит без деформации.

Из уравнений (280) и (297) получится:

$$p = \frac{1}{2} k \omega^2 \rho^2 - kgz + \text{const.} \quad 298$$

Вид свободной поверхности жидкости получится, согласно § 55, из условия  $p = \text{const.}$  Следовательно,

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 - gz = \text{const.}$$

Это уравнение параболоида вращения, осью которого служит ось  $z$ . Если подставить  $z = z_0$  при  $\rho = 0$ , то получится:

$$z = z_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \rho^2. \quad 299$$

Таким образом поверхность жидкости ниже всего в середине сосуда и повышается к краям пропорционально квадрату ско-

рости вращения. Величина  $z_0$ , и вместе с тем, абсолютное значение понижения посредине вычисляется независимо от размеров внешнего давления, по объему жидкости, который одинаков в состоянии вращения и в состоянии покоя. Если неподвижная жидкость заполняет сосуд до уровня  $z = h$ , то объем выражается соотношением:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} z \cdot \rho d\rho d\varphi = R^2 \pi \cdot h.,$$

где  $R$  обозначает радиус цилиндра.

Отсюда, при помощи формулы (299), получается.

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \quad 300$$

Второй член правой части дает величину понижения уровня на жидкости посредине.

Повышение у края равно значению  $z - h$  при  $\rho = R$ . Согласно (299),

$$z - h = \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \quad 301$$

Таким образом повышение уровня у края равно понижению посредине.

В горизонтальном сечении ( $z = \text{const}$ ) давление переменное согласно (298); в середине наименьшее, у края наибольшее. Это легко наблюдать, если насыпать на дно неподвижного сосуда песок, который настолько тяжел, что не увлекается вращением жидкости. Когда жидкость вращается, песчинки устремляются к середине дна под влиянием падения давления.

**§ 59.** Положим, что несжимаемая жидкость, частицы которой тяготеют к неподвижному центру по закону *Пьютона*, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр. Требуется определить форму свободной поверхности. Главный интерес этой задачи заключается в том, что она родственна с проблемой о сжатии земли у полюсов. Поэтому мы возьмем в качестве примера данные, относящиеся к земле.

Если обозначить через  $r$  расстояние от точки воздействия до центра  $O$ , то гравитационный потенциал равен, согласно [1 (111)]:

$$V = -\frac{c}{r},$$

а сила притяжения на единицу массы (ускорение силы тяжести) равна, согласно (67) и (263):

$$\frac{\delta V}{\delta r} = \frac{c}{r^2}.$$

Чтобы определить постоянную  $c$ , допустим, что ускорение силы тяжести равно  $g_0$  на расстоянии  $r_0$ . Тогда имеем:

$$g_0 = \frac{c}{r_0^2},$$

и вообще

$$V = -\frac{g_0 r_0^2}{r}. \quad 302$$

Это дает, согласно (297), следующее уравнение для формы свободной поверхности:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 + \frac{g_0 r_0^2}{r} = \text{const.},$$

или, если положить, что на поверхности  $r = r_0$  (полярный радиус) при  $\rho = 0$ ;

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 = g_0 r_0^2 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right). \quad 303$$

Введем вместо  $\rho$  угол  $\varphi$  (географическая широта) при помощи соотношения:  $\rho = r \cos \varphi$ . Тогда (303) примет вид:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\omega^2}{2g_0 r_0^2} \cdot r^2 \cos^2 \varphi. \quad 304$$

В частном случае, когда  $\omega = 0$  (неподвижная жидкость),  $r$  постоянно, т. е. поверхность есть шар. Поэтому при малых значениях  $\omega$  поверхность есть сжатый у полюсов сфероид, мало отличающийся по форме от шара. Уравнение сфероида можно написать в первом приближении следующим образом:

$$r = r_0 \left( 1 + \frac{\omega^2 r_0}{2g_0} \cos^2 \varphi \right). \quad 305$$

Величина сжатия равна

$$\frac{r_{\text{max}} - r_0}{r_0} = \frac{\omega^2 r_0}{2g_0}. \quad 306$$



Это дает для земного шара, при

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} [\text{сек}^{-1}], \quad r_0 = 6,356 \cdot 10^8 [\text{см}], \quad g_0 = 983 \left[ \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right]$$

величину  $\frac{1}{585}$ , между тем как действительное сжатие заметно больше, а именно  $\frac{1}{298}$ .

Разница легко объясняется тем, что частицы земли притягиваются не к центру, а друг к другу, что, конечно, вызывает отклонение от формы шара. Введение взаимного тяготения значительно усложняет задачу, так как выражение потенциала тяготения уже не дано заранее, а само зависит от искомой формы поверхности. Более подробное исследование показало, что задача, формулированная таким образом, не имеет однозначного решения, т. е. возможно несколько различных форм поверхности, в том числе и эллипсоид вращения с определенной величиной сжатия.

Если рассматривать только небольшие значения угловой скорости, а значит, и небольшие отклонения от формы шара, то при взаимном тяготении можно допустить с известным приближением что сила притяжения, действующая на частицу жидкости, прямо пропорциональна расстоянию  $r$  от центра земли, согласно [1(102)], следовательно потенциал пропорционален  $r^2$ . Если произвести вычисление при этом допущении по тому же способу, что и выше, то получится снова выражение (306) для величины сжатия. Это объясняется, очевидно, тем, что при малых отклонениях от формы шара вид закона, по которому  $V$  зависит от  $r$ , не оказывает существенного влияния на величину сжатия.

**§ 60.** Теперь снова возвратимся к обсуждению теории. Прежде всего произведем важное интегрирование уравнений гидродинамики, которое было открыто *Гельмгольцем*. Оно имеет такое же значение для гидродинамики, как принцип площадей для общей механики.

Будем исходить из трех уравнений *Лагранжа* (267), которые соответствуют буквам  $a, b, c$ . Функции  $V$  и  $P$  можно исключить из них, если продифференцировать первое уравнение по  $b$ , второе уравнение по  $a$ , и из одного получившегося уравнения вычесть другое. Произведя эту операцию, мы можем снова получить три уравнения, которые соответствуют буквам  $a, b, c$ .

Произведем сперва вычисление только для уравнения  $a$ . Получается:

$$\frac{d}{db} \left( \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dc} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dc} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dc} \right) - \frac{d}{dc} \left( \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{db} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{db} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{db} \right) = 0.$$

После дифференцирования:

$$\sum_{x,y,z} \frac{dx}{dc} \frac{d}{db} \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) - \frac{dx}{db} \frac{d}{dc} \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0,$$

где знак суммы показывает, что к написанному члену с буквой  $x$  нужно добавить два аналогичные члена с буквами  $y$  и  $z$ . Это выражение можно написать в виде производной по времени  $t$ , а именно:

$$\sum_{x,y,z} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dc} \frac{du}{db} - \frac{dx}{db} \frac{du}{dc} \right) = 0.$$

В этом нужно убедиться, продифференцировав по  $t$ , так как из получившихся четырех членов два сократятся.

Проинтегрировав, получим:

$$\sum_{x,y,z} \frac{dx}{dc} \frac{du}{db} - \frac{dx}{db} \frac{du}{dc} = A, \quad 307a$$

где величина  $A$  зависит только от  $a, b, c$ , а не от  $t$ . Совершенно таким же образом получим выражение (307b)  $= B$  и выражение (307c)  $= C$ , где  $B$  и  $C$  обладают таким же свойством, как  $A$ .

Чтобы преобразовать три уравнения, соответствующие буквам  $a, b, c$ , в уравнения, соответствующие буквам  $x, y, z$ , умножим уравнения (307) последовательно на  $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}$  и сложим. Собрав вместе по несколько членов, часть из которых сократится, а часть может быть написана в виде символа, аналогичного (8), получим:

$$\sum_{a,b,c} \frac{dw}{da} \left[ \frac{dy}{da} \right] - \frac{dw}{da} \left[ \frac{dz}{da} \right] = A \frac{dx}{da} + B \frac{dx}{db} + C \frac{dx}{dc} \quad 308x$$

и соответствующие два уравнения (308y) и (308z).

Согласно (53),

$$\sum_{a,b,c} \frac{dw}{da} \left[ \frac{dy}{da} \right] = D \cdot \frac{dw}{dy},$$

где  $D$  обозначает функциональный определитель (51). Поэтому (308x) примет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{D} \left( A \frac{dx}{da} + B \frac{dx}{db} + C \frac{dx}{dc} \right),$$

а, принимая во внимание с одной стороны (59) и (256), с другой стороны (261), получим:

$$\xi = \frac{k}{2k_0} \left( A \frac{dx}{da} + B \frac{dx}{db} + C \frac{dx}{dc} \right), \quad (309x)$$

и аналогичные уравнения (309y) и (309z) для  $\eta$  и  $\zeta$ .

Чтобы определить значения „постоянных интегрирования“  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , не зависящих от  $t$ , положим в трех уравнениях (309)  $t=0$ . Так как, согласно (1a)

$$\left( \frac{dx}{da} \right)_0 = 1, \quad \left( \frac{dx}{db} \right)_0 = 1, \quad \left( \frac{dx}{dc} \right)_0 = 1,$$

то получится:

$$\xi_0 = \frac{1}{2} A, \quad \eta_0 = \frac{1}{2} B, \quad \zeta_0 = \frac{1}{2} C.$$

Следовательно, вообще

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{k}{k_0} \left( \xi_0 \frac{dx}{da} + \eta_0 \frac{dx}{db} + \zeta_0 \frac{dx}{dc} \right), \\ \eta &= \frac{k}{k_0} \left( \xi_0 \frac{dy}{da} + \eta_0 \frac{dy}{db} + \zeta_0 \frac{dy}{dc} \right), \\ \zeta &= \frac{k}{k_0} \left( \xi_0 \frac{dz}{da} + \eta_0 \frac{dz}{db} + \zeta_0 \frac{dz}{dc} \right). \end{aligned} \quad (310)$$

Из этих уравнений вытекает множество следствий, которые основаны на том, что величины  $k_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  зависят только от  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а не от  $t$ .

Рассмотрим сперва частицу жидкости  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , скорость вращения которой равна нулю в момент  $t=0$ . Тогда соответствующие компоненты  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  обратятся в нуль, и из (310) следует:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Таким образом *частица жидкости, которая не обладает вращением в некоторый момент, сохраняет это свойство во все времена.*

Далее, рассмотрим в момент  $t=0$ , когда  $a$ ,  $b$ ,  $c$  совпадают с  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , такие частицы жидкости  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , для которых все или часть компонентов скорости и вращения отличны от нуля. Мы можем следующим образом составить себе наглядное представление о пространственном расположении этого вектора  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ . Вообразим такое семейство кривых:

$$da : db : dc = \xi_0 : \eta_0 : \zeta_0. \quad (311)$$

Каждая из этих кривых обладает тем свойством, что касательная в какой-либо точке ее совпадает с направлением оси вращения в этой точке. Поэтому такая кривая называется *вихревой линией* жидкости. Проследим и в дальнейшие моменты  $t$  те из материальных точек  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , которые в момент  $t=0$  принадлежат вихревой линии и поэтому связаны между собою уравнением (311). Определим скорости вращения этих точек. Величину и направление скоростей можно получить из уравнений (310). Что касается направления, то, подставив значения  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  из (311), получим:

$$\xi : \eta : \zeta = dx : dy : dz. \quad (312)$$

Это значит, что кривая, образованная в пространстве рассматриваемыми точками, также обладает свойством вихревой линии, или же: *вихревые линии всегда состоят из одних и тех же материальных точек.*

Поэтому вихревая линия представляет собою индивидуальное субстанциальное образование, которое может изменять свое положение и форму во время движения, но никогда не изменяет материального состава и основного свойства, характеризующегося уравнением (312). Вихревая линия может быть замкнутой, или же простирается в бесконечность, или же заканчивается на поверхности жидкости.

Уравнения (310) дают ответ также и на вопрос о скорости вращения (или вихревой скорости)  $\omega$ .

Рассмотрим элемент длины вихревой линии

$$ds_0 = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$$

в момент  $t=0$ . Согласно (311),

$$\frac{\xi_0}{\omega_0} = \frac{da}{ds_0}, \quad \frac{\eta_0}{\omega_0} = \frac{db}{ds_0}, \quad \frac{\zeta_0}{\omega_0} = \frac{dc}{ds_0}.$$



Подставив в (310), имеем:

$$\xi = \frac{k}{k_0} \omega_0 \frac{dx}{ds_0}, \quad \eta = \frac{k}{k_0} \omega_0 \frac{dy}{ds_0}, \quad \zeta = \frac{k}{k_0} \omega_0 \frac{dz}{ds_0}.$$

Следовательно, скорость вращения в момент  $t$ :

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{k}{k_0} \omega_0 \frac{ds}{ds_0}. \quad 313$$

Таким образом скорость вращения в какой-нибудь точке вихревой линии пропорциональна плотности жидкости и длине элемента дуги линии, если элемент дуги все время проходит через одни и те же материальные точки. Если же, например, элемент дуги удлиняется с течением времени, так что образующие его материальные точки удаляются друг от друга, а величина  $k$  остается неизменной, то вихревая скорость возрастает.

Это положение станет еще нагляднее, если изложить его в другой форме. Представим себе какую-нибудь часть поверхности внутри жидкости и проведем через каждую точку ее края вихревую линию. Таким образом мы выделим из жидкости объем, который называется „вихревой нитью“ или „вихревой трубкой“. Боковая поверхность трубки состоит исключительно из вихревых линий, а упомянутая часть поверхности представляет собою сечение трубки. Можно представить себе, что весь объем жидкости состоит целиком из бесконечно тонких вихревых нитей, которые либо замкнуты, либо простираются в бесконечность, либо же оканчиваются на поверхности жидкости. Вихревые нити, подобно вихревым линиям, состоят всегда из одних и тех же материальных точек.

Рассмотрим бесконечно короткий отрезок такой бесконечно тонкой вихревой нити, проведя через две точки одной из линий вихревой нити, два произвольных сечения с площадью  $f$  на расстоянии  $ds$  друг от друга. Проследим за точками, принадлежащими этому отрезку вихревой нити, в разные моменты времени.

Так как масса отрезка вихревой нити неизменна, то:

$$k \cdot f \cdot ds \cdot \cos \vartheta = k_0 \cdot f_0 \cdot ds_0 \cdot \cos \vartheta_0,$$

где  $\vartheta$  обозначает острый угол между нормалью к поперечному сечению и  $ds$ , т. е. осью вихря.

Тогда (313) примет вид:

$$\omega \cdot f \cdot \cos \vartheta = \omega_0 \cdot f_0 \cdot \cos \vartheta_0 = \omega \cdot f_n, \quad 314$$

где  $f_n$  обозначает площадь сечения, нормального к оси вихря. Таким образом произведение вихревой скорости на площадь нормального сечения вихревой нити не изменяется с течением времени.

Но это произведение имеет одинаковую величину также и в различных местах определенной вихревой нити. Ибо, если проинтегрировать по произвольному объему жидкости следующее тождество:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad 315$$

вытекающее из равенств (59), и преобразовать каждый из получившихся при этом объемных интегралов по формуле (78), то мы получим для интеграла, взятого по поверхности, ограничивающей объем:

$$\int \left( \xi \cos(\nu x) + \eta \cos(\nu y) + \zeta \cos(\nu z) \right) d\sigma = \int \omega \cos(\nu, \omega) \cdot d\sigma = 0. \quad 316$$

Если взятый объем жидкости есть отрезок вихревой нити произвольной длины, то все те члены поверхностного интеграла, которые относятся к боковой поверхности нити, обращаются в нуль, так как в каждой точке боковой поверхности нормаль  $\nu$  перпендикулярна к направлению вихревой оси, лежащей на боковой поверхности. Если вихревая нить бесконечно тонка, по конечной длине, с произвольно расположенным начальным сечением  $f$  и конечным сечением  $f'$ , то уравнение (316) приводится к двум членам:

$$\omega \cos(\nu, \omega) \cdot f + \omega' \cos(\nu, \omega') \cdot f' = 0.$$

Если снова обозначить через  $\vartheta$  острый угол между нормалью к поперечному сечению и вихревой осью и, кроме того, принять во внимание, что вихревые оси  $\omega$ ,  $\omega'$  направлены в одну сторону, а внутренние нормали направлены в противоположные стороны, то получится:

$$\omega f \cos \vartheta - \omega' f' \cos \vartheta' = 0, \quad 317$$

что в сочетании с (314) дает такое правило: для бесконечно тонкой вихревой нити произведение вихревой скорости на площадь нормального поперечного сечения имеет одну и ту же величину во всех

точках нити и во всякий момент. Это произведение называется также „моментом“ вихревой нити.

