

**В.Т.ГОРЯКОВ
А.Г.ЖУРАВЛЕВ
В.И.ТИХОНОВ**

**ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ
ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ
РАДИОТЕХНИКЕ**

В. Т. ГОРЯИНОВ, А. Г. ЖУРАВЛЕВ, В. И. ТИХОНОВ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКЕ

Под редакцией
профессора В. И. Тихонова

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве учеб-
ного пособия для студентов радиотехнических
специальностей вузов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО

«СОВЕТСКОЕ

РАДИО»

МОСКВА — 1970



Scan AAW

В. Т. ГОРЯИНОВ, А. Г. ЖУРАВЛЕВ, В. И. ТИХОНОВ, под общей редакцией проф. В. И. ТИХОНОВА. **Примеры и задачи по статистической радиотехнике.** Изд-во «Советское радио», 1970, 600 стр., т. 24 000 экз., ц. 1 р. 35 к.

Книга содержит примеры и задачи по основным разделам статистической радиотехники (теории вероятностей и случайных процессов, помехоустойчивости и теории информации). Материал разбит на 15 глав. В каждой главе приведены справочные теоретические сведения, подробно разобранные примеры и задачи, снабженные ответами.

Задачи отличаются друг от друга как по сложности их решения, так и практической направленности. Наряду с простыми задачами, преследующими чисто методические цели, имеются и сравнительно сложные задачи, требующие при их решении проявления определенной самостоятельности. В ответах к таким задачам даны методические указания на способ решения или указаны источники, где можно найти решения.

Книга может служить учебным пособием по статистической радиотехнике и в основном рассчитана на студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиотехники и автоматики. В качестве справочника она полезна также инженерам и научным работникам.

31 табл., 230 рис., 135 библиогр. назв.

Предисловие

Настоящая книга написана на основе практических занятий по статистической радиотехнике, которые проводились в течение ряда лет со студентами. Однако при ее написании круг рассматриваемых вопросов был расширен, а число примеров и задач в несколько раз увеличено.

Порядок расположения материала и обозначения в основном соответствуют принятым в книге В. И. Тихонова «Статистическая радиотехника» (Изд-во «Советское радио», 1966).

Книга содержит 15 глав, охватывающих все основные разделы статистической радиотехники. В начале каждой главы в кратком виде приведены необходимые теоретические сведения. Методика применения их для решения конкретных практических задач иллюстрируется на ряде подробно разобранных примеров. Затем сформулированы задачи, снабженные ответами, и указана использованная литература. Для удобства решения некоторых задач, где требуется получить ответ в виде числа, в конце книги помещен ряд справочных таблиц.

Всего книга содержит 120 примеров и 670 задач.

При подборе примеров и задач были широко использованы отечественные и иностранные источники, многие примеры и задачи составлены авторами самостоятельно.

Главы отличаются количеством приведенных в них задач. Это отчасти объясняется различной значимостью глав, а главным образом сложностью и громоздкостью решения соответствующих задач. Задачи в одной и той же главе отличаются по сложности их решения и практической направленности.

Исходя из целевого назначения, в книгу включены как простые задачи, преследующие чисто методические цели, так и сравнительно сложные, требующие при решении проявления определенной самостоятельности. В ответах к сложным задачам даны ссылки на источники, где можно найти решения. Кроме этого, часто приводятся и методические указания на способ решения.

Книга в основном рассчитана на студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиотехники и автоматики, и преследует цель оказания им помощи в активном усвоении теоретических основ статистической радиотехники и в выработке навыков применения теории к решению практических задач. Однако авторы надеются

ся, что она будет полезна в качестве справочника также инженерам и научным работникам. Именно поэтому задачи и ответы помещены вместе.

Работа между авторами была распределена следующим образом: гл. 5, 8, 9, 11 и 12 написаны В. Т. Горяиновым; гл. 1—4, 14, 15 и приложение — А. Г. Журавлевым; гл. 6, 7, 10 и 13 — В. И. Тихоновым, который выполнил также общее редактирование книги.

В подборе и решении задач нам была оказана помощь товарищами, с которыми довелось работать в последние годы. Рецензирование книги выполнено профессором Ю. С. Лезиным и доцентом В. П. Жуковым. Выражаем им искреннюю благодарность.

Несмотря на сознание своей ответственности перед читателями, авторы отдают себе ясный отчет в том, что книга не свободна от ошибок и недостатков. Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям сообщить нам свои предложения и замечания по адресу: Москва, Главпочтамт, п/я 693, издательство «Советское радио».