Существование изложенных законов непосредственно связано, очевидно, с допущениями о совершенно упругой жидкости (§ 53) и о существовании силового потенциала (263). Но в природе всегда встречаются более или менее значительные отступления от этих допущений. В результате таких отступлений вихри могут, в противность выведенным законам как появляться, так и исчезать. Подобные отступления обуславливаются явлениями трения и теплопроводности. Под влиянием трения внутри жидкости появляются силы давления, которые зависят не от деформации, а от скорости деформации в данный момент (§ 78), а в результате теплопроводности давление становится зависимым не только от плотности и потому не выполняется равенство (211). Только в предельных случаях бесконечно большой теплопроводности (изотермические процессы) и бесконечно малой теплопроводности (адиабатические процессы) можно, как мы видели в (§ 56), рассматривать жидкость как абсолютно упругую и принимать законы вихревых движений при действии консервативных массовых сил.

## Глава вторая

### БЕЗВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 61. Проинтегрировав общие уравнения гидродинамики, мы познакомились с фундаментальным значением вихревых движений. Поэтому естественно будет в дальнейшем, рассматривая движения жидкости, разделить их на два рода: движения безвихревые (невращательные) и вихревые. Сперва рассмотрим первый род движений. Основное условие безвихревых движений:

$$\operatorname{rot} q = 0, \quad 318$$

или же

$$q = -\operatorname{grad} \varphi, \quad 319$$

т. е., что существует такая функция  $\varphi$ , „потенциал скорости“ частные производные которой по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны соответствующим компонентам скорости [ср. выше (217) и (218)]. Мы знаем из предидущего, что если равенство (318) или (319) имеет место для одного момента времени, то оно имеет место во всякое время. Обычно определяют потенциал скорости  $\varphi$  не с тем знаком, какой мы взяли, и в уравнении (319) ищут знак  $+$ . Но, если мы желаем сохранить аналогию с потенциалом сил и упругим потенциалом, а также с электрическим и термодинамическим потенциалами, то приходится и для потенциала скорости считать направление вектора  $q$  обратным направлению соответствующего градиента. Тогда и скорость, подобно силе в отношении силового потенциала, направлена в сторону *убывающего* потенциала. В выражении потенциала скорости остается по (319), еще аддитивная функция времени, совершенно неопределенная и поэтому не имеющая физического значения.

Удобнее всего рассматривать состояние жидкости в отношении скоростей ее точек в какой-либо момент  $t$ , если построить



поверхности постоянного потенциала скорости  $\varphi = \text{const.}$  и перпендикулярные к ним кривые:

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (320)$$

так называемые „линии тока“, которые указывают направление скорости в каждой ее точке, совершенно аналогично поверхностям уровня и силовым линиям (1 § 40). Так как линия тока идет всегда от более высокого к более низкому потенциалу скорости, то она не может быть замкнутой, если потенциал скорости однозначен и непрерывен. Позднее (§ 68) мы встретим безвихревое движение жидкости с замкнутыми линиями тока, и тогда вынуждены будем сделать вывод, что определенное безвихревое движение может обладать также многозначным или прерывным потенциалом скорости.

Из понятия о линии тока непосредственно вытекает понятие о „нити тока“ или „трубке тока“, которая характеризуется тем, что боковая поверхность ее образована линиями тока. Нить тока относится к линии тока совершенно так же, как вихревая нить относится к вихревой линии. Поверхности постоянного потенциала скорости, понятно, ортогональны к нитям тока.

Если движение жидкости нестационарно, то система линий и нитей тока будет неодинаковой в различные моменты, т. е. линии тока будут изменяться с течением времени. Но следует при этом иметь в виду, что говорить о движении какой-либо определенной линии тока не имеет смысла. Ибо точки жидкости, которые образуют линию тока в определенный момент, уже не обладают этим свойством в другой момент. Поэтому вообще не является возможным сопоставить с линией тока в один момент определенную линию тока в другой момент. В этом заключается принципиальное отличие линий тока от вихревых линий, которые состоят всегда из одних и тех же точек жидкости и поэтому имеют индивидуальное значение.

Так как условие отсутствия вихрей удобнее всего выражается при помощи пространственных координат  $x, y, z$  в качестве независимых переменных, то для изображения безвихревых движений лучше всего подходят уравнения движения в эйлеровой форме (268). Последние можно написать следующим образом, воспользовавшись (319):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

и т. д. Проинтегрировав их по  $x, y, z$ , получим:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t).$$

Как мы уже заметили, в выражении потенциала скорости аддитивная функция времени является произвольной. Поэтому можно написать:

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (321)$$

К этому уравнению нужно присоединить условие непрерывности (259) и соотношение между давлением и плотностью, зависящее от природы жидкости. Тогда мы будем иметь три уравнения, из которых можно определить три величины  $\varphi, p, k$ , как функции независимых переменных  $x, y, z, t$ , воспользовавшись начальными и предельными условиями, соответствующими данному особому случаю.

**§ 62.** Стационарное (установившееся) движение несжимаемой жидкости. Если движение *стационарно*, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения по  $x, y, z$ , получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const.}$$

Если жидкость несжимаемая и тяжелая, то  $P$  принимает значение (277),  $V$  — значение (280) и уравнение (321) переходит в уравнение:

$$p = -\frac{k}{2} (u^2 + v^2 + w^2) - kgz + \text{const.}, \quad (322)$$

а уравнение непрерывности приводится к такому:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (323)$$

Это — известное уравнение Лапласа. Каждое решение этого дифференциального уравнения, не зависящее от  $t$ , представляет возможное в природе безвихревое стационарное (установившееся) движение несжимаемой жидкости, при котором давление

выражается формулой (322). Как мы видим, давление состоит из двух частей, из которых первую часть часто называют гидродинамическим давлением, а вторую, тождественную с (282) — гидростатическим давлением. Гидродинамическое давление зависит только от величины скорости и уменьшается с возрастанием ее. Как давление, так и падение давления не имеют ничего общего с направлением движения жидкости. В следующих параграфах мы познакомимся с интересными примерами этого положения.

Возьмем внутри жидкости какой-нибудь определенный ограниченный со всех сторон объем и проинтегрируем уравнение непрерывности (323) по этому объему. Тогда получим, на основании (82)

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma = 0. \quad 324$$

Это уравнение получит наглядное истолкование, если принять во внимание, что выражение

$$-k \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt = kq, d\sigma dt \quad 325$$

представляет то количество жидкости, которое втекает внутрь объема через элемент поверхности  $d\sigma$  за время  $dt$ . Уравнение (324) гласит, что количество жидкости, втекающей в рассматриваемый объем через все элементы поверхности его, равно в целом нулю, т. е. втекает ровно столько же жидкости, сколько вытекает.

Если рассматриваемый объем представляет собою отрезок трубки тока произвольной длины и произвольного сечения, то те части поверхностного интеграла (324), которые относятся к боковой поверхности трубки, отпадают, и уравнение сводится к правилу, что через каждое сечение трубки тока протекает одинаковое количество жидкости. Это количество характерно для рассматриваемой трубки тока. Отнесенное к единице времени, оно называется „интенсивностью тока“ или „силой тока“ трубки:

$$J = -k \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma, \quad 326$$

где интеграл берется по какому-нибудь произвольному сечению трубки, и направление  $\nu$  должно быть взято в направлении течения.

Если взять сечение, совпадающее с поверхностью  $\varphi = \text{const.}$ , то направление  $\nu$  совпадает с направлением скорости  $q$ , и мы получим:

$$J = k \int q d\sigma. \quad 327$$

§ 63. Для каждой трубки тока можно себе представить, что боковая поверхность ее замкнута твердой стеной, без всякого нарушения движения жидкости, так как предельное условие, существующее для твердой стены, что нормальная составляющая скорости обращается в нуль, всегда осуществлено на боковой поверхности трубки тока. Благодаря этому трубки тока получают непосредственное практическое значение. Если сечение трубки не слишком велико, и скорость течения распределена не слишком неравномерно по величине и направлению в различных точках сечения, как, например, бывает в водопроводных трубах, то можно с известным приближением считать плоскими поверхности постоянного потенциала скорости и вынести  $q$  за знак интеграла в формуле (327). Тогда

$$I = k \cdot q \cdot f, \quad 328$$

где  $f$  обозначает площадь нормального сечения трубки. Так как  $k$  остаются постоянными вдоль всей трубки, то величина скорости обратно пропорциональна сечению  $f$  трубки, или

$$q = \frac{f_0 q_0}{f}, \quad 329$$

если обозначить значком нуль какое-нибудь определенное сечение, например, начальное сечение. Отсюда получится, согласно (322) давление в каком-нибудь сечении  $f$  трубки:

$$p - p_0 = -\frac{k}{2} q_0^2 \left( \frac{f_0^2}{f^2} - 1 \right) + kg(z_0 - z). \quad 330$$

Как мы видим, давление меньше всего в самых узких местах трубки. Поэтому можно в принципе, при данных  $q_0$  и  $f_0$ , сузив должным образом трубку, т. е. уменьшив величину  $f$ , получить любое уменьшение давления, соответственно увеличению скорости. Если в таком узком месте проделать в стенке трубки узкое отверстие, установив таким образом сообщением с наружным воздухом, находящемся при нормальном давлении  $p_0$ , то под



влиянием разности давления  $p_0 - p$  воздух вгонится в трубку и будет унесен жидкостью. Это обстоятельство применяется, например, в гидравлических воздушных насосах. Так называемые распылительные аппараты также основаны на уменьшении давления при возрастании скорости.

Член равенства (330), зависящий от тяжести, также может быть использован для уменьшения давления  $p$ , например, в воздушно-водяном насосе *Бунзена*: где вода падает в вертикальной цилиндрической трубке ( $f = f_0$ ), так что разность давлений в двух местах прямо пропорциональна разности уровней  $z_0 - z$ .

Уравнения (329) и (330) можно использовать также и для того, чтобы по заданной разности давления  $p_0 - p$  в начале и конце трубки найти стационарные скорости  $q_0$  и  $q$ , с которыми жидкость течет в трубке. Вычислим, например, стационарную скорость истечения из трубки, широкой сверху и узкой внизу, полагая, что на верхнем уровне жидкости давление  $p_0$ , а у отверстия давление равно  $p$ . Если пренебречь  $f$  по сравнению с  $f_0$  и обозначить разность высот обеих уравнений через  $h$ , то мы получим из (330) и (329) следующее выражение для скорости истечения:

$$q^2 = 2gh + \frac{2}{k}(p_0 - p). \quad (331)$$

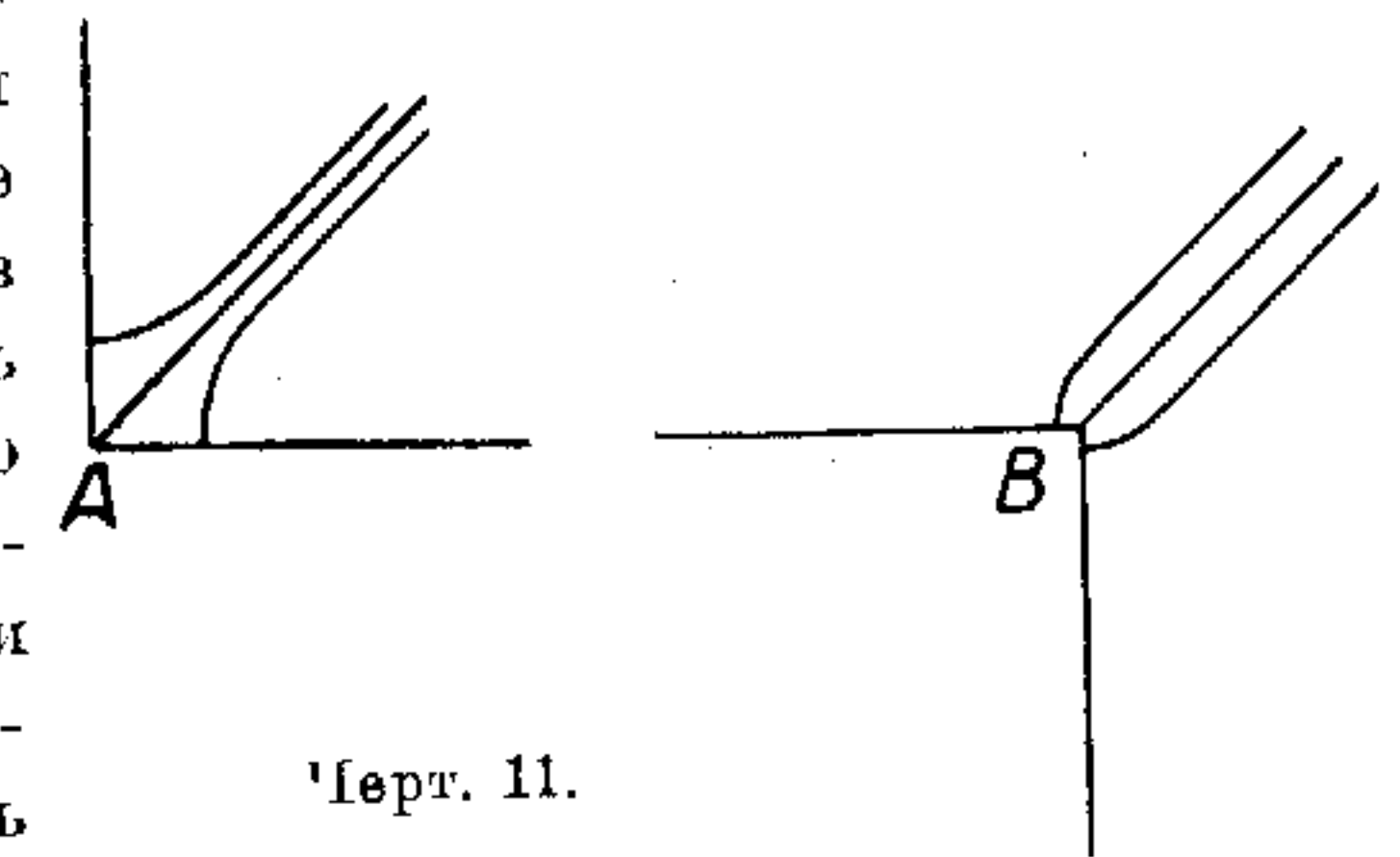
Если давление сверху и снизу одинаково, то  $q = \sqrt{2gh}$ , т. е. скорость истечения равна скорости тела, свободно падающего с высоты  $h$  (теорема *Торичелли*). Введя разность давлений, можно, в зависимости от знака ее, ускорить или замедлить истечение. Но, для того чтобы  $q$  оставалось вещественным, разность давлений не должна быть меньше величины  $-hkg$ . В предельном случае скорость стационарного истечения равна нулю, и мы получим для разности давлений известную барометрическую формулу (283).

В действительности количество вытекающей жидкости значительно (приблизительно на треть) меньше, чем вычисленное по скорости истечения на основании (331) и по площади отверстия  $f$  на основании (328). Это обусловлено главным образом тем обстоятельством, что поверхность  $\varphi = \text{const.}$  у отверстия не плоская и вогнутая, если смотреть снаружи, так как линии тока, приходя изнутри жидкости, сдвигаются около узкого отверстия, подобно образующим конуса у вершины. Поэтому поверхности  $\varphi = \text{const.}$  расположены подобно шаровым поверхностям, концентрически

окружающим вершину конуса. Вследствие этого скорость неодинаково направлена в различных точках отверстия, как мы предполагали, применяя уравнение (328), но линии тока сходятся и поэтому сечение трубки тока еще несколько сжимается за отверстием там, где жидкость образует свободную струю (§ 67). Лучшее приближение к действительности получится, если подставить в уравнение (328) вместо  $f$  не площадь отверстия, а меньшую площадь, которую имеет струя после сжатия, так как там линии тока ближе к параллельному расположению.