СОБЫТИЯ, ВЕРОЯТНОСТЬ
И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Теоретические сведения

Событие — всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

События подразделяются на достоверные, невозможные и случайные, причем достоверные события обозначаются буквой U , невозможные — V , а случайные — буквами A, B, C, \dots . Вероятность достоверного события принимается за единицу, а вероятность невозможного — за нуль:

$$P(U) = 1, \quad P(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена в пределах от 0 до 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.1)$$

Если всякий раз, когда происходит событие A , происходит также событие B , то говорят, что событие A влечет за собой событие B , и обозначают $A \subset B$. Если $A \subset B$ и в то же время $B \subset A$, то говорят, что события A и B равносильны, и обозначают $A = B$. В этом случае $P(A) = P(B)$.

Суммой (объединением) множества событий A, B, C, \dots называется такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно («хотя бы одно») из этих событий. Сумма событий A, B, C, \dots обозначается знаком $A + B + C + \dots$. Если события обозначены буквой A с различными индексами k , то сумма этих событий обозначается $\sum_k A_k$.

Из определения суммы событий непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A + A &= A; & A + U &= U; & A + V &= A; & A + B &= B + A; \\ (A + B) + C &= A + (B + C). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Произведением (или совмещением, или пересечением) событий A, B, C, \dots называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходят все события вместе («одновременно»). Для обозначения произведения событий применяются следующие записи: $ABC \dots, \prod_k A_k$ — если события обозначены одной буквой A с различными индексами.

Для произведения событий справедливы соотношения:

$$AA = A; AV = V; AU = A; AB = BA; (AB)C = A(BC). \quad (1.3)$$

Для операций умножения и сложения событий, применяемых совместно, справедлив обычный распределительный (дистрибутивный) закон

$$(A + B)C = AC + BC \quad (1.4)$$

и, кроме того, так называемый «второй распределительный закон» [1]

$$AB + C = (A + C)(B + C). \quad (1.5)$$

События A, B, C, \dots образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них. Другими словами, сумма событий, образующих полную группу, является достоверным событием, т. е.

$$A + B + C + \dots = U.$$

События A и B называются несовместными (или несовместимыми), если их совместное появление невозможно, т. е. если

$$AB = V.$$

Два несовместных события, образующих полную группу, называются противоположными (или дополнительными) событиями. Событие, противоположное событию A , обозначается \bar{A} .

Для противоположных событий справедливы формулы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= A; \bar{\bar{V}} = V; \bar{\bar{U}} = U; A + \bar{A} = U; A\bar{A} = V; \\ \overline{A+B} &= \bar{A}\bar{B}; \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}; A + B = A + \bar{A}B; \\ A + B &= \overline{\bar{A}\bar{B}}; AB = \overline{\bar{A} + \bar{B}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Когда рассматриваемый опыт имеет N равновероятных исходов, которые несовместны и составляют полную группу (схема слу-чаев), вероятность $P(A)$ события A равна

$$P(A) = \frac{n}{N}, \quad (1.7)$$

где n — число исходов, которые приводят к наступлению события A (благоприятствуют событию A).

При решении задач на непосредственный подсчет вероятностей с использованием формулы (1.7) общих способов для нахождения чисел N и n нет. Во многих случаях целесообразно использовать «комбинаторные» способы, т. е. теорию соединений (размещений, перестановок, сочетаний). При этом часто приходится вычислять число сочетаний (см. табл. приложения III)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.8)$$

Если значения n и k велики, то используют приближенную формулу Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \quad (1.9)$$

Эта формула дает хорошую точность приближения и при сравнительно небольших значениях n . Так, например, относительная погрешность ее не превосходит 0,1 при $n > 1$, не превосходит 0,01 при $n > 10$ и 0,001 при $n > 100$.

В некоторых задачах понятие равновозможности событий применяется к опытам с бесконечным числом исходов, когда числа N и n определить невозможно. Иногда же проще вычислить саму вероятность события (отношение $\frac{n}{N}$), а не порознь числа исходов n и N . В таких случаях пользуются геометрическими вероятностями, которые определяются формулой

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}, \quad (1.10)$$

где G — геометрическая мера (длина, площадь, объем и т. д.) всей области; g — геометрическая мера части области G , попадание в которую благоприятствует событию A .

Определение вероятности сложного события A через вероятности более простых событий A_1, A_2, \dots, A_n базируется на использовании основных теорем теории вероятностей (теоремы сложения и умножения вероятностей и их следствий).