Количество вытекающей жидкости можно значительно увеличить, присоединив к отверстию цилиндрическую или, еще лучше, конически расширяющуюся наружу трубку. Главная задача этого приспособления состоит в том, чтобы сделать линии тока у отверстия параллельными или расходящимися, и этим избежать сжатия струи. Подробнее об истечении из конической трубки мы будем говорить в следующем параграфе.

Если стенка трубки не всюду непрерывно изогнута, а образует в каком-либо месте угол, то та линия тока, которая идет вдоль стенки и проходит через вершину угла, имеет в этом месте особую точку, так как направление линии здесь двузначно. Компоненты скорости течения в таком углу равны нулю или бесконечны. Выясним, при каких условиях имеет место каждый из этих случаев. Положим, что стена образует вогнутый угол ( $< \pi$ ), если смотреть со стороны жидкости, как в точке *A* на черт. 11. Тогда поверхности  $\varphi = \text{const.}$ , перпендикулярные к стенке и изображенные на чертеже линиями, расположены таким образом, что, при приближении к *A*, расходятся от особой поверхности потенциала, проходящей через *A*. В таком случае градиент  $\varphi$  и вместе с тем величина скорости в точке *A* обращаются в нуль (ср. § 40), вследствие чего давление  $p$  достигает максимума, согласно (332). Если же стена образует выпуклый, входящий в жидкость угол ( $> \pi$ ), как в точке *B* того же чертежа, то поверхности постоянного потенциала скорости сходятся по направлению к особой точке, градиент  $\varphi$  и скорость равны  $\infty$ , следовательно, давление  $p = -\infty$ , и жидкость



Черт. 11.

должна была бы обладать бесконечно большим сцеплением, чтобы не разорваться.

§ 64. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых простых частных решений уравнения потенциала (323) и соответствующих движений жидкости. Наиболее простое решение состоит в том, что  $\varphi$  зависит линейно от  $x, y, z$ . Ему соответствует равномерное поступательное движение жидкости, которое не представляет для нас интереса.

Более общее решение [согласно 1 (125) и (129)]:

$$\varphi = \sum \frac{\mu_1}{r_1}, \quad 332$$

где  $r_1$  — расстояние точки воздействия от неподвижного центра 1;  $\mu$  — постоянная, свойственная этому центру, а суммирование распространяется на произвольное число различных центров. Так как потенциал скорости становится бесконечно большим при неограниченном приближении точки воздействия к какому-нибудь неподвижному центру, то нужно представлять себе, что сами неподвижные центры выделены из жидкости. Это может быть сделано посредством небольших замкнутых поверхностей, непосредственно окружающих отдельные центры.

Рассмотрим сперва частный случай одного центра

$$\varphi = \frac{\mu}{r}. \quad 333$$

этом случае поверхности постоянного потенциала скорости представляют собою концентрические шаровые поверхности, а линии тока суть образующие прямолинейного ортогонального пучка лучей. Если  $\mu$  положительно, то жидкость течет от центра по всем направлениям, и мы имеем так называемую „точку истока“ („источник“). Если  $\mu$  отрицательно, то жидкость всасывается отовсюду в центре и там находится „точка стока“. Величина скорости, считая в направлении от центра, равна

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2}. \quad 334$$

Она изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, и в самом центре  $= \pm \infty$ . Вследствие этого давление  $p$  в центре, согласно (322), всегда равно  $-\infty$ , независимо от того,

находится ли в нем источник или сток. Здесь мы встречаемся с интересной особенностью по сравнению со стационарными гальваническими и термическими течениями, которые исходят из точечного электрода или точечного источника тепла и также изображаются дифференциальным уравнением Лапласа. В этих явлениях направление течения зависит от падения (градиента) потенциала или температуры и изменяется вместе со знаком градиента. В течениях жидкости давление всегда возрастает наружу, независимо от того, течет ли жидкость наружу или внутрь. Причина этой особенности заключается в инерции жидкости, так как падение давления дает здесь силу, всегда направленную внутрь. Сила эта необходима, для того чтобы в случае источника постепенно замедлять скорость жидкости, вытекающей наружу, а в случае стока постепенно повышать скорость жидкости, втекающей внутрь.

Любую коническую поверхность с вершиной в центре можно мысленно заменить твердой стеной. Таким образом мы получим законы истечения из конической трубки, о которой шла речь в предыдущем параграфе. Постоянная  $\mu$  непосредственно связана с производительностью источника. Представим себе, что в жидкости проведена некоторая поверхность произвольной формы, которая окружает со всех сторон точку истока. Так как движение стационарно, то все количество жидкости, протекающее в единицу времени сквозь поверхность наружу, равно количеству жидкости, которая доставляется за это время источником, и не зависит поэтому от формы поверхности. Эту величину назовем „интенсивностью“ или „силой“ источника и обозначим буквой  $J$ . Ее проще всего вычислить, если предположить, что поверхность — шаровая с источником в центре. Тогда мы получим для интенсивности источника, согласно (325) и (334):

$$J = -k \int \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\sigma = k \frac{\mu}{r^2} \int d\sigma = 4\pi k \mu. \quad 335$$

Это равенство представляет собою вместе с тем обобщение равенства (324), которое верно только в том случае, если объем ограниченный поверхностью, не заключает в себе особых точек.

Далее, перейдем к более общему случаю (332) произвольного числа точек истока и стока. Здесь мы будем иметь дело с аналогичными соотношениями. Линии тока начинаются в точках истока и заканчиваются либо в точках стока, либо простираются



в бесконечность. Производительность каждой особенной точки определяется постоянной  $\mu$ , при помощи которой определяется интенсивность  $I$  источника или стока. Ибо в непосредственной близости от точки можно пренебречь влиянием всех других источников, и поэтому поверхности постоянного потенциала скорости вблизи от источника суть шаровые поверхности, его окружающие.

Представим себе, что внутри жидкости построена замкнутая поверхность, ограничивающая некоторый объем. Ввиду стационарности движения, все количество жидкости, протекающей в единицу времени сквозь поверхность наружу, равно алгебраической сумме количеств жидкости, доставляемых источниками и стоками, лежащими внутри объема, или согласно (325) и (335),

$$k \int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma = \sum J_i = 4\pi k \sum \mu_i.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma = 4\pi \sum \mu_i, \quad (336)$$

где значок  $i$  обозначает внутренние особенные точки, окруженные поверхностью  $\sigma$ ;  $\nu$  обозначает, как и всегда, внутреннюю нормаль. Это соотношение объединяет в один общий закон два более частных соотношения (324) и (325) и часто называется, в честь автора, уравнением Гаусса.

Рассмотрим еще некоторые частные приложения. При двух точечных источниках одинаковой интенсивности потенциал скорости равен

$$\varphi = \mu \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (337)$$

Плоскость, которая делит пополам прямую, соединяющую оба источника, и перпендикулярна к ней, т. е. плоскость симметрии, состоит из линий тока. Поэтому можно мысленно заменить ее твердой стеной. Воспользовавшись рассуждением, изложенным в § 47, получим свойства истечения жидкости из источника по направлению к неподвижной стене.

Если оба источника обладают одинаковой интенсивностью, но разных знаков, то потенциал скорости равен:

$$\varphi = \mu \left( -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (338)$$

Тогда жидкость течет из источника 2 в сток 1, а именно, линии тока начинаются в точке 2 и оканчиваются в точке 1. Если оба центра очень близки друг к другу, и точка 1 имеет координаты  $\xi, \eta, \zeta$ , а точка 2 имеет координаты  $\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta$ , то выражение (338) преобразуется в такое:

$$\varphi = \mu \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \Delta\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \Delta\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \Delta\zeta \right).$$

При переходе к пределу  $\Delta = 0$ , можно представить себе, что  $\mu$  возрастает так, что произведения  $\mu \cdot \Delta\xi$ ,  $\mu \cdot \Delta\eta$ ,  $\mu \cdot \Delta\zeta$  остаются конечными. Обозначим их через  $\mu_\xi, \mu_\eta, \mu_\zeta$ . Тогда получим для потенциала скорости конечное выражение:

$$\varphi = \mu_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + \mu_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + \mu_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r}. \quad (339)$$

Такое образование, состоящее из двух бесконечно близких точечных источников с противоположными и равными бесконечно большими интенсивностями называется „двойным источником“. Постоянный вектор, компоненты которого  $\mu_\xi, \mu_\eta, \mu_\zeta$ , называется „моментом“, его направление (от стока к источнику) называется „осью“ — двойного источника. Линии тока выходят из источника в направлении оси и возвращаются к стоку, описав большую или меньшую дугу. Замена друг другом источника и стока изменяет только направление течения, но не положение линии тока. Так как расстояние  $r$  между точкой воздействия и особенной точкой зависит только от разностей координат обеих точек,  $x - \xi, y - \eta, z - \zeta$ , то можно написать вместо (339)

$$\varphi = -\mu_\xi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - \mu_\eta \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \mu_\zeta \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}. \quad (340)$$

Из выражения  $\varphi$  в этой форме непосредственно видно, что  $\varphi$  действительно удовлетворяет уравнению Лапласа (323).

§ 65. Рассмотрим, в качестве дальнейшего применения изложенной теории, еще один случай, который можно обосновать на сделанных выше упрощающих допущениях: *равномерное движение твердого шара в несжимаемой жидкости*. Согласно принципу

относительности (1, § 59), законы этого движения совершенно те же, как в случае шара, покоящегося в равномерном потоке жидкости. Последний же случай представляет собою стационарное движение жидкости рассмотренного здесь вида. Поэтому мы заменим шар, движущийся с постоянной скоростью  $a$  в направлении оси  $z$ , неподвижным шаром с центром в начале координат, который оmyвается со всех сторон потоком жидкости. В тех местах, которые настолько удалены от шара, что последний не оказывает на поток никакого действия, — иначе, на бесконечно большом расстоянии от начала координат, — поток имеет постоянную скорость —  $a$  в направлении оси  $z$ .

Задача будет решена, если удастся составить такое выражение потенциала скорости  $\varphi$ , которое удовлетворяет уравнению Лапласа и кроме того удовлетворяет предельным условиям. Пределы жидкости суть  $r=R$  (радиус шара) и  $r=\infty$ . При  $r=\infty$ , согласно вышесказанному,

$$\varphi = az. \quad (341)$$

При  $r=R$ , компонент скорости, нормальный к поверхности шара, равен нулю. Поэтому

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = 0. \quad (342)$$

Чтобы выполнить все эти условия, положим:

$$\varphi = az + \varphi'. \quad (343)$$

Тогда функция  $\varphi'$  должна удовлетворять уравнению Лапласа и кроме того пограничным условиям:

$$\text{при } r=\infty; \quad \varphi' = 0;$$

$$\text{при } r=R: \quad \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial r}\right)_R = -a \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_R = -\frac{az}{R}. \quad (344)$$

Легко показать, что мы получим решение последней задачи, если положим, что  $\varphi'$  равна потенциальной функции двойного источника, то есть:

$$\varphi' = \mu \frac{1}{r} = \mu \frac{z}{r^3}. \quad (345)$$

Действительно: во-первых,  $\varphi'$  удовлетворяет уравнению Лапласа, — во-вторых  $\varphi'$  обращается в нуль при  $r=\infty$  и, в-третьих, из (344) получается постоянное значение  $\mu$ :

$$\mu = -\frac{1}{2} R^3 a. \quad (346)$$

Если производные  $\frac{\partial z}{\partial r}$  и  $\frac{\partial r}{\partial z}$  имеют одинаковую величину в уравнениях (344) и (345), а именно обе равны  $\frac{z}{r}$ , то в этом еще нельзя видеть противоречия. Оно могло бы возникнуть только в результате неправильного понимания значения этих символов. Но можно и формально избежать противоречия, если написать подробнее:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{\vartheta, \varphi} = \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x, y}, \quad (347)$$

т. е. в левой части уравнения нужно рассматривать  $z$  как функцию полярных координат  $r, \vartheta, \varphi$ , а в правой части —  $r$  как функцию прямолинейных координат  $x, y, z$ .

Принимая во внимание (345) и (346), получим из (343) искомого выражение потенциала скорости, т. е. решение всей задачи:

$$\varphi = az \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right\}. \quad (348)$$

Так как  $\varphi$  зависит только от  $z$  и  $r$ , то течение симметрично относительно оси  $z$ , и линии тока лежат, естественно, в плоскостях, проходящих через ось  $z$ .

Составляющие скорости равны, согласно (348),

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3}{2} R^3 a \frac{xz}{r^5},$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3}{2} R^3 a \frac{yz}{r^5}, \quad (349)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) \right\}.$$



Чтобы найти линии тока, которые лежат в какой-либо плоскости, проходящей через ось  $z$ , введем вместо  $x$  и  $y$  расстояние  $\rho$  от оси  $z$ :

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \quad 350$$

Следовательно,

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \quad 351$$

В таком случае дифференциальное уравнение линий тока имеет:

$$d\rho:dz = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}:\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

и, согласно (349),

$$d\rho:dz = \frac{3}{2} R^3 a \cdot \frac{\rho z}{r^5} = a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left( 1 - \frac{3z^2}{r^2} \right) \right\}.$$

Если заменить  $z$  через  $r$  и  $\rho$ , при помощи соотношений

$$z^2 = r^2 - \rho^2, \quad z dz = r dr - \rho d\rho,$$

то получим, после сокращений,

$$\frac{3R^3 dr}{r^4 \left\{ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right\}} + \frac{2d\rho}{\rho} = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получим уравнение системы линии тока:

$$\log \left\{ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right\} + 2 \log \rho = \text{const.},$$

или

$$\rho^2 \left\{ \left( 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right) \right\} = \text{const.} (> 0). \quad 352$$

Система линий тока зависит от радиуса шара  $D$ , а не от величины скорости  $a$ . Если подставить вместо const. все значения от 0 до  $\infty$ , то получатся все линии тока. При const.  $= \infty$ ,  $\rho = \infty$ , а также  $r = \infty$ , а скорость постоянна и равна  $-a$ . Но при const.  $= 0$ , либо  $\rho = 0$ , либо  $r = R$ , т. е. линия тока распадается на две различные части, одна из которых совпадает с осью  $z$  (вне шара), а другая проходит по поверхности шара. В точках перехода при  $\rho = 0$ ,  $z = \pm R$ , в „полюсах“ шара, линии

тока претерпевает прямоугольный излом. Здесь скорость становится равной нулю, и линия тока расщепляется на бесконечное множество ветвей, которые непосредственно окружают шар.

Интересно исследовать сколько времени требуется для того, чтобы точка жидкости, находящаяся на оси  $z$ , достигла полюса шара  $z = \pm R$ . Так как при движении этой точки  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $r = z$ , то мы получим из (349) некоторое время:

$$t = \int_z^R \frac{dz}{w} = \frac{1}{a} \int_R^z \frac{z^3 dz}{z^3 - R^3} = \infty. \quad 353$$

Это значит, что время, которое требуется частице жидкости, чтобы достичь шара, неограниченно возрастает по мере приближения траектории ее к поверхности шара.

Скорость, с которой жидкость протекает непосредственно у самой поверхности шара, получится из (349), если подставить  $r = R$ . Она равна

$$\frac{3}{2} \frac{\rho}{R} a. \quad 354$$

Наибольшей величины  $\frac{3}{2} a$  она достигает в экваториальной плоскости шара. Вообще же скорость распределена совершенно симметрично на двух полушариях по обе стороны от этой плоскости.

Наконец, определим *давление*, которое жидкость оказывает на шар. По давлению мы вычислим равнодействующую силу, с которой поток жидкости действует на неподвижный шар, т. е. сопротивление, которое движущийся шар испытывает в неподвижной жидкости.