Согласно теореме сложения вероятностей вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.11)$$

Если события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.12)$$

Формулы (1.11) и (1.12) обобщаются на сумму любого числа n событий:

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(A_k A_j) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n P(A_k A_j A_i) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right), \quad (1.11a)$$

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k). \quad (1.12a)$$

Сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу, равна единице, т. е.

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) = 1. \quad (1.13)$$

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.14)$$

По теореме умножения вероятностей для двух событий вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что произошло первое:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \quad (1.15)$$

где $P(A|B)$ — условная вероятность события A , т. е. вероятность события A , вычисленная в предположении, что имело место событие B .

Если событие A статистически не зависит от события B , то $P(A|B) = P(A)$, причем события A и B называются независимыми. При независимых событиях A и B выражение (1.15) принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1.16)$$

Формулы (1.15) и (1.16) обобщаются на n событий A_1, A_2, \dots, A_n :

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (1.15a)$$

$$P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k). \quad (1.16a)$$

Решение многих практических задач требует совместного использования теорем сложения и умножения вероятностей. В частности, с помощью этих теорем производится расчет надежности, например, радиотехнических систем.

Надежностью некоторой системы (или ее элемента) называют вероятность того, что система (элемент) в течение установленного времени будет работать без отказов.

При объединении нескольких элементов в систему различают их параллельное (резервирование) и последовательное соединение. При параллельном соединении (рис. 1.1) отказ системы возможен только

при отказе всех элементов, а при последовательном (рис. 1.2) отказ системы происходит при отказе любого элемента [2].

Надежность P параллельного соединения k элементов равна

$$P = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i), \quad (1.17)$$

где p_i — вероятность безотказной работы (надежность) i -го элемента. С увеличением числа параллельно включенных элементов надежность системы возрастает.

Надежность P последовательного соединения k элементов вычисляется по формуле

$$P = \prod_{i=1}^n p_i. \quad (1.18)$$

С увеличением числа последовательно включенных элементов надежность системы убывает.

Во многих реальных ситуациях то или иное событие A может появиться лишь как случайное следствие одного из несовместных событий $H_i, i = 1, 2, \dots, n$, которые входят в некоторую полную группу событий и называются гипотезами. В таких случаях безусловная вероятность $P(A)$ события A при известных вероятностях гипотез $P(H_i)$ и условных вероятностях $P(A|H_i)$ определяется по формуле полной (или средней) вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A|H_i). \quad (1.19)$$

При этих же данных, т. е. известных вероятностях $P(H_i)$ и $P(A|H_i)$, можно найти изменение вероятностей гипотез H_i , если предположить, что событие A уже произошло. Задачи подобного типа решаются с помощью теоремы гипотез (или формулы Байеса)

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{k=n} P(H_k) P(A|H_k)} = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)}. \quad (1.20)$$

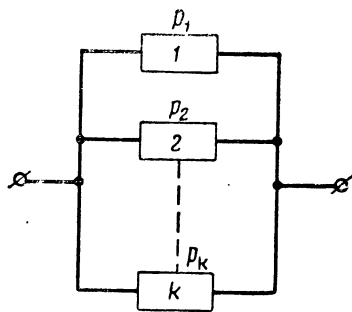


Рис. 1.1. Параллельное соединение элементов.

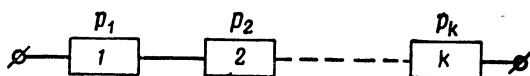


Рис. 1.2. Последовательное соединение элементов.

Вероятность $P(H_i)$ называется априорной (или доопытной), а $P(H_i|A)$ — апостериорной (послеопытной) или обратной вероятностью.

В теории передачи сообщений, теории стрельбы, контроле качества продукции и т. д. часто возникают задачи по определению вероятности появления какого-то события A в результате серии опытов, в каждом из которых это событие может произойти или не произойти. Проще всего они решаются тогда, когда опыты являются независимыми, т. е. вероятность того или иного исхода опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Способ решения подобных задач дает теорема о повторении опытов (формула Я. Бернулли).

Вероятность $P_n(k)$ того, что при n независимых опытах (испытаниях) событие A появится ровно k раз, если при каждом опыте вероятность события A одинакова и равна p , определяется формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.21)$$

где $q = 1 - p$.

Формулой (1.21) неудобно пользоваться при больших n . В этом случае для подсчета вероятности $P_n(k)$ применяют приближенные формулы.

Если n велико, p мало, а $np = \lambda$ имеет конечное значение, то пользуются приближенной формулой Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (1.22)$$

Приближенное значение относительной погрешности при применении формулы (1.22) вместо (1.21) составляет величину

$$r_n(k) = \frac{k - (k - np)^2}{2n} + \frac{1}{2} kp^2. \quad (1.23)$$

Когда npq не слишком мало, то применяется локальная формула Муавра — Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \omega(x), \quad (1.24)$$

где $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Приближенное значение относительной погрешности при вычислении вероятности $P_n(k)$ по формуле (1.24) составляет величину

$$r_n(k) = \frac{p - q}{2\sqrt{npq}} x \left(1 - \frac{x^2}{3} \right). \quad (1.25)$$

С помощью формулы (1.21) можно вычислить вероятность $P_n(m \geq k)$ того, что при n независимых опытах событие A , имеющее вероятность p , появится не менее k раз:

$$P_n(m \geq k) = \sum_{m=k}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (1.26)$$

Вероятность $P_n(m \geq 1)$ появления события хотя бы один раз при n опытах равна

$$P_n(m \geq 1) = 1 - q^n. \quad (1.27)$$

Вероятность $P_n(m \leq k)$ того, что при n независимых опытах событие A , имеющее вероятность p , появится не более k раз, определяется выражением

$$P_n(m \leq k) = \sum_{m=0}^k C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (1.28)$$

Если вероятность появления события в каждом опыте равна p , то вероятность того, что в серии из n независимых опытов событие появится от μ до ν раз включительно, равна

$$P_n(\mu \leq k \leq \nu) = \sum_{m=\mu}^{\nu} C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (1.29)$$

При больших n , μ и ν этой формулой пользоваться затруднительно. В этом случае используют приближенную интегральную формулу Муавра — Лапласа

$$P_n(\mu \leq k \leq \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (1.30)$$

где

$$a = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}; \quad b = \frac{\nu - np}{\sqrt{npq}}; \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Количество n опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью не меньше P_1 можно было утверждать, что данное событие произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \geq \frac{\log(1 - P_1)}{\log(1 - p)}. \quad (1.31)$$

Наивероятнейшим числом k_0 появлений события A в n независимых опытах называется такое значение $k = k_0$, при котором вероятность $P_n(k)$ наибольшая. Для его определения служит формула

$$np - q < k_0 < np + p. \quad (1.32)$$

Если число $np - q$ дробное, то неравенство (1.32) определяет одно значение наимвероятнейшего числа. Если же число $np - q$ целое, то неравенство (1.32) определяет два значения наимвероятнейшего числа.

Формула (1.21) составляет содержание так называемой частной теоремы о повторении опытов. Известно несколько обобщений ее. Одно из них относится к случаю, когда из-за изменяющихся условий при проведении n независимых опытов вероятность p меняется от опыта к опыту (общая теорема о повторении опытов). В этом случае вероятность $P_n(k)$ появления события A ровно k раз определяется по производящей функции [3]

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z) = \sum_{k=0}^n P_n(k) z^k, \quad (1.33)$$

где p_i — вероятность появления события в i -м опыте; $q_i = 1 - p_i$.

Искомая вероятность $P_n(k)$ равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции и может быть определена дифференцированием функции $\varphi_n(z)$:

$$P_n(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \varphi_n(z)}{dz^k} \right]_{z=0}. \quad (1.34)$$

Второе обобщение формулы (1.21) имеет в виду, что каждый опыт может иметь не два, а большее число исходов. Если, например, при каждом повторении опыта может произойти только одно из событий A_1, A_2, \dots, A_m соответственно с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_m ($\sum_1^m p_i = 1$), то вероятность $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ того, что при n независимых опытах событие A_1 появится k_1 раз, событие A_2 появится k_2 раз, ..., событие A_m появится k_m раз ($\sum_{i=1}^m k_i = n$), определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}. \quad (1.35)$$

Вероятность $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ является коэффициентом при $z_1^{k_1}, z_2^{k_2}, \dots, z_m^{k_m}$ в разложении по степеням аргументов z_k полинома

$$\varphi_n(z_1, z_2, \dots, z_m) = (p_1 z_1 + p_2 z_2 + \dots + p_m z_m)^n, \quad (1.36)$$

представляющего собой производящую функцию для совокупности чисел $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

§ 2. Примеры

Пример 1.1. Доказать справедливость следующего соотношения между событиями: $(A + B)C = AC + BC$.