Давление на шар,  $p$ , получится из (322), если пренебречь тяжестью и подставить величину скорости из (354)

$$p = \text{const.} - \frac{9}{8} \left( \frac{\rho}{R} \right)^3 a^2 k,$$

или же, если обозначить через  $p_0$  давление в ненарушаемом потоке жидкости, т. е. при скорости  $a$ ,

$$p = p_0 + \frac{a^2}{2} k \left\{ 1 - \left( \frac{3}{2} \frac{\rho}{R} \right)^2 \right\}. \quad 355$$

Давление не зависит от направления течения, оно больше всего у полюсов шара, меньше всего в экваториальной плоскости и симметрично по обе стороны ее. Если соединить в одну равнодействующую все силы давления  $pd\sigma$ , действующие на элементы поверхности шара, то ясно без особого вычисления, на основании симметрии этих сил для положительных и отрицательных  $z$ , что равнодействующая обращается в нуль. Другими словами: поток жидкости не оказывает вовсе никакого действия на покоящийся в нем твердый шар, или же равномерно движущийся шар не испытывает сопротивления в неподвижной жидкости.

Этот результат находится в резком противоречии со всеми опытами и представляет собою знаменитый парадокс гидродинамики. Объяснение его можно найти в том обстоятельстве, что в уравнениях, которыми мы пользовались, не принят во внимание член, играющий существенную роль в рассматриваемом вопросе, а именно влияние трения, того трения, которое возникает на поверхности соприкосновения обоих веществ. В действительности под влиянием трения на поверхности шара равен нулю не только нормальный компонент, но и тангенциальный компонент скорости, т. е. жидкость держится совершенно неподвижно на поверхности шара. Мы еще рассмотрим этот вопрос подробнее (§ 80).

**§ 66.** Теперь перейдем к изучению следующего класса частных решений дифференциального уравнения Лапласа для потенциала скорости  $\varphi$ . Рассмотрим решения, в которых функция  $\varphi$  зависит только от двух координат  $x$  и  $y$  и не зависит от третьей  $z$ , так что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad 356$$

Тогда задача сводится к двум измерениям, что гораздо проще. Поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности) суть цилиндрические поверхности, параллельные оси  $z$  и могут быть представлены при помощи линий в плоскости  $xy$  — линий равного потенциала. Тогда система линий тока представится в виде линий, ортогональных к линиям равного потенциала и лежащих в той же плоскости.

Имеется очень общий метод интегрирования дифференциального уравнения (356), основанный на введении комплексных величин. Легко показать, что всякая аналитическая функция комплексной величины  $x + iy = z$  приводит к решению уравнения

(356) и поэтому может быть физически истолкована как стационарное безвихревое движение несжимаемой жидкости. Пусть  $w$  обозначает такую функцию, т. е.

$$w = f(x + iy) = f(z), \quad 357$$

причем в выражение функции  $f$  могут входить любые вещественные или комплексные постоянные.

Если разложить  $w$  на вещественную и мнимую часть

$$w = \varphi + i\psi, \quad 358$$

то  $\varphi$  и  $\psi$  суть вещественные функции вещественных переменных  $x$  и  $y$ . Из (358) следует:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad 359$$

С другой стороны, из (357):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot i. \end{aligned} \quad 359a$$

Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

т. е. согласно (359), после отделения вещественной части от мнимой:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad 360$$

Исключение  $\psi$  дает уравнение (356), а исключив  $\varphi$ , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad 361$$

Кроме того имеет место соотношение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad 362$$

Таким образом можно рассматривать  $\varphi$  как потенциал скорости. Тогда кривые  $\varphi = \text{const.}$  суть линии равного потенциала, а соответствующие линии тока выражаются уравнениями



$\psi = \text{const.}$ , так как, согласно (362) кривые обоих семейств перпендикулярны друг к другу. Но функции  $\varphi$  и  $\psi$  могут поменяться ролями, и последнюю можно рассматривать как потенциал скорости, а первую как функцию тока.

Характер зависимости комплексной функции  $w$  от  $z$  можно представить всего нагляднее, если рассматривать  $w$  и  $z$ , как такие точки двух плоскостей, — плоскости  $w$  и плоскости  $z$ , из которых одна точка определяется координатами  $\varphi$  и  $\psi$ , а другая точка определяется координатами  $x$  и  $y$ . Тогда функция  $f(z) = w$  представляет определенное сопоставление обеих точек, т. е. отображение плоскости  $w$  в плоскости  $z$ , или наоборот. Это отображение можно также представить себе как деформацию некоторого вещества, непрерывно покрывающего плоскость, причем  $\varphi$  и  $\psi$  обозначают координаты вещественной точки до деформации, а  $x$  и  $y$  — координаты той же точки после деформации, или наоборот. Тогда можно высказать такие же соображения об особенностях этой деформации, какие были представлены в первой главе для более общего случая вещества, занимающего некоторый объем. Рассмотрим важнейшие результаты.

Прежде всего нетрудно видеть, что бесконечно малые участки поверхности отображаются *мгнейно* и поэтому могут быть преобразованы друг в друга посредством прямолинейного перемещения, вращения и дилатации (§ 11). Из (357) следует:

$$dz = \frac{dz}{dw} \cdot dw. \quad 363$$

Положим, что

$$\frac{dz}{dw} = \zeta = r (\cos \theta + i \sin \theta), \quad 364$$

причем

$$r > 0, \quad \pi > \theta > -\pi.$$

Тогда получим из (363) отделив вещественную часть от мнимой:

$$\begin{aligned} dx &= r \cos \theta d\varphi - r \sin \theta d\psi, \\ dy &= r \sin \theta d\varphi + r \cos \theta d\psi. \end{aligned}$$

Положим, что соответствующие друг другу точки  $w$  и  $z$  неподвижны и, значит,  $r$  и  $\theta$  постоянны, и будем рассматривать дифференциалы  $d\varphi$ ,  $d\psi$ ,  $dx$ ,  $dy$ , как переменные координаты. Тогда последние два уравнения дадут законы отображения для

областей, бесконечно близких к точкам  $w$  и  $z$ . Геометрическое значение их получим непосредственно, если напишем:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r} &= \cos \theta d\varphi - \sin \theta d\psi = dx', \\ \frac{dy}{r} &= \sin \theta d\varphi + \cos \theta d\psi = dy'. \end{aligned} \quad 365$$

Это значит: для того чтобы перевести бесконечно близкую точку из положения  $(d\varphi, d\psi)$  в положение  $(dx, dy)$ , нужно во-первых, произвести простой поворот на угол  $\theta$ , в результате чего точка придет в положение  $(dx', dy')$  и во-вторых произвести равномерное расширение по всем направлениям (коэффициент § 7) в отношении  $r:1$ , отчего все отрезки увеличатся в том же отношении, между тем как все направления, а значит и все углы, останутся без изменения. Тем самым измененная область останется подобной первоначальной области и только будет повернута относительно нее. Поэтому отображение при помощи комплексной функции называется также „конформным“ в бесконечно малых частях.

Таким образом каждому конформному отображению плоскости  $w$  на плоскости  $z$  соответствует стационарное движение жидкости в плоскости  $z$ . При этом каждая нить тока образует в плоскости  $w$  полосу, параллельную оси  $\varphi$ , так как она ограничена двумя линиями  $\psi = \text{const.}$  Поэтому задача найти стационарное течение жидкости между двумя неподвижными предельными линиями (стенами) приводится к конформному отображению полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми в плоскости  $w$ , на область, лежащую между этими двумя предельными линиями в плоскости  $z$ .

Величины  $r$  и  $\theta$ , — характеризующие это отображение, наглядным образом определяют движение жидкости. Так как, в виду (359a) и (360)

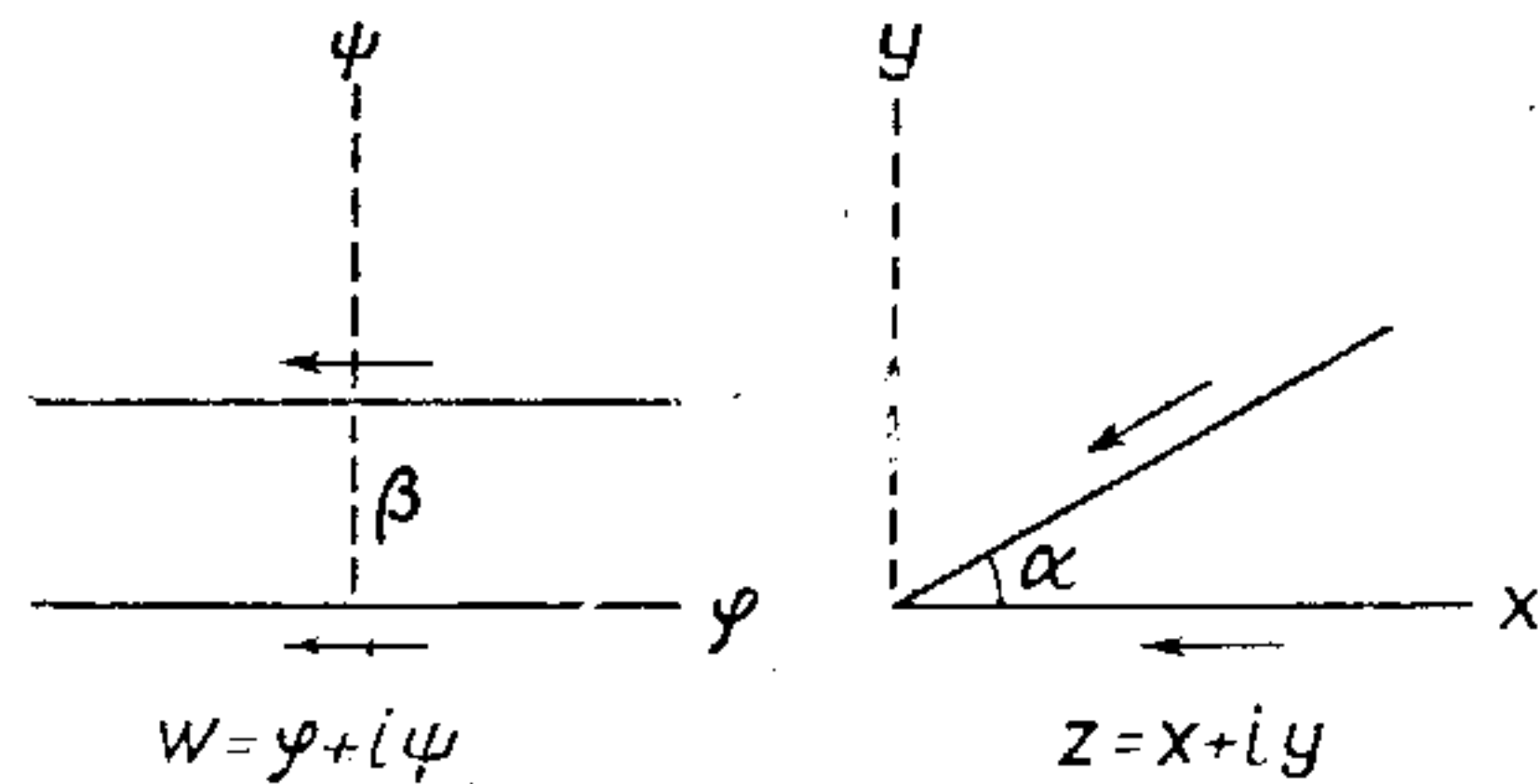
$$\zeta = 1: \frac{dw}{dz} = 1: \frac{\partial w}{\partial x} = 1: \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

то из (364) получится после деления вещественной и мнимой части:

$$\frac{1}{r^2} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2, \quad 366$$

$$\cos \theta = r \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \sin \theta = r \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad 367$$

Таким образом,  $r$  есть величина, обратная скорости, а  $\vartheta$  (между  $\pi$  и  $-\pi$ ) есть угол, который образует градиент потенциала скорости (противоположный линии тока) с положительным направлением оси  $x$ .



Черт. 12.

В качестве простого примера рассмотрим течение жидкости в пространстве между двумя неподвижными прямыми, которые пересекаются в точке стока  $O$  под углом  $\alpha$  (истечение из бесконечно малого отверстия в  $O$ ). Для этого необходимо конформно отобразить полосу, параллельную оси  $\psi$  и шириною  $\beta$  лежащую в плоскости  $w$ , на секторный вырез с углом  $\alpha$  в плоскости  $z$  (черт. 12). Это отображение можно представить при помощи функции:

$$z = e^{\frac{\alpha}{\beta} w}, \quad (368)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{\frac{\alpha}{\beta} \psi} \cos\left(\frac{\alpha}{\beta} \phi\right), \\ y &= e^{\frac{\alpha}{\beta} \psi} \sin\left(\frac{\alpha}{\beta} \phi\right). \end{aligned} \right\} \quad (369)$$

Действительно: если  $\psi$  убывает от  $+\infty$  до  $-\infty$ , соответственно направлению линии тока (обозначенных стрелками на черт. 12), то точка  $z$  движется при  $\phi = 0$  по неподвижной прямой, по оси  $x$ , от  $x = \infty$  до  $x = 0$ , а при  $\phi = \beta$  точка движется по другой неподвижной прямой от бесконечного удаления до точки  $O$ , и при промежуточном постоянном значении  $\phi$  точка движется по прямой, лежащей между этими прямыми, от бесконечного удаления до точки  $O$ . Следовательно, линии тока в плоскости  $z$  суть прямые, которые проходят через точку  $O$  внутри угла  $\alpha$ . Если выразить  $\psi$  и  $\phi$  через  $x$  и  $y$ , то из (369) получится:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{\alpha}{\beta} \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\beta}{\alpha} \log \rho_0, \\ \phi &= \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (370)$$

Таким образом, мы имеем здесь логарифмический потенциал в качестве частного решения дифференциального уравнения (356) (ср. I, § 46). Постоянная  $\beta$  соответствует, очевидно, силе течения.

Для величин  $r$  и  $\vartheta$  получаются следующие значения из (366) и (367):

$$r = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad (371)$$

в согласии с тем, что  $r$  обозначает величину, обратную скорости, и  $\vartheta$  обозначает направление, противоположное линии тока.

**§ 67.** Метод конформных отображений позволяет также разрешить задачу, которая неразрешима при более общих условиях, а именно задачу представить движение жидкости, которые соответствуют „свободным струям“: это — токи жидкости, которые протекают не между твердыми стенами, а в свободном воздухе. Задача здесь значительно труднее по той причине, что границы жидкости не даны заранее, а должны быть вычислены при помощи поверхностных условий, характерных для свободной струи. Предельное условие, которое существует на поверхности свободной струи, не только ограничивается требованием, чтобы эта поверхность состояла из линий тока, но и требует также, в виду принципа равенства действия и противодействия, чтобы давление  $p$  жидкости на поверхности свободной струи равнялось давлению свободного воздуха  $p_0$ , т. е. было постоянным.

Если пренебречь влиянием тяжести, то из (322) следует, что на поверхности свободной струи величина скорости течения постоянна. Обратно, каждая линия тока, на которой скорость постоянна, может представлять границу свободной струи. Если в одной части линии тока скорость изменяется, а в другой части остается постоянной, то первая часть представляет течение вдоль твердой стены, а вторая часть представляет продолжение этого течения в виде свободной струи, что имеет место, например, при истечении жидкости из трубы произвольной формы в воздух.

Следовательно, для изображения свободной струи в рассмотренном здесь частном случае двумерных течений необходимо найти такие линии тока, на которых постоянно не только  $\phi$ , но и скорость  $\frac{1}{r}$ . Эту задачу можно решить, если принять во внимание, что линии  $\phi = \text{const.}$  обозначают, как уже было указано, прямые, параллельные оси в плоскости  $w$ , а линии  $r = \text{const.}$



представляют, согласно (364), концентрические круги с центром в начале координат в плоскости  $\zeta$ . Поэтому, если удастся конформно отразить полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми в плоскости  $w$ , на область, ограниченную с одной стороны дугой круга  $r = \text{const.}$  в плоскости  $\zeta$ , то из функциональной зависимости между  $w$  и  $\xi = \frac{dz}{dw}$  получится функциональная зависимость между  $z$  и  $w$ , т. е. отображение полосы в плоскости  $w$  на плоскость  $z$ . Это отображение имеет то свойство, что на определенных пограничных линиях области плоскости  $z$  как  $\psi = \text{const.}$ , так и  $r = \text{const.}$  Эти линии представляют поверхности свободных струй движений жидкости. При помощи описанного метода Гельмгольцу впервые удалось найти точные решения задачи об образовании свободных струй<sup>1</sup>.