Решение. Заданный распределительный закон можно доказать путем непосредственного рассмотрения смысла утверждений, выражаемых каждой частью равенства. Левая часть данного равенства означает событие, состоящее в том, что произошли совместно события A или B и событие C . Правая часть означает, что происходят события A вместе с C или B вместе с C (или и то, и другое). Эти два утверждения равносильны.

Пример 1.2. Показать, что $A + AB + BC + \bar{A}C = A + C$.

Решение. Доказательство справедливости заданного равенства проведем алгебраическим путем. Используя формулы (1.2) — (1.6), имеем

$$\begin{aligned} A + AB + BC + \bar{A}C &= (AU + AB) + BC + \bar{A}C = A(U + B) + \bar{A}C + \\ &+ BC = AU + \bar{A}C + BC = A + \bar{A}C + BC = A + AC + \bar{A}C + BC = \\ &= A + C(A + \bar{A}) + BC = A + C + BC = A + C. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Две игральные кости бросаются один раз. Найти вероятность $P(A)$ того, что сумма выпавших очков есть простое число.

Решение. Число всех возможных случаев N , т. е. число пар чисел (i, j) , равно $N = 6^2$. Число благоприятствующих случаев n подсчитаем следующим образом. Расположим все возможные исходы, т. е. пары (i, j) и суммы $i + j$, в виде таблицы.

| $i \backslash j$ | i | | | | | |
|------------------|-----------|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | $(i + j)$ | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Из таблицы видно, что простое число 2 получается один раз, простое число 3 — два раза, простое число 5 — четыре раза, простое число 7 — шесть раз, простое число 11 — два раза. Таким образом, число благоприятствующих случаев n равно

$$n = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{15}{36} \approx 0,417.$$

Пример 1.4. По линии связи в случайном порядке передаются все 30 знаков алфавита.

Определить вероятность $P(A)$ того, что на ленте появится последовательность букв, образующих слово «радио».

Решение. Число всех равновозможных случаев N (число выборов из 30 букв алфавита по 5) равно числу размещений из 30 по 5 букв, т. е.

$$N = A_{30}^5 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26.$$

Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один (комбинация, образующая слово «радио»), т. е. $n = 1$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{1}{A_{30}^5} = \frac{1}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}.$$

Пример 1.5. Производится прием кодовых комбинаций, содержащих пять цифр от 1 до 5.

Какова вероятность $P(A)$ того, что в принятой комбинации цифры образуют последовательность 1 2 3 4 5?

Решение. Число всех равновозможных случаев N равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $N = P_5 = 5! = 120$. Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один, т. е. $n = 1$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Пример 1.6. В партии из N запасных радиоламп предполагается M нестандартных. Для проверки наудачу выбираются k радиоламп из этой партии ($k < N$).

Определить вероятность $P(A)$ того, что среди них окажутся ровно l нестандартных ($l \leq M$).

Решение. Общее число возможных выборов из N радиоламп по k равно числу сочетаний из N элементов по k , т. е. C_N^k . Благоприятствующими поставленному условию являются случаи, когда из общего числа M нестандартных радиоламп взято ровно l штук, что можно осуществить C_M^l способами. Но каждый из этих случаев в контрольной партии может быть в различной комбинации с остальными $k - l$ стандартными лампами. Число таких комбинаций равно C_{N-M}^{k-l} . Следовательно, общее число благоприятствующих случаев будет равно произведению $C_M^l C_{N-M}^{k-l}$. В соответствии с определением вероятности получим

$$P(A) = \frac{C_M^l C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

Пример 1.7. В любые моменты времени промежутка T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Приемник будет перегружен, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ .

Определить вероятность $P(A)$ того, что приемник будет перегружен.

Решение. Изобразим случайные моменты поступления сигналов в радиоприемник τ_1 и τ_2 как декартовы координаты на плоскости. Областью возможных значений τ_1 и τ_2 является квадрат площадью $S = T^2$ (рис. 1.3).

Приемник будет перегружен, если $|\tau_2 - \tau_1| \leq \tau$. Данная область лежит между прямыми $\tau_2 - \tau_1 = \tau$ и $\tau_2 - \tau_1 = -\tau$. Площадь этой области s равна

$$s = T^2 - (T - \tau)^2.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G} = \frac{s}{S} = 1 - \frac{(T - \tau)^2}{T^2}.$$

Пример 1.8. На отрезок AB длиной l бросают наугад точки L и M , причем вероятность попадания каждой точки в какой-либо интервал, принадлежащий AB , не зависит от его положения внутри AB и пропорциональна его длине.

Какова вероятность P того, что площадь прямоугольника со сторонами AL и AM будет меньше θl^2 , где $0 < \theta < 1$?

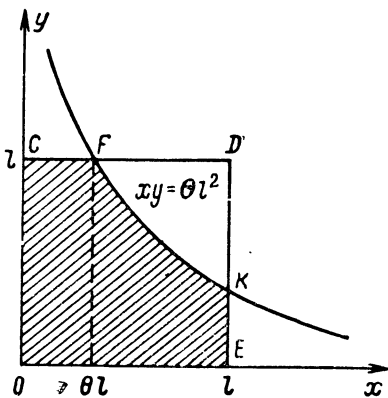


Рис. 1.4. К вычислению вероятности P .

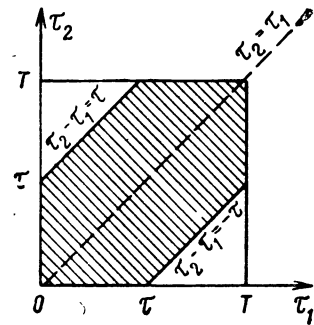


Рис. 1.3. К вычислению вероятности $P(A)$.

Решение. Примем точку A за начало отсчета и пусть направление AB совпадает с положительным направлением оси. Изобразим случайные абсциссы x и y точек L и M как декартовы координаты случайной точки на плоскости xOy . Областью ее возможных положений является квадрат $OCDE$ со стороной l (рис. 1.4). Но область возможных положений случайной точки при условии, что прямоугольник, построенный на отрезках AL и AM , будет меньше θl^2 , является область s , которая ограничена прямыми $x =$

$= 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = l$ и гиперболой $xy = \theta l^2$. Так как $S = l^2$, а

$$s = \theta l \cdot l + \int_{\theta l}^l \frac{\theta l^2}{x} dx = \theta l^2 + \theta l^2 \ln \frac{1}{\theta},$$

то

$$P = \frac{s}{S} = \theta \left(1 + \ln \frac{1}{\theta} \right).$$

Пример 1.9. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 100 отказов телевизора приходится: 50% по причине выхода из строя электронных ламп, 15% — конденсаторов, 12% — резисторов, 5% — кинескопов, а остальные по другим причинам.

Найти вероятность $P(A)$ отказа телевизора по другим причинам.

Решение. По условию примера вероятности выхода из строя телевизора из-за отказа различных элементов равны:

$$P(A_1) = 0,5; P(A_2) = 0,15; P(A_3) = 0,12; P(A_4) = 0,05,$$

где A_1 — отказ телевизора по причине выхода из строя электронных ламп; A_2 — отказ телевизора из-за конденсаторов; A_3 — отказ телевизора из-за резисторов; A_4 — отказ телевизора из-за кинескопов.

События A, A_1, A_2, A_3, A_4 составляют полную группу. Следовательно,

$$P(A) = 1 - \sum_{i=1}^4 P(A_i) = 1 - (0,5 + 0,15 + 0,12 + 0,05) = 0,18.$$

Пример 1.10. В партии из N полупроводниковых триодов имеется M бракованных. Из партии берется наугад для контроля n триодов.

Какова вероятность $P(A)$ того, что среди них будет не более m бракованных?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что среди n взятых для контроля триодов будет не более m бракованных. Событие A произойдет тогда, когда среди n взятых на проверку триодов или не будет ни одного бракованного (событие A_0), или один бракованный (событие A_1), или два бракованных (событие A_2), или..., или окажется m бракованных триодов (событие A_m), т. е.

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots + A_m = \sum_{k=0}^m A_k.$$

Вероятность $P(A_k)$ события A_k равна

$$P(A_k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Следовательно, по теореме сложения вероятностей событий имеем

$$P(A) = \sum_{k=0}^m P(A_k) = \frac{\sum_{k=0}^m C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Пример 1.11. Обнаружение воздушной цели производится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность $P(A)$ обнаружения цели первой станцией равна 0,7. Вероятность $P(B)$ обнаружения цели второй станцией равна 0,8.

Определить вероятность $P(C)$ того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.

Решение. По условию события A и B независимы, поэтому вероятность совместного события AB (цель обнаружена обеими станциями) равна

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Тогда согласно теореме сложения вероятностей совместных событий [см. формулу (1.11)] получим

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$$

Так как события A и B независимы, то пример можно было бы решить через переход к противоположным событиям \bar{A} и \bar{B} . В этом случае

$$\begin{aligned} P(C) = P(A + B) &= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)] = \\ &= 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94. \end{aligned}$$

Пример 1.12. Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, которые тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются четыре карточки.