§ 68. Возвратимся теперь к рассмотрению более общего случая безвихревого течения жидкости, с тем, чтобы подробнее осветить вопрос, которого мы кратко коснулись в § 61: вопрос о том, могут ли линии тока быть замкнутыми. Там мы нашли, что это невозможно в том случае, если потенциал скорости есть однозначная и непрерывная функция пространственных координат. Однако легко показать, что в действительности существует течение с такими линиями тока, которые замкнуты сами на себя. Например, рассмотрим простое движение жидкости, изображенное уравнениями (370) и примем во внимание, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  могут поменяться друг с другом местами, как уже было указано выше. Тогда мы получим для движения жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\beta}{\alpha} \arctg \frac{y}{x}, \\ \psi &= \frac{\beta}{\alpha} \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\beta}{\alpha} \log \rho_0. \end{aligned} \right\} 372$$

Здесь мы имеем безвихревое стационарное течение жидкости, заполняющей всю плоскость  $xy$  за исключением произвольно малой области, заключающей особенную точку  $O$ . В этом движении линии тока  $\psi = \text{const.}$  суть концентрические круги с центром в особенной точке  $O$ , а линии равного потенциала суть прямые, выходящие из точки  $O$ . Если рассматривать какие-нибудь два

<sup>1</sup> H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig (J. A. Barth) I, S. 146, 1882.

концентрических круга как твердые стены, то мы имеем течение в круговом кольце. Компоненты скорости в этом случае равны:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{y}{\rho_0^2}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x}{\rho_0^2}, \end{aligned} \right\} 373$$

а величина скорости:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\rho_0}. \quad 374$$

Таким образом жидкость непрерывно циркулирует по кругу, между тем как скорость вращения повсюду постоянно равна нулю. Эта теорема перестанет казаться столь парадоксальной, если принять во внимание, что жидкость не вращается подобно твердому телу, а претерпевает деформации во время движения, так как угловая скорость циркуляции становится все меньшей с увеличением расстояния от оси вращения. Поэтому нужно отличать угловую скорость циркуляции от угловой скорости вращения, так как первая обуславливается радиусом кривизны траектории частицы жидкости, а вторая — вращением самой частицы, совершенно независимым от радиуса кривизны. Впрочем, не следует думать, что если скорость вращения равна нулю, то частица жидкости остается всегда параллельной самой себе. Ибо компоненты скорости вращения частицы не равны производным по времени от углов, которые определяют положение частицы. Если бы это было так, то пришлось бы заключить, что углы постоянны, если скорость вращения обращается в нуль. Но на самом деле из последнего обстоятельства следует лишь, что именно те прямые, которые представляют главные оси расширения частицы, не изменяют направления, между тем как все остальные прямые в частице могут поворачиваться (§ 7). И так как в каждый момент главные оси расширения изменяются, то получается такой результат, что после конечного промежутка времени частица может совершить конечный поворот, в то время как скорость вращения в каждый момент равна нулю (I, § 137).

Наряду с простым примером, выражаемым уравнением (272), можно указать еще другие, более общие случаи безвихревых движений с замкнутыми линиями тока, на плоскости и в пространстве, например, течение в какой-нибудь замкнутой трубе.

Во всех подобных случаях приходится прийти к заключению, что потенциал не может быть однозначным и непрерывным. Действительно, это можно подтвердить при помощи выражения для  $\varphi$  в уравнении (372). Либо можно предположить, что  $\operatorname{arctg}$  однозначен; но тогда он не непрерывен, а претерпевает внезапный скачок в каком-либо произвольно выбранном месте. Либо его можно считать непрерывным, но тогда он бесконечно многозначен. Если приходится производить вычисления с подобного рода функцией, то в большинстве случаев удобнее выбрать первую возможность и установить определенное место прерывности, для того чтобы результат вычисления был вполне определенным. Многозначность или прерывность потенциала скорости не оказывает, конечно, никакого влияния на величину и направление скорости.

§ 69. Так как характер безвихревого движения жидкости существенно зависит от того, является ли потенциал скорости однозначным и непрерывным, то возникает вопрос, можно ли установить такой общий критерий, который позволил бы заранее определить, необходимо ли для данного движения жидкости, чтобы потенциал скорости был однозначным и непрерывным. Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны прежде всего подробнее рассмотреть математическое значение уравнений (318), которые выражают отсутствие вихрей. Положим, что  $\mathbf{q}$  есть вектор, компоненты которого  $u$ ,  $v$ ,  $w$  даны в виде однозначных и непрерывных функций пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  внутри некоторого пространства  $R$ , так что выполняются три уравнения (318). Тогда имеет место следующее правило. Если взять интеграл

$$I = \int_1^2 \mathbf{q}_s \cdot ds \quad 375$$

от какой-либо определенной точки 1 пространства  $R$  до какой-либо другой определенной точки 2 того же пространства, вдоль произвольной кривой  $s$ , которая вся проходит внутри  $R$ , то значение интеграла остается неизменным при любом бесконечно малом изменении пути интегрирования  $s$ . Доказательство этого положения производится следующим образом. Из равенства

$$\mathbf{q}_s = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} + w \frac{dz}{ds}$$

следует:

$$I = \int_1^2 (u dx + v dy + w dz). \quad 376$$

Следовательно, для бесконечно малой вариации кривой  $s$ :

$$\delta I = \int_1^2 (u \cdot \delta dx + \delta u \cdot dx + \dots). \quad 377$$

Так как  $\delta dx = d\delta x$ , то, интегрируя по частям и принимая во внимание, что пределы интеграла не подвергаются вариации, получим:

$$\int_1^2 u \cdot \delta dx = - \int_1^2 du \cdot \delta x = - \int_1^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \cdot \delta x.$$

Далее,

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z.$$

Следовательно, подставив это преобразование и аналогичные ему в равенство (377), имеем:

$$\delta I = \int_1^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot (\delta y dz - \delta z dy) + \dots \quad 378$$

и, согласно (318)

$$U \delta = 0. \quad 379$$

Но если величина  $I$  остается инвариантной при бесконечно малом изменении пути интегрирования, то отсюда еще не следует, что  $I$  имеет одинаковую величину для *всех* возможных путей интегрирования. Ибо это заключение допустимо только в том случае, если можно из одного пути интегрирования вывести все остальные посредством последовательных бесконечно малых, т. е. непрерывных изменений. Но осуществим ли такой переход, это зависит от свойств пространства  $R$ , внутри которого определен вектор  $\mathbf{q}$ . Если, например,  $R$  имеет форму параллелепипеда или эллипсоида, то все кривые, которые проходят между двумя определенными точками внутри  $R$ , могут быть преобразованы одна в другую посредством непрерывных изменений. Такое пространство называется *односвязным*. Поэтому в нем интеграл  $I$  совершенно



не зависит от пути интегрирования и целиком определен обеими предельными точками, а, вместе с тем, и потенциал скорости, который выражается через  $I$ , однозначен вплоть до аддитивной постоянной, которая зависит от нижнего предела.

Но если  $R$  имеет, например, кольцеобразную форму, в роде замкнутой трубки, то уже невозможно преобразовать при помощи непрерывных изменений одну кривую, которая соединяет две точки в трубке, в другую кривую, которая соединяет эти точки таким образом, что проходят через трубку в обратном направлении. Такое пространство, в котором не все линии, соединяющие две точки, могут быть непрерывно преобразованы одна в другую, называется *много связным*. В таком пространстве соединительные линии между двумя точками распадаются на некоторое число групп, в каждой из которых интеграл  $I$  имеет различную величину.

Изложенное противоположение одно- и много-связных пространств можно формулировать также другим способом, который имеет некоторые преимущества. Очевидно, что две соединительные линии между двумя точками можно всегда соединить в замкнутый контур, причем одну из линий можно принять за путь в одном направлении, а другую — за обратный путь. Если можно эти линии перевести одну в другую при помощи непрерывных изменений, то возможно, посредством непрерывного сужения замкнутого контура, стянуть его в одну точку. Если невозможно первое, то невозможно и второе. Отсюда вытекает правило: пространство односвязно или многосвязно, в зависимости от того, можно ли посредством непрерывного сужения стянуть в одну точку все проходящие в нем замкнутые линии, или нельзя. В параллелепипеде или эллипсоиде это возможно, а в кольцеобразной трубке невозможно, так как замкнутая линия, которая проходит в трубке в определенном направлении, наталкивается при непрерывном сужении на стенку, которая является препятствием для дальнейшего сужения.

Чтобы приложить этот метод к интересующему нас случаю, примем во внимание, что вопрос о том, имеет ли интеграл  $I$  в (375) одинаковую величину для двух различных путей интегрирования, совпадает с вопросом о том, равен ли этот интеграл нулю для замкнутого контура, составленного из этих двух путей: ибо замкнутый интеграл равен алгебраической сумме обоих отдельных интегралов, один из которых взят в обратном направлении. Согласно положению, выраженному равенством (379), замкнутый интеграл не изменяет своей величины при всяком непрерывном сужении пути интегрирования, причем точки 1 и 2 также могут

быть смещены. Поэтому, если можно довести сужение до единственной точки, что всегда возможно в односвязном пространстве, — то длина пути интегрирования и, вместе с тем, величина интеграла обращается в нуль. Стало быть, интеграл равен нулю также при всяком расширении пути интегрирования, и все значения  $J$  между двумя определенными точками равны между собой: потенциал скорости однозначен.

Но если, в многосвязном пространстве, сужение замкнутого пути интегрирования наталкивается на границу, то интеграл по такой замкнутой кривой может иметь величину, отличную от нуля. Это величина одинакова для всех других замкнутых кривых, которые получаются из данной посредством непрерывного изменения. Потенциал скорости многозначен, он имеет дискретное множество значений.

**§ 70.** Чтобы избежать неудобства, которое приносит с собой многозначность какой-либо величины, можно превратить многосвязное пространство в односвязное при помощи целесообразно подобранного произвольного ограничения: в определенных местах пространства проводятся разделяющие сечения, причем устанавливается положение, что линии, соединяющая две точки пространства, не должна проходить через какое-либо сечение. Тогда, очевидно, уменьшается число возможных видов соединительных линий между двумя точками, непрерывно преобразуемых друг в друга. Проведя достаточно большое число разделяющих сечений, можно добиться того, чтобы остался возможным только один вид кривых, и пространство становится односвязным. Если достаточно одного разделяющего сечения, чтобы достичь этого результата, то пространство называется двусвязным. Если необходимо  $n$  разделяющих сечений, то пространство  $(n + 1)$ -связно.

Примером более чем двусвязного пространства может послужить колесо с несколькими спицами. Если колесо с четырьмя спицами, то необходимо четыре разделяющих сечения, которые можно мысленно провести на ободе колеса, между каждыми двумя спицами. Поэтому такое пространство пятисвязное.

Если представить себе, что вышеописанным способом проведено необходимое число разделяющих сечений, то пространство будет односвязным. Всякая проведенная в нем замкнутая кривая может быть стянута в одну точку посредством непрерывного сужения, и потенциал скорости однозначен. Но выигрыш однозначности искупается потерей непрерывности. Действительно, определим разность значений потенциала скорости в двух точках 1 и

2, которые бесконечно близки друг к другу, но лежат по разные стороны от разделяющего сечения. Интегрирование (375), служащее для вычисления этой разности, нужно произвести не по бесконечно короткому, а по единственному дозволению конечному соединительному пути. Так как этот интеграл даст конечную величину, то искомая разность также конечна: потенциал скорости претерпевает скачок на разделяющей поверхности. Но так как путь интегрирования, при помощи которого производилось это вычисление, представляет замкнутую кривую, и так как величина этого интеграла не изменяется, согласно (379), при любом непрерывном изменении этой кривой, то мы получаем такое правило: *скачок потенциала скорости на поверхности разрыва одинаков во всех точках этой поверхности и равен величине интеграла (375) по любой замкнутой линии, пересекающей поверхность разрыва.*

Все эти правила могут быть наглядно иллюстрированы при помощи простого рассмотренного в § 68 случая циркуляции жидкости в плоском круговом кольце. Здесь линии тока замкнуты, потенциал скорости многозначен, пространство двусвязно. Действительно, замкнутую линию тока невозможно сжать в одну точку, так как небольшая область, содержащая особенную точку и не принадлежащая к пространству жидкости, представляет препятствие неограниченному сужению. Но если представить себе, что через жидкость проходит разделяющее сечение, от особенной точки в бесконечность,— или, в случае если имеются две концентрические круговые неподвижные стены, от одной стены к другой,— то пространство жидкости — односвязное, и потенциал скорости однозначен, но прерывен. Скачок на поверхности разрыва одинаков во всех точках этой поверхности и легко получается вычислением интеграла (375) для замкнутой линии тока, т. е. согласно (374),

$$\int q \cdot ds = \frac{3}{a} \cdot 2\pi,$$

в согласии со скачком  $2\pi$  функции  $\arctg \dots$  в выражении (372) для потенциала скорости  $\varphi$ .

§ 71. Так как линия тока не может быть замкнутой в односвязном пространстве, и так как она не может заканчиваться у твердой стены, то отсюда следует, что в односвязном пространстве, которое ограничено со всех сторон неподвижными стенами, безвихревое движение несжимаемой жидкости вообще невозможно. Это легко доказать, рассмотрев тождества (81). Так как стены неподвижны, то поверхностный интеграл равен нулю, а так как

жидкость несжимаема, то объемный интеграл в правой части равен нулю, и поэтому  $\varphi$  постоянно, т. е. жидкость неподвижна. Но для правильности тождества (81) необходимо, чтобы потенциал скорости был однозначным и непрерывным, так как иначе интеграл

$$\int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

не равнялся бы  $\varphi_2 - \varphi_1$ , как было принято в выражении (76).

§ 72. В заключение этой главы рассмотрим еще простой пример нестационарного безвихревого движения несжимаемой жидкости. Для этого воспользуемся рассмотрением в § 63 случае истечения тяжелой жидкости из трубки, широкой вверху и узкой внизу, и положим, как и раньше, что верхний уровень жидкости находится под постоянным давлением  $p_0$ , а давление у отверстия тоже постоянно и равно  $p$ . Но теперь мы рассмотрим нестационарное истечение, и постараемся определить, какое возникает движение, если в момент  $t=0$  жидкость повсюду неподвижна.

Прежде всего, что касается дифференциальных уравнений движения, то уравнение Лапласа (323) и вытекающие из него соотношения от (324) до (329) имеют место также для нестационарных движений: ибо уравнение Лапласа вытекает из общего условия непрерывности (259) в связи с условием несжимаемости. Зато уравнение (322) обобщается, согласно (321), следующим образом

$$p = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \rho g z + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad 380$$

Кроме того, нужно добавить пограничные условия у стенок и у обоих отверстий, а также начальное условие, при  $t=0$ .

Всем этим условиям можно удовлетворить, полагая:

$$\psi = T \cdot \varphi', \quad 381$$

где  $T$  — функция только времени  $t$ , а функцию  $\varphi'$  можно принять за известное уже выражение потенциала скорости в рассмотренном выше частном случае стационарного истечения. Тогда выполняются как уравнение Лапласа, так и пограничные условия у неподвижных стенок.

В дифференциальном уравнении линий тока (320) множитель  $T$  сокращается, поэтому линии тока проходят все время так же, как и при стационарном истечении. С течением времени



изменяется только скорость течения. Дифференцированием (381) непосредственно получается

$$q = T \cdot q', \quad (382)$$

т. е. скорость в каком-нибудь месте пропорциональна стационарной скорости в этом месте и множителю  $T$ .

Обозначим, как и раньше, величины, относящиеся к верхнему уровню жидкости, значком  $O$ , а величины, относящиеся к отверстию для истечения, будем писать без значка. Если пренебречь величиной  $f$  по сравнению с  $f_0$ , то из (329), (380), (381) и (382) получится:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q'^2}{2(\varphi_0' - \varphi')} (1 - T^2). \quad (383)$$

Пропиентируем это дифференциальное уравнение. Обозначив для сокращения положительную постоянную:

$$\frac{q'^2}{\varphi_0' - \varphi'} = a,$$

и принимая во внимание, что  $T = 0$  при  $t = 0$ , получим:

$$T = \frac{e^{at} - 1}{e^{at} + 1}. \quad (384)$$

Уравнения (382) и (384) определяют скорость истечения жидкости в любой момент  $t$ . Скорость растет от 0 до стационарного значения в (331), которому она точно равняется лишь после бесконечно большого промежутка времени, но к которому подходит тем ближе, чем больше этот промежуток.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

**§ 73.** Рассмотрим несжимаемую жидкость, которая заполняет односвязное пространство произвольного объема, ограниченное со всех сторон твердыми стенками. Из § 71 известно, что в том случае, если в жидкости нет вихрей, скорость ее всюду и всегда равна нулю. Но допустим, что где-либо и когда-либо имеются вихри, т. е. что в некоторый момент в некоторых местах жидкости скорость вращения имеет данное значение, отличное от нуля. Тогда можно доказать, что скорость всей жидкости однозначно определена внутри и вне вихрей как в данный момент, так и во всякое время.

Проведем доказательство сначала для данного момента  $t$  и покажем, что компоненты скорости  $u, v, w$  повсюду однозначно определены одновременными значениями компонентов вращения  $\xi, \eta, \zeta$  в уравнениях (59) и условием несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (385)$$

Действительно, если бы этого не было, то существовали бы еще другие значения компонентов скорости, например  $u', v', w'$ , которые удовлетворяли бы этим условиям. Тогда разности  $u' - u = u_0, v' - v = v_0, w' - w = w_0$ , рассматриваемые как составляющие скорости, изображали бы движение жидкости в односвязном пространстве, ограниченном со всех сторон твердыми стенками. Это движение, во-первых, удовлетворяло бы условно несжимаемости и, во-вторых, проходило бы совершенно без вихрей, так как для него компоненты  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  повсюду равнялись бы нулю. Но такое движение невозможно. Следовательно,  $u_0, v_0, w_0$  повсюду равны нулю.

Так как компоненты скорости,  $u, v, w$ , определены повсюду, то они определены, конечно, и внутри вихревых нитей, а вместе с ними и пространственные производные их по  $x, y, z$ , т. е. компоненты скорости деформации. Ввиду этого вполне определенным является изменение, которому подвергается вихревая нить в течение элемента времени, включая ее вращение и деформацию. Так как, согласно (317), произведение вихревой скорости  $\omega$  на площадь поперечного сечения нити не изменяется с течением времени, то определенным становится изменение вихревой скорости  $\omega$  в течение промежутка времени  $dt$ . Вместе с тем, становятся известными величина и направление, т. е. компоненты  $\xi, \eta, \zeta$  скорости вращения в момент  $t + dt$ . Но этого достаточно, чтобы применить к моменту  $t + dt$  такие же соображения, как раньше к моменту  $t$ . Таким образом процесс продолжается вполне однозначно, так как от каждого момента, можно перейти к бесконечно близкому позднему моменту и движение всей жидкости является определенным во всякое время.

**§ 74.** Установив основные положения предыдущего параграфа, перейдем теперь к действительному вычислению компонентов скорости  $u, v, w$ , которые, соответствуют заданному вихрю, определенному величинами  $\xi, \eta, \zeta$ . Допустим, что жидкость простирается в бесконечность по всем направлениям. Тогда задача сводится к определению трех непрерывных функций  $u, v, w$  которые удовлетворяют, во-первых, условию несжимаемости (385) и, во-вторых, трем уравнениям (59) при заданных  $\xi, \eta, \zeta$ .

Чтобы удовлетворить условию (385), положим:

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (386)$$

где  $U, V, W$  обозначают три новые непрерывные функции с непрерывными первыми производными. Тогда, очевидно, тождественно удовлетворяется равенство (385). Не нарушая общности задачи, можно наложить еще некоторое ограничение на функции

$U, V, W$ : если вместо  $U$  написать  $U + \frac{\partial \phi}{\partial x}$ , вместо  $V$ :  $V + \frac{\partial \phi}{\partial y}$  вместо  $W$ :  $W + \frac{\partial \phi}{\partial z}$ , где  $\phi$  — совершенно произвольная функция, то,

очевидно, уравнения (386) дадут такие же значения  $u, v, w$ , как и раньше. Таким образом можно совершенно произвольно задать

функцию  $\phi$ , не предвосхищая этим вычисления  $u, v, w$ . Выберем  $\phi$  таким образом, чтобы было:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (387)$$

Это всегда можно осуществить, подобрав должным образом величину  $\Delta \phi$ .

Сделав такое допущение, подставим выражения (386) в уравнения (59). Получим:

$$2\xi = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \Delta U, \quad (388)$$

или, согласно (387),

$$\Delta U = -2\xi, \quad \Delta V = -2\eta, \quad \Delta W = -2\zeta. \quad (389)$$

Это три дифференциальные уравнения Пуассона [1. (132)], интегралы которых равны, согласно 1 § 45:

$$U = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi' d\tau'}{r}, \quad V = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\eta' d\tau'}{r}, \quad W = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\zeta' d\tau'}{r}. \quad (390)$$

Здесь  $r$  обозначает расстояние точки воздействия  $x, y, z$  от какой-нибудь другой точки жидкости  $x', y', z'$ , в которой компоненты вихревой скорости суть  $\xi', \eta', \zeta'$ . Интегрирование производится по всем элементам объема жидкости  $d\tau'$ , причем, конечно, нужно опустить все те элементы объема, в которых вихревая скорость равна нулю. Для жидкости, в которой совершенно нет вихрей, мы снова получим вывод § 71.

Можно непосредственно убедиться в том, что определенные таким образом функции  $U, V, W$ , действительно обладают свойством (387) если подставить выражения (390), продифференцировав их по  $x, y, z$  и преобразовав получившиеся интегралы интегрированием по частям согласно (79). При этом нужно воспользоваться тождествами:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x'}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y'}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z'} \quad (391)$$

и соотношением (315).

Если подставить найденные выражения  $U, V, W$  в уравнения (386), то отсюда получатся искомые значения составляющих



скорости в произвольной точке жидкости  $x, y, z$ , внутри или вне вихрей:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int \left( \zeta' \frac{\partial}{\partial y} - \tau_1' \frac{\partial}{\partial z} \right) d\tau', \text{ и т. д.}, \quad 392$$

или

$$u = \frac{1}{2\pi} \int \left( \tau_1' \frac{z - z'}{r^3} - \zeta' \frac{y - y'}{r^3} \right) d\tau', \text{ и т. д.}, \quad 393$$

или, в векториальном обозначении (I § 87)

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \int \left[ \mathbf{O}', \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \frac{d\tau'}{r^2}. \quad 394$$

Здесь  $\mathbf{q}$  обозначает вектор скорости в точке воздействия,  $r$  — расстояние точки воздействия от элемента жидкости  $d\tau'$ , в котором вихревая скорость равна  $\mathbf{O}'$ , наконец,  $\frac{\mathbf{r}}{r}$  — вектор длиной 1, который направлен от элемента жидкости  $d\tau'$  к точке воздействия.

Значение уравнения (394) можно наглядно истолковать следующим образом: каждый элемент вихря, объемом  $d\tau'$ , вносит определенную долю в общую величину скорости жидкости  $\mathbf{q}$  в точке воздействия. Эта доля определяется по величине и направлению при помощи выражения:

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \mathbf{O}', \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \frac{d\tau'}{r^2} = \delta\mathbf{q}, \quad 395$$

т. е. она пропорциональна вихревой скорости, обратно пропорциональна квадрату расстояния, далее она пропорциональна синусу угла между осью вихря и соединительной прямой  $r$  и перпендикулярна к плоскости, проходящей через эти два направления. Направления  $\mathbf{O}'$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\delta\mathbf{q}$  образуют в последовательном порядке правую координатную систему. Другими словами: движение  $\delta\mathbf{q}$  совершается в направлении той скорости, которую имели бы частицы элемента вихря, ближайšie к точке воздействия, совершая вращение вокруг оси вихря, если бы она была неподвижна.

Зная составляющие скорости  $u, v, w$  как функции  $x, y, z$ , получим дифференциальные уравнения линий тока:

$$u:v:w = dx:dy:dz, \quad 396$$

которые существенно отличаются от прежних уравнений (320) тем, что в данном случае вообще не существует потенциала скорости.

§ 75. Рассмотрим для примера вихревую нить, имеющую вид тонкого кругового кольца. Скорость вращения можно считать настолько большой, что произведение ее на сечение кольца, или момент вихревой нити, имеет конечную величину. Вне кольца движение жидкости происходит, конечно, без вихрей. Все те частицы жидкости, которые лежат в плоскости кольца, текут перпендикулярно к этой плоскости. Частицы, лежащие внутри кольца, движутся в направлении вращательного движения внутренних частиц вихревого кольца, а частицы, лежащие вне кольца, движутся в направлении вращения наружных частиц кольца. Линии тока свободной от вихрей жидкости проходят сквозь середину кольца в соответствующем направлении, огибают его наружу, симметрично расширяясь во все стороны бесконечного пространства совершенно так, как в „двойном источнике“ (§ 64), затем, обойдя плоскость кольца снаружи его в противоположном направлении, возвращаются, снова сближаясь, с другой стороны к середине кольца. Таким образом все линии тока окружают вихревую нить в направлении ее вращения. При этом скорость течения непрерывна повсюду: внутри и снаружи вихря, а также при переходе от жидкости в вихре к жидкости вне вихря. Величина скорости течения больше внутри вихря, где нити тока суживаются, чем снаружи, где они расширяются. Замкнутым линиям тока соответствует многозначный или прерывный потенциал скорости и бесконечное двусвязное пространство жидкости. Действительно, такую линию невозможно стянуть в одну точку путем непрерывного сужения внутри пространства, свободного от вихрей.

Однако само вихревое кольцо не находится в покое, а сообщает само себе определенную скорость. Как показывает небольшое рассуждение на основании закона (395), оно движется перпендикулярно своей плоскости в направлении линий тока, проходящих через его середину.

Положим теперь, что в жидкости имеются два таких вихревых кольца одинаковой длины, одинакового момента и параллельные друг другу, причем линия, соединяющая оба центра, перпендикулярна к плоскости колец, образуя ось симметрии всего процесса. Нетрудно видеть, каким образом будет совершаться этот процесс. Сперва оба вихревых кольца будут двигаться со свойственной им скоростью поступательного движения вдоль оси симметрии в направлении проходящих через нее линий тока. Но кроме того, возникнут силы взаимодействия между ними. Так как уравнение (394) не зависит от того, совершает ли жидкость вихревое движение в точке воздействия, то вихревые элементы одного

кольца будут, так сказать, увеличены линиями тока, произведенными другим кольцом. Вследствие этого первое кольцо, движущееся вперед, расширяется наружу, а скорость его постепенно уменьшается, между тем как второе кольцо, следующее позади, суживается и движется все быстрее вперед, пока не догонит первого кольца и не пройдет сквозь него. Как только это произойдет, процесс обращается. Теперь уже второе кольцо будет расширяться и скорость его уменьшаться, а первое кольцо будет суживаться, пока оба кольца не сделаются одинаковой величины, а расстояние между ними станет таким же, как было вначале. Затем повторится то же явление, причем кольца поменяются ролями, и так будет продолжаться до бесконечности.

§ 76. Произведем более подробные вычисления для случая двух измерений (как в § 66), когда движение жидкости происходит параллельно плоскости  $xy$  и зависит только от координат  $x$  и  $y$ . Тогда условие несжимаемости (385) примет более простой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Из трех компонентов вращения в уравнениях (59)  $\xi$  и  $\eta$  обращаются в нуль, и остается только

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad 397$$

так что, согласно (389):

$$U = 0, \quad V = 0.$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -2\zeta, \quad 398$$

и, согласно (386):

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}. \quad 399$$

Таким образом все вихревые линии и вихревые нити параллельны оси  $z$ . Так как они движутся параллельно плоскости  $xy$ , то длина каждой вихревой нити постоянна все время. Но так как масса вихревой нити и, вследствие несжимаемости жидкости, также объем нити не изменяются с течением времени, то отсюда следует, что постоянным во времени остается и сечение каждой нити, а вместе с тем, согласно (314), также и скорость вращения ее.

Уравнение системы линий тока, согласно (396) и (399):

$$W = \text{const.} \quad 400$$

имеет место как внутри, так и вне вихрей. Так как линии тока проходят параллельно плоскости  $xy$ , то для движения, изображаемого предыдущими уравнениями, безразлично, простирается ли жидкость в бесконечность по обоим направлениям вдоль оси, или же она заключена между любыми двумя твердыми стенами, параллельными плоскости.

Двухмерное уравнение Пуассона (398) можно проинтегрировать [согласно 1 (139) и (140)] посредством логарифмического потенциала.

$$W_{xy} = -\frac{1}{\pi} \int \zeta' \log \rho \, d\sigma', \quad 401$$

где  $d\sigma'$  обозначает площадь сечения бесконечно тонкой вихревой нити,  $\zeta'$  — вихревую скорость нити,  $\rho$  — расстояние от точки воздействия. Интеграл берется по всем вихревым нитям. Отсюда получаются на основании (399) следующие выражения для компонентов скорости в какой-нибудь точке  $x, y$ , лежащей вне вихрей:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{\pi} \int \zeta' \cdot \frac{y-y'}{\rho^2} \, d\sigma', \\ v &= \frac{1}{\pi} \int \zeta' \cdot \frac{x-x'}{\rho^2} \, d\sigma'. \end{aligned} \right\} \quad 401a$$

Эти выражения гласят, что каждый элемент вихря  $d\sigma'$  вызывает в точке воздействия скорость, которая обратно пропорциональна расстоянию и имеет одинаковое направление с вращением.

Возьмем одну какую-нибудь бесконечно тонкую нить, например, в начале координат. При этом можно положить скорость вращения настолько большой, чтобы момент  $\zeta' \cdot d\sigma' = \mu$  имел конечную величину. Тогда интеграл в (401) сведется к одному члену, и мы получим:

$$W = -\frac{\mu}{\pi} \cdot \log \rho. \quad 402$$

Следовательно, на основании (400), линии тока суть concentрические круги. Составляющие скорости в какой-нибудь точке вне вихря равны, согласно (399):

$$u = -\frac{\mu}{\pi} \frac{y}{\rho^2}, \quad v = \frac{\mu}{\pi} \frac{x}{\rho^2}. \quad 403$$



Эти уравнения совершенно одинаковы с уравнениями (373), если не считать постоянного множителя. Различие только в том, что жидкость, циркулирующая без вихрей по концентрическим кругам, ограничена индифферентной твердой цилиндрической стеной, а в рассматриваемом здесь случае имеется причинное соотношение между моментом вихревой нити, неподвижной в центре, и внешним течением.

Для двух таких вихревых нитей в точках  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  имеем, согласно (401):

$$W = -\frac{\mu_1}{\pi} \log \rho_1 - \frac{\mu_2}{\pi} \log \rho_2. \quad 404$$

Скорости равны, согласно (399):

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\mu_1}{\pi} \frac{y - y_1}{\rho_1^2} - \frac{\mu_2}{\pi} \frac{y - y_2}{\rho_2^2}, \\ v &= \frac{\mu_1}{\pi} \frac{x - x_1}{\rho_1^2} + \frac{\mu_2}{\pi} \frac{x - x_2}{\rho_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad 405$$

При помощи этих уравнений скорости всех точек жидкости, свободной от вихрей, выражаются в зависимости от положения обеих вихревых нитей в данный момент. Линии тока суть:  $W = \text{const}$ . Потенциал скорости:

$$\varphi = -\frac{\mu_1}{\pi} \text{arctg} \frac{y - y_1}{x - x_1} - \frac{\mu_2}{\pi} \text{arctg} \frac{y - y_2}{x - x_2}. \quad 405a$$

Пространство без вихрей, ввиду многозначности, трехсвязно.

Что касается движения самих вихревых нитей, т. е. изменения координат  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , с течением времени, то его также можно вывести из уравнений (405). Но при этом нужно иметь в виду, что вихревая нить не сообщает себе поступательной скорости. В этом можно убедиться также путем вычисления, если принять во внимание соотношения внутри нити. В таком случае в уравнениях (405) выпадает член, соответствующий воздействию нити самой на себя, и мы получим:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\mu_2}{\pi} \frac{y_1 - y_2}{\rho_{12}^2}, \quad v_1 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{\mu_2}{\pi} \frac{x_1 - x_2}{\rho_{12}^2}. \quad 406$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\mu_1}{\pi} \frac{y_2 - y_1}{\rho_{12}^2}, \quad v_2 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{\mu_1}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{\rho_{12}^2}. \quad 407$$

Отсюда получится следующая картина движения обеих вихревых нитей.