Какова вероятность $P(A)$ получить слово «тема»?

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — события, состоящие в последовательном извлечении букв т, е, м, а. Тогда соответствующие вероятности равны:

$$P(A_1) = \frac{2}{10}; \quad P(A_2 | A_1) = \frac{1}{9}; \quad P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{2}{8}; \quad P(A_4 | A_1 A_2 A_3) = \frac{3}{7}.$$

Применяя формулу (1.15а), получим

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2)P(A_4 | A_1 A_2 A_3) = \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{420}. \end{aligned}$$

Пример 1.13. Два стрелка, чередуясь, стреляют по мишени до первого попадания. Каждый из них имеет право сделать не более двух выстрелов. Зная, что при одном выстреле первый стрелок по-

падает в мишень с вероятностью p_1 , а второй — с вероятностью p_2 , найти вероятности того, что: а) первый стрелок попадет в мишень; б) второй стрелок попадет в мишень.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A — первый стрелок попадает в мишень, B — второй стрелок попадает в мишень, A_1 — попадание у первого стрелка при первом выстреле, \bar{A}_1 — промах у первого стрелка при первом выстреле, A_2 — попадание у первого стрелка при втором выстреле, \bar{A}_2 — промах у первого стрелка при втором выстреле, B_1 — попадание у второго стрелка при первом выстреле, \bar{B}_1 — промах у второго стрелка при первом выстреле, B_2 — попадание у второго стрелка при втором выстреле. Тогда

$$A = A_1 + \bar{A}_1 \bar{B}_1 A_2; \quad B = \bar{A}_1 B_1 + \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{A}_2 B_2.$$

Так как

$$P(A_1) = P(A_2) = p_1; \quad P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = 1 - p_1;$$

$$P(B_1) = P(B_2) = p_2; \quad P(\bar{B}_1) = 1 - p_2,$$

то

$$\text{а) } P(A) = p_1 + (1 - p_1)(1 - p_2)p_1 = p_1 [1 + (1 - p_1)(1 - p_2)];$$

$$\text{б) } P(B) = (1 - p_1)p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_1)p_2 = (1 - p_1)p_2 \times \\ \times [1 + (1 - p_1)(1 - p_2)].$$

Пример 1.14. Система управления состоит из четырех узлов A_1 , A_2 , A_3 и A_4 (рис. 1.5). Вероятности p_i безотказной работы узлов соответственно равны p_1 , p_2 , p_3 , p_4 .

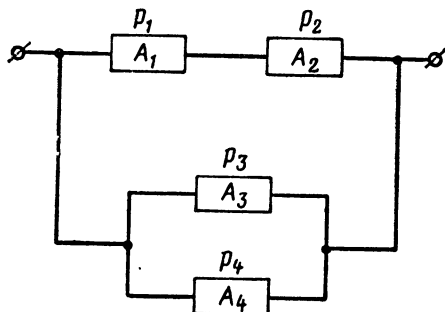


Рис. 1.5. Блок-схема системы управления.

Вычислить надежность P всей системы управления.

Решение. Надежность p_{12} цепи из двух последовательно соединенных элементов A_1 и A_2 согласно формуле (1.18) равна

$$p_{12} = \prod_{i=1}^2 p_i = p_1 p_2.$$

Надежность p_{34} цепи, состоящей из двух параллельно соединенных элементов A_3 и A_4 , определим по формуле (1.17)

$$p_{34} = 1 - \prod_{j=3}^4 (1 - p_j) = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4).$$

Применяя формулу (1.17) еще раз, получим надежность P всей системы уравнения:

$$P = 1 - \prod_k (1 - p_k) = 1 - (1 - p_{12})(1 - p_{34}) = 1 - (1 - p_1 p_2) \times \\ \times (1 - p_3)(1 - p_4).$$

Пусть, например, $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,8$; $p_4 = 0,9$. Тогда

$$P = 1 - (1 - 0,7 \cdot 0,6)(1 - 0,8)(1 - 0,9) = 1 - 0,58 \cdot 0,2 \times \\ \times 0,1 = 0,9884 \approx 0,99.$$

Пример 1.15. В двух партиях однотипных изделий содержится соответственно a и b изделий, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего из второй партии наугад выбирается одно изделие.