Так как

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0, \quad \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0,$$

то точка с координатами

$$\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2} = x_0, \quad \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2} = y_0, \quad 408$$

которую можно назвать „центром тяжести“ обеих вихревых нитей, остается все время неподвижной:

$$\begin{aligned} u_1(x_1 - x_2) + v_1(y_1 - y_2) &= 0, \\ u_2(x_1 - x_2) + v_2(y_1 - y_2) &= 0, \end{aligned}$$

т. е. движение каждой из нитей перпендикулярно к прямой, соединяющей их. Поэтому расстояние между ними, а также расстояния от центра тяжести, остаются постоянными. Следовательно, нити вращаются с общей угловой скоростью вокруг центра тяжести, оставаясь на постоянном расстоянии  $\rho_{12}$ . Если оба вращения имеют одинаковое направление, то центр тяжести обеих нитей лежит между ними. Если же вращения противоположны, то центр тяжести лежит вне нитей со стороны большего момента. Угловая скорость вращения равна

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{\pi \rho_{12}^2}$$

и имеет направление большего из обеих моментов.

Если моменты равны и противоположны, то „центр тяжести“ отодвигается в бесконечность, угловая скорость вращения становится равной нулю, и обе вихревые нити совершают, согласно (406) и (407), общее поступательное движение со скоростью  $\frac{\mu}{\pi \rho_{12}^2}$  в направлении линий тока, проходящих между ними, подобно одному вихревому кольцу (§ 75). Действительно, такие две „антипараллельные“ вихревые нити можно рассматривать как части одного вихревого кольца, имеющего вид бесконечно длинного прямоугольника. Положение линий тока выразится в этом частном случае, на основании (400) и (404), в виде уравнения:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{const}. \quad 409$$

Таким образом линии тока суть круги, симметрично расположенные относительно соединительной линии обеих вихревых нитей и делище расстояние между ними в гармоническом отношении.

§ 77. В заключение рассмотрим еще простой пример одной вихревой нити конечного сечения. Положим, что сечение нити — круг радиуса  $R$ , а скорость вращения повсюду равна  $\zeta$ . Как мы знаем, она постоянна и во времени. Интегралы с элементами вихря  $d\sigma'$  нужно взять по всей площади круга. Выражения для компонентов скорости в какой-нибудь точке жидкости можно получить, произведя интегрирование в (401a) или же, что удобнее для нас, вычислив при помощи формулы (400) логарифмический потенциал  $W$  массы, покрывающей круг с равномерной поверхностной плотностью  $\frac{\zeta}{\pi}$  (401). Обозначим расстояние точки воздействия от центра круга через

$$\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тогда для внутренней точки ( $\rho_0 < R$ ) имеем, согласно 1 (145),

$$W = \frac{\zeta}{2} (R^2 - \rho_0^2) - \zeta R^2 \log R. \quad 410$$

Для внешней точки ( $\rho_0 > R$ ), согласно 1 (146),

$$W = -\zeta R^2 \log \rho_0. \quad 411$$

Следовательно, линии тока представляют собою, согласно (400), концентрические круги,  $\rho_0 = \text{const.}$ , как внутри, так и вне вихревого цилиндра. Вне цилиндра, в пространстве без вихрей, скорость выражается следующим образом, на основании (399) и (411):

$$u = -\zeta R^2 \frac{y}{\rho_0^2}, \quad v = \zeta R^2 \frac{x}{\rho_0^2}, \quad 412$$

т. е. снова в согласии с (403). Зато внутри вихря скорость имеет такое значение на основании (410):

$$u = -\zeta y, \quad v = \zeta x. \quad 413$$

Значит, вся жидкость вращается здесь с угловой скоростью без деформации, подобно твердому телу (ср. 39 стр. 24). Интересно, что на поверхности вихревой нити, там, где жидкость вихря грани-

чит с жидкостью свободной от вихрей, скорость изменяется всюду непрерывно, так как формулы (412) и (413) переходят одна в другую при  $\rho_0 = R$ . Здесь величина скорости достигает максимального значения,  $\zeta R$ , и уменьшается в обе стороны до нуля.

Давление  $p$  во внешнем пространстве жидкости, свободном от вихрей, следует, на основании (322), закону:

$$p = -\frac{k}{2} \zeta^2 \frac{R^4}{\rho_0^2} + \text{const.}, \quad 414$$

а внутри вихревой нити давление выражается иначе, на основании (297):

$$p = \frac{k}{2} \zeta^2 \rho_0^2 + \text{const.} \quad 415$$

На основании принципа равенства действия и противодействия, давление на ограничивающей поверхности должно быть непрерывно. Поэтому величина его определена повсюду, если она известна на каком-нибудь расстоянии, например, в бесконечности.



## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

## ТРЕНИЕ

§ 78. Изложенные выше приложения основных уравнений гидродинамики показали, что эти уравнения в форме, выведенной в § 53, дают возможность представить значительное число различных движений жидкости в хорошем согласии с действительностью. Но в природе существуют и такие виды гидродинамических явлений, законы которых не удовлетворяют требованиям этих дифференциальных уравнений. Это мы видели всего отчетливее на примере парадоксальной теоремы в (§ 65), согласно которой шар, движущийся в покоящейся жидкости, не должен испытывать никакого сопротивления. Если мы хотим отдать себе лучший отчет в действительном положении вещей для этого важного случая, то нам необходимо расширить теорию должным образом. Спрашивается, как это сделать.

Уравнения движения (83) и (84) в первой части этой книги выведены из принципов общей механики, которых мы не можем здесь изменять. Этих уравнений мы будем придерживаться неизменно. Однако представляется возможность видоизменить теорию, если принять во внимание, что мы получили наши дифференциальные уравнения гидродинамики (262), введя гипотезу „совершенной упругости“, т. е. гипотезу, что давление зависит только от состояния деформации (§ 21). Тогда получаются для жидкости простые значения (261a) шести компонентов давления. Теперь же мы можем обобщить эту гипотезу таким образом, что давление в каком-нибудь элементе тела должно зависеть не только от состояния деформации, но и от состояния скорости элемента, т. е. от компонентов скорости  $u, v, w$  и их производных  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$  Соответственно этому мы напишем равенства (261a) в обобщенном виде:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= p + X'_x, & Y_y &= p + Y'_y, & Z_z &= p + Z'_z, \\ Y_z &= Y'_z, & Z_x &= Z'_x, & X_y &= X'_y \end{aligned} \right\} \quad 416$$

$$p = f(k), \quad 417$$

и допустим, что добавочные компоненты давления  $X'_x, Y'_y, \dots$  зависят некоторым образом от упомянутых величин скорости. Понятно, что непосредственное влияние на давление в элементе тела не может оказать ни равномерная скорость поступательного перемещения, ни равномерная скорость вращения, а только такое состояние скорости, которое связано с деформацией. Отсюда следует, что в выражения  $X'_x, X'_y, \dots$  могут войти из двенадцати величин скорости (256) только шесть компонентов скорости деформации  $x_x, x_y, \dots$ . Мы допустим, что они входят линейно, — что наверно имеет место при достаточно малых скоростях деформации, и однородно, так как при скорости деформации, обращаемой в нуль, давление, вызываемое ею, также обращается в нуль. Давление, изображаемое вновь введенным тензором, мы назовем „трением“ жидкости, в частности „внутренним“ трением или „вязкостью“, в отличие от „внешнего“ трения, которое возникает при скольжении жидкости по поверхности соприкосновения ее с другим веществом и которое нужно принять в расчет при установлении пограничных условий.

Если тензор трения известен в виде однородной линейной функции тензора скорости деформации, то из общих уравнений (83) и (84), в связи с уравнениями (416) и (417) вытекают законы движения, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) k &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z}, \\ \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) k &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z}, \\ \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) k &= \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad 418$$

$$Y'_z = Z'_y, \quad Z'_x = X'_z, \quad X'_y = Y'_x. \quad 419$$

Теперь нужно определить характер зависимости величин  $X'_x, X'_y, \dots$  от  $x_x, x_y, \dots$ . Наиболее простой и верный способ — это тот, который мы применили в § 23 для вывода компонентов упругого давления в твердом теле: это применение принципа сохранения энергии, — в данном случае уже не как механического закона, а как всеобщего физического принципа. Ибо трение не относится к числу консервативных сил (1 § 49), а во всяком процессе, в котором участвует трение, известная часть механической энергии обращается в теплоту. Теплота, произведенная трением в каком-нибудь бесконечно малом элементе тела, объемом  $d\tau$ , в течение

бесконечно малого времени  $dt$ , пропорциональна величинам  $dt$  и  $d\tau$ . Поэтому полагаем, что она равна

$$W \cdot dt \cdot d\tau. \quad 420$$

Величину  $W$  мы должны считать конечной и всегда положительной.

Будем рассуждать таким же образом, как раньше в § 23, но с тем различием, что вместо уравнения энергии (89) напишем

$$d(L + U) + \int W \cdot dt \cdot d\tau = A, \quad 421$$

и вместо уравнений движения упругого твердого тела (83) и (84) воспользуемся уравнениями движения жидкости с трением (418) и (419). В результате рассуждения мы получим, вместо (95) такое соотношение:

$$\int W \cdot d\tau \cdot dt + \int (X'_x x_x + X'_y y_y + \dots) d\tau \cdot dt = 0. \quad 422$$

Со стороны формальных обозначений нужно при этом помнить, что в § 23 обозначения  $u, v, w, x_x, y_y, \dots$  относятся к *положениям*, а здесь согласно (256) они относятся к *скоростям*. Поэтому нужно умножить эти обозначения на множитель  $dt$ , чтобы выразить те величины, которые изображались раньше дифференциалами  $du, dv, dw, dx_x, dx_y, \dots$

Так как уравнение (422) верно для произвольно малого объема, то мы получим для любой точки пространства:

$$X'_x x_x + Y'_y y_y + Z'_z z_z + Y'_z y_z + Z'_x z_x + X'_y y_y = -W. \quad 423$$

Как мы видели, компоненты давления суть однородные линейные функции переменных  $x_x, x_y, \dots$ . Следовательно,  $W$  есть однородная квадратичная, и всегда положительная, функция этих величин. Ввиду физического значения  $W$  и вследствие изотропии жидкости, постоянные, входящие в эту функцию, не могут зависеть от выбора системы координат. Поэтому, согласно (117), наиболее общий вид  $W$ :

$$W = \rho(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\lambda \left( x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{y_z^2 + z_x^2 + x_y^2}{2} \right), \quad 424$$

где  $\rho$  и  $\lambda$  обозначают две постоянные, характеризующие внутреннее трение жидкости.

Отсюда однозначно получаются выражения для компонентов трения: так как компоненты скорости деформации не зависят друг от друга, то из обоих последних уравнений вытекают компоненты трения:

$$\left. \begin{aligned} X'_x &= -\rho(x_x + y_y + z_z) - 2\lambda x_x + \dots, \\ Y'_z &= -\lambda y_z, \dots \end{aligned} \right\} \quad 425$$

Подставив их в уравнения (416) и (418), получим соответствующий результат для величины полного давления и для уравнений движения.

В этих формулах заключена теория *Стокса* для трения в жидкостях.

Для несжимаемой жидкости, которую мы только и будем рассматривать в дальнейшем, уравнения значительно упрощаются, ввиду того, что скорость объемного расширения  $x_x + y_y + z_z = 0$ , и поэтому, согласно (416) и (425):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= p - 2\lambda x_x, & Y_y &= p - 2\lambda y_y, & Z_z &= p - 2\lambda z_z, \\ Y_z &= -\lambda y_z, & Z_x &= -\lambda z_x, & X_y &= -\lambda x_y. \end{aligned} \right\} \quad 426$$

Таким образом внутреннее трение несжимаемой жидкости зависит только от одной постоянной  $\lambda$ .

Для полной формулировки законов движения жидкости, связанного с трением, нужно установить еще пограничные условия.

Если жидкость течет вдоль неподвижной твердой стенки, то для нормального давления, действующего на поверхности, не нужно особого условия, так как сопротивление стены может выдержать всякое давление. Но для давления, действующего на поверхность жидкости тангенциально, посредством трения, будет существовать определенное соотношение. В последнем играет роль скорость, с которой жидкость скользит вдоль стены. Обозначим снова через  $\nu$  внутреннюю нормаль к поверхности жидкости, через  $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$  — компоненты действующего на нее снаружи давления. Тангенциальный компонент давления, который равен нулю при совершенно упругой жидкости, направлен в случае жидкости с трением в сторону, противоположную скорости течения. Величину его проще всего принять пропорциональной этой скорости  $q$ , т. е.

$$X_\nu \cos(\tau x) + Y_\nu \cos(\tau y) + Z_\nu \cos(\tau z) = -\lambda q, \quad 427$$



где  $\tau$  обозначает направление течения,  $\lambda$  — некоторая положительная постоянная, зависящая как от вещества жидкости, так и от вещества стенки, — „коэффициент внешнего трения“.

В этой формулировке заключаются также крайние случаи  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ . В первом случае вместе с внешним трением обращается в нуль и тангенциальное давление. Во втором же случае, так как тангенциальное давление остается постоянным, то скорость скольжения  $q = 0$ , т. е. жидкость „прилипает“ к твердой стенке. Численная величина коэффициентов внутреннего и внешнего трения может быть определена только из измерений.

§ 79. Рассмотрим сперва простое приложение выведенных уравнений: *стационарное течение несжимаемой жидкости в узкой трубке, имеющей вид кругового цилиндра*. Положим, что дано давление  $y$  обоих концов трубки, а весом жидкости можно пренебречь.

Примем ось трубки за ось  $z$ , а сечение трубки у начала — за плоскость  $xy$ . Давление в этом месте пусть равно  $p_0$ . Если  $l$  — длина трубки, для конечного сечения  $z = l$ , и давление  $p_l < p_0$ , то жидкость течет в направлении положительной оси  $z$ . Линии тока параллельны оси  $z$ , следовательно

$$u = 0, \quad v = 0. \quad 428$$

Из условия стационарного состояния и условия несжимаемости (385) следует:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad 429$$

а из уравнений (426) получаются следующие значения компонентов давления:

$$\left. \begin{aligned} X_x = p, & \quad Y_y = p, & \quad Z_z = p, \\ Y_z = -\kappa \frac{\partial w}{\partial y}, & \quad Z_x = -\kappa \frac{\partial w}{\partial x}, & \quad X_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad 430$$

Поэтому уравнения движения (83), в которых все три компонента ускорения обращаются в нуль, принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \kappa \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad 431$$

Так как  $p$  зависит только от  $z$ , а  $w$  зависит только от  $x$  и  $y$ , согласно (429), то последнее из уравнений (431) возможно лишь в том случае, если

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \kappa \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -c, \quad 432$$

где падение давления есть положительная постоянная, величина которой получается из условия, что давление дано при  $z = 0$  и  $z = l$ , а именно:

$$c = \frac{p_0 - p_l}{l} = \frac{\Delta p}{l}. \quad 433$$

Чтобы вывести из (432) величину  $w$ , как функцию  $x$  и  $y$ , введем плоские полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$  [1 (159)] и примем во внимание, что, в виду симметрии,  $w$  зависит только от  $\rho$ . Тогда получится

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} = -\frac{c}{\kappa}. \quad 434$$

Чтобы получить общий интеграл дифференциального уравнения, положим:

$$\rho \frac{dw}{d\rho} = w', \quad 435$$

тогда

$$\frac{dw'}{d\rho} = \rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{dw}{d\rho},$$

и, согласно (434):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dw'}{d\rho} = -\frac{c}{\kappa}.$$

Интегрируя, получим:

$$w' = -\frac{c}{\kappa} \frac{\rho^2}{2} + A,$$

и, интегрируя второй раз, получим, согласно (435):

$$w = -\frac{c}{\kappa} \frac{\rho^2}{4} + A \log \rho + B. \quad 436$$

Для определения обеих постоянных интегрирования служат пограничные условия. При  $\rho = 0$ ,  $w$  конечно; следовательно

$$A = 0. \quad 437$$

Пусть на поверхности жидкости  $\rho = R$  (радиус трубки). Тогда в уравнении (427):

$$\cos(\tau x) = 0, \quad \cos(\tau y) = 0, \quad \cos(\tau z) = 1,$$

и, так как  $y$  совпадает с  $-\rho$ , то, согласно (70) и (430),

$$Z = \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{x}{\rho} + \lambda \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{y}{\rho}.$$

Следовательно, на основании (427), при  $\rho = R$ ,

$$\frac{\lambda}{R} \left( x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\lambda \cdot w. \quad 438$$

Здесь нужно положить, согласно (436) и (457),

$$w_R = -\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{R^2}{4} + B$$

и

$$\left( x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} \right)_R = \left( \rho \frac{dw}{d\rho} \right)_R = -\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Вместе с тем пограничное условие (438) гласит:

$$B = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{R^2}{4} + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{R^2}{2},$$

и мы получим из (436) решение задачи, подставив найденные значения постоянных  $c$  и  $B$ ; скорость течения равна:

$$w = \frac{\Delta p}{4\lambda l} \cdot \left( R^2 - \rho^2 + \frac{2\lambda}{\lambda} R \right). \quad 439$$

Таким образом скорость течения убывает от середины трубки к стенкам, что вполне естественно. Нетрудно видеть, что обе постоянные  $\lambda$  и  $\lambda$  должны отличаться от нуля, если скорость имеет повсюду конечную величину.

Для проверки выведенной выше формулы (439) лучше всего измерить объем жидкости, вытекшей за некоторое время  $t$ . Этот объем получится, если взять интеграл по сечению трубки:

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} w \cdot t \cdot \rho d\rho d\varphi.$$

Следовательно:

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{R^4}{\lambda} \left( 1 + \frac{4\lambda}{\lambda R} \right) \cdot t. \quad 440$$

Отсюда мы видим, что закон истечения существенно зависит от отношения постоянной внутреннего трения  $\lambda$  к постоянной внешнего трения  $\lambda$ . Если это отношение мало по сравнению с радиусом трубы  $R$ , то количество вытекающей жидкости пропорционально четвертой степени радиуса и зависит только от внутреннего трения. Если же отношение велико по сравнению с  $R$ , то количество вытекающей жидкости пропорционально третьей степени радиуса и зависит только от внешнего трения. В промежуточных случаях закон сложнее, так как влияния обоих коэффициентов трения накладываются друг на друга.

Опыты Пуазеля, которые были подтверждены впоследствии, показали, что обычно осуществляется первый случай, т. е. в последней формуле можно положить  $\lambda = \infty$ , или

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{R^4}{\lambda} \cdot t. \quad 441$$

Отсюда следует на основании (439), что  $w = 0$  при  $\rho = R$ , т. е. что жидкость „прилипает“ к стенке трубки.

Однако опыты показывают, что закон Пуазеля (441) верен только для сравнительно узких трубок. Если же радиус трубки превосходит некоторую критическую величину, то все изложенное выше решение задачи лишается физического значения. Уже первое допущение (428) не соответствует действительности, так как линии тока уже не проходят параллельно оси трубки, а изменяются под влиянием вихревых образований. Это явление называется „турбулентностью“. Согласно новейшим исследованиям возникновение турбулентных движений не находится в противоречии с уравнениями гидродинамики. Оно объясняется тем, что уравнения течения имеют несколько различных решений, простейшее из которых, рассмотренное нами, изображает движение устойчивое и осуществляемое в природе только в том случае, если трубка довольно узкая. Однако точная теория турбулентных движений представляет значительные трудности для математической разработки.

§ 80. Изложенная теория трения позволяет нам также снова приняться, и с большим успехом, за решение задачи, которую мы раньше признали неразрешимой: задачи о вычислении



сопротивления, которое испытывает шар, движущийся в покоящейся жидкости. Определим полную величину давления, которое оказывает несжимаемая неподвижная жидкость на шар радиуса  $R$ , движущийся в ней с постоянной скоростью  $a$  в определенном направлении — направлении оси  $z$ . Предполагаем, что жидкость тяжелая, плотности  $k$ . На основании принципа относительности мы можем взять, вместо движущегося шара в неподвижной жидкости, неподвижный шар с центром в начале координат, в равномерном токе жидкости, т. е. в стационарном течении, скорость которого на бесконечном расстоянии от шара ( $r = \infty$ ) равна:

$$u = 0, v = 0, w = -a. \quad (442)$$

В качестве второго пограничного условия воспользуемся обстоятельством, найденным в предыдущем параграфе, что на поверхности шара, при  $r = R$ , жидкость прилипает к шару, т. е.

$$u = 0, v = 0, w = 0. \quad (443)$$

Дифференциальными уравнениями для определения  $u, v, w$  и  $p$  в качестве функции  $x, y, z$  нам послужат уравнения движения (83) с величинами компонент давления (426), а также условие несжимаемости (385). Уравнения движения вообще не линейны, так как для ускорения мы имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w, \dots \quad (444)$$

Поэтому мы еще упростим задачу, введя ограничивающее допущение: скорости  $u, v, w$  настолько малы, что можно пренебречь членами второй степени в правой части (444). Поэтому уравнения (83) преобразуются следующим образом:

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \dots$$

Подставив выражения составляющих давления (426) и приняв во внимание условие несжимаемости (385), получим:

$$\left(X - \frac{\partial u}{\partial t}\right) k - \frac{\partial p}{\partial x} + z \cdot \Delta u = 0, \dots \quad (445)$$

Далее, так как течение стационарно, и  $X = 0, Y = 0, Z = -g$ , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= z \cdot \Delta u, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= z \cdot \Delta v, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -kg + z \cdot \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (446)$$

Исключив  $p$  из этих трех уравнений, получим:

$$\Delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (447)$$

Теперь задача распадается на две отдельные части: во-первых, определение компонент скорости  $u, v, w$  из (385) и (447) с пограничными условиями (442) и (443), во-вторых, определение давления  $p$  из (446), а также общего действия на шар результирующей компонент давления.

Что касается скорости, то ясно, в виду пограничных условий, что она не может иметь потенциала. Поэтому мы, исходя из уравнений § 65, но несколько обобщив их, сделаем следующее допущение:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u', \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + v', \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + w', \end{aligned} \right\} \quad (448)$$

$$\varphi = a \cdot z + b \cdot \frac{1}{r} + c \cdot \frac{\partial r}{\partial z}, \quad (449)$$

где  $u', v', w'$  обозначают три новые функции более простого вида,  $a, b, c$  — три постоянные. Тогда пограничные условия (442) выполняются, если  $u', v', w'$  обращаются в нуль в бесконечности. Условие несжимаемости (385) требует, чтобы

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \Delta \varphi. \quad (450)$$

Если принять во внимание, что, согласно (449),

$$\Delta\varphi = c \cdot \Delta \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right) = c \cdot \frac{\partial(\Delta r)}{\partial z}$$

и что

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}, \quad (451)$$

то (450) примет вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 2c \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, положим:

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = \frac{2c}{r}.$$

Тогда получим из (448):

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{2c}{r} \end{aligned} \right\} \quad (452)$$

Эти выражения удовлетворяют также всем остальным условиям. Прежде всего легко видеть, что уравнения (447) обращаются в тождества. Остаются еще пограничные условия (443), которые дают при  $r = R$ :

$$0 = b \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + c \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} = \frac{3bxz}{R^5} - \frac{cxz}{R^3},$$

$$0 = b \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + c \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} = \frac{3byz}{R^5} - \frac{cyz}{R^3},$$

$$0 = -a - b \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} - c \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -a - b \left( \frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + c \left( \frac{z^2}{R^3} + \frac{1}{R} \right).$$

Отсюда следует:

$$b = \frac{aR^3}{4}, \quad c = \frac{3}{4}Ra, \quad (453)$$

и величины  $u, v, w$  определены полностью.

Вторая часть задачи представляет собою вычисление давления. Для этого подставим найденные значения  $u, v, w$  в уравнения (446) и проинтегрируем. Получим:

$$p = -kgz - \gamma\Delta\varphi + p_0,$$

где  $p_0$  обозначает давление тока жидкости в плоскости  $z=0$ , если бы там не было шара. Подставив выражение (449) для  $\varphi$ , получим:

$$p = -kgz + 2\gamma c \cdot \frac{z}{r^3} + p_0. \quad (454)$$

Вся сила давления, которое оказывает текущая жидкость на неподвижный шар, есть результирующая всех сил давления, действующих на элементы поверхности шара  $d\sigma$  с внутренними нормальными  $\nu = -r$ . Так как эта результирующая должна быть направлена по оси  $z$ , то она равна на основании (74)

$$\int Z_z d\sigma = \int \left[ Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z) \right] d\sigma, \quad (455)$$

куда нужно подставить величины компонентов давления из (426). Затем нужно проинтегрировать по всей поверхности шара, введя для удобства полярные координаты:  $d\sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ . Непосредственное вычисление довольно сложно, но его можно значительно упростить при помощи следующих соображений.

На основании (83) внутри жидкости для данного случая:

$$kg + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

так как ускорение  $\frac{d^2 z}{dt^2}$  обращается в нуль, как мы видели выше на основании (444).

Проинтегрируем последнее уравнение по пространству между поверхностью твердого шара и какой-нибудь концентрической поверхностью с радиусом  $r > R$ , а затем преобразуем интеграл при помощи (78). Тогда получится следующий результат:

искомый интеграл (455), взятый по поверхности шара с радиусом  $R$ , равен тому же интегралу, взятому по поверхности шара с радиусом  $r$ , плюс такой член:

$$-kg(V_r - V_R), \quad (456)$$

где  $V_r$  и  $V_R$  — объемы обоих шаров. Так как выбор  $r$  совершенно произволен, то мы допустим, что  $r$  бесконечно велико, и этим значительно упростим наши выражения.

Прежде всего при  $r = \infty$ , имеем на основании (452) и (449):

$$z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{6cxz^2}{r^5},$$

$$z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{6cyz^2}{r^5},$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{cz}{r^3} \left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right).$$

Следовательно на основании (426) и принимая во внимание (454):

$$Z_x = \frac{6\gamma cxz^2}{r^5}, \quad Z_y = \frac{6\gamma cyz^2}{r^5},$$

$$Z_z = p_0 - kgz + \frac{6\gamma cz^3}{r^5}.$$

Если подставить эти значения в (455) и проинтегрировать по всем элементам  $d\sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  поверхности шара  $r$  с внутренней нормалью  $\gamma = -r$ , то мы получим выражение:

$$-8\pi\gamma c + kg \cdot V_r.$$

Прибавив член (456), получим величину искомой силы давления на шар:

$$kg V_R - 8\pi\gamma c,$$

или согласно (453)

$$kg V_R - 6\pi\gamma Ra. \quad (457)$$

Первый член соответствует подъемной силе, обусловленной весом вытесненной жидкости (I § 114), а второй член —

сопротивлению трения. Последнее действует, конечно, в направлении потока жидкости (442).

Положим, что шар свободно подвижен и тяжел, веса  $G_0$ , и определим силу  $F$ , с которой нужно действовать на него, чтобы удержать его на месте. Считая силу положительной, если она направлена вверх, получим:

$$F - G_0 = G + 6\pi\gamma Ra. \quad (458)$$

Это и есть та сила, которую нужно приложить к шару снизу вверх, для того чтобы заставить его двигаться в неподвижной жидкости со скоростью  $+a$ . С другой стороны, эта формула *Стокса* дает величину стационарной скорости  $a$ , с которой шар движется в жидкости, когда на него действует постоянная сила  $F$ . Если, например, шар падает под влиянием силы тяжести, то скорость равна:

$$a = \frac{G_0 - G}{6\pi\gamma R}. \quad (459)$$



**УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ВАЖНЕЙШИХ ТЕОРЕМ**

	<i>Стр.</i>		<i>Стр.</i>
Адиабатические явления . . . . .	139	Истечение жидкости . . . . .	156
Аргумент функции . . . . .	81	Источник . . . . .	158
Атмосферное давление . . . . .	137	Консонанс . . . . .	100, 116
Барометр . . . . .	137	Конформное отображение . . . . .	169
Взвешивание . . . . .	116	Кристаллические системы . . . . .	57
Винт правый . . . . .	73	Кручение . . . . .	69
Вихревое кольцо . . . . .	185	Кубическое сжатие . . . . .	65
Вихревая линия . . . . .	147	Ливер . . . . .	137
Вихревая нить . . . . .	148	Линейная упругость . . . . .	66
Волна проходящая . . . . .	98	Линия тока . . . . .	152
Волна стоячая . . . . .	98	Локальная точка зрения . . . . .	128
Волна шаровая . . . . .	118	Манометр . . . . .	137
Волновая нормаль . . . . .	113	Модуль кручения . . . . .	72
Волновое движение . . . . .	82	Модуль упругости, кубический . . . . .	66
Вынужденные колебания . . . . .	106	Модуль упругости, линейный . . . . .	68
Высота звука . . . . .	99	Многосвязное пространство . . . . .	176
Гармонические обертоны . . . . .	101	Момент вихревой нити . . . . .	150
Гидравлический воздушный насос . . . . .	156	Момент двойного источника . . . . .	161
Гидродинамика . . . . .	132	Натуральная система тонов . . . . .	101
Гидродинамическое давление . . . . .	151	Нить тока . . . . .	152
Главные давления . . . . .	43	Нормальное давление . . . . .	38
Главные расширения . . . . .	20	Нормальный тон . . . . .	101
Давление . . . . .	34	Объемное расширение . . . . .	17
Двойной источник . . . . .	161	Однородное изменение . . . . .	18
Дивергенция . . . . .	33	Односвязное пространство . . . . .	175
Длина волны . . . . .	90	Основное колебание . . . . .	96
Закон Пуассона . . . . .	199	Ось симметрии . . . . .	59
Изотропия . . . . .	47	Отражение . . . . .	88
Интенсивность тока . . . . .	154	Падение давления . . . . .	42
Интервалы музыкальные . . . . .	100	Парциальные колебания . . . . .	96
		Парциальный тон . . . . .	99
		Пифагорейская комма . . . . .	103

	<i>Стр.</i>		<i>Стр.</i>
Пифагорейская система тонов . . . . .	102	Срез . . . . .	26
Плоские волны . . . . .	113	Сток . . . . .	158
Поверхностные силы . . . . .	34	Струна . . . . .	77
Поперечные колебания . . . . .	79	Субстанциальная точка зрения . . . . .	128
Потенциал скорости . . . . .	112	Тангенциальное давление . . . . .	38
Потенциал смещения . . . . .	112, 151	Тембр звука . . . . .	99
Правильные кристаллы . . . . .	61	Темперированная система тонов . . . . .	103
Принцип Доплера . . . . .	125	Тензор . . . . .	33
Продольные колебания . . . . .	79	Теорема Торричелли . . . . .	156
Пучность колебаний . . . . .	99	Трение . . . . .	193, 195
Расширение . . . . .	17	Труба звучащая . . . . .	113
Расширение по трем перпендикулярным направлениям . . . . .	19	Узел колебаний . . . . .	99
Резонанс . . . . .	107	Упругий потенциал . . . . .	52
Ромбические кристаллы . . . . .	60	Упругость совершенная . . . . .	46
Ротор . . . . .	33	Уравнение волны . . . . .	113
Ряд Фурье . . . . .	90	Уравнение Гаусса . . . . .	160
Свободная поверхность . . . . .	136	Уравнение непрерывности . . . . .	130
Свободная струя . . . . .	171	Уравнения Лагранжа . . . . .	133
Сдвиг . . . . .	23	Уравнения Эйлера . . . . .	133
Сжатие земли . . . . .	143	Фаза колебания . . . . .	97
Синтоническая комма . . . . .	102	Формула Стокса . . . . .	205
Скорость деформации . . . . .	130	Функциональный определитель . . . . .	13, 29
Скорость звука . . . . .	140		
Сообщающиеся сосуды . . . . .	137		