Какова вероятность $P(A)$ того, что это изделие окажется бракованным?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что извлеченное из второй партии изделие бракованное. Из первой партии во вторую может быть переложено бракованное изделие (гипотеза H_1), либо небракованное (гипотеза H_2), причем вероятности этих событий равны

$$P(H_1) = \frac{1}{a}, \quad P(H_2) = \frac{a-1}{a}.$$

Условная вероятность $P(A|H_1)$ того, что при гипотезе H_1 из второй партии выбрано бракованное изделие равна $P(A|H_1) = \frac{2}{b+1}$, а условная вероятность выбора из второй партии бракованного изделия при гипотезе H_2 равна $P(A|H_2) = \frac{1}{b+1}$. Тогда согласно формуле полной вероятности (1.19) получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(H_i) P(A|H_i) = \frac{1}{a} \frac{2}{b+1} + \frac{a-1}{a} \frac{1}{b+1} = \frac{a+1}{a(b+1)}.$$

Пример 1.16. Вероятности того, что параметры одного из трех блоков радиостанции (антенно-фидерного устройства, приемника или передатчика) выйдут за время полета из допусков равны соот-

ветственно 0,1; 0,2; 0,3. В случае, если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, двух блоков — 0,4, трех — 0,5.

Найти вероятность $P(A)$ того, что связь не будет установлена.

Решение. К интересующему нас событию A ведут три гипотезы:

H_1 — за поле допусков вышли параметры одного блока;

H_2 — за поле допусков вышли параметры двух блоков;

H_3 — за поле допусков вышли параметры трех блоков.

Согласно теореме сложения и умножения вероятностей имеем:

$$P(H_1) = 0,1(1-0,2)(1-0,3) + 0,2(1-0,1)(1-0,3) + 0,3 \times \\ \times (1-0,1)(1-0,2) = 0,398;$$

$$P(H_2) = 0,1 \cdot 0,2(1-0,3) + 0,1 \cdot 0,3(1-0,2) + 0,2 \cdot 0,3(1-0,1) = 0,092;$$

$$P(H_3) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006.$$

По условию $P(A|H_1) = 0,25$; $P(A|H_2) = 0,4$; $P(A|H_3) = 0,5$. Следовательно, по формуле полной вероятности (1.19) получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) P(A|H_i) = 0,398 \cdot 0,25 + 0,092 \cdot 0,4 + \\ + 0,006 \cdot 0,5 \approx 0,139.$$

Пример 1.17. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (1 и 0) уменьшается до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Спрашивается, какая команда была передана?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в приеме комбинации 10110. К этому событию ведут две гипотезы: H_1 — была передана комбинация 11111; H_2 — была передана комбинация 00000.

По условию $P(H_1) = 0,7$; $P(H_2) = 0,3$. Условная вероятность приема кодовой комбинации 10110 вместо 11111 равна

$$P(A|H_1) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \approx 0,035.$$

Аналогично $P(A|H_2) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \approx 0,023$.

По формуле гипотез (1.20) находим

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{\sum_{k=1}^2 P(H_k) P(A|H_k)} = \frac{0,7 \cdot 0,035}{0,7 \cdot 0,035 + 0,3 \cdot 0,023} \approx 0,78;$$

$$P(H_3 | A) = \frac{0,3 \cdot 0,023}{0,0314} = 0,22.$$

На основании сравнения найденных условных вероятностей заключаем, что при появлении на выходе комбинации 10110 с вероятностью 0,78 была передана команда 11111.

Пример 1.18. Имеются две одинаковые на вид урны: в первой — два белых шара и три черных, во второй — три белых и один черный. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую два шара, а затем из второй урны наугад вынимают один шар. Этот шар оказался белым. Какой состав переложённых шаров является наиболее вероятным?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что вынутый из второй урны шар белый. К этому событию ведут три гипотезы (предположения):

H_1 — из первой урны во вторую переложены два белых шара;

H_2 — из первой урны во вторую переложены два черных шара;

H_3 — из первой урны во вторую переложены один белый и один черный шары.

По условию вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A | H_i)$ имеют следующие значения:

$$P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}; \quad P(H_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10};$$

$$P(H_3) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10};$$

$$P(A | H_1) = \frac{3+2}{4+2} = \frac{5}{6}; \quad P(A | H_2) = \frac{3}{6};$$

$$P(A | H_3) = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6}.$$

Согласно формуле гипотез (1.20) апостериорные вероятности гипотез $P(H_i | A)$ будут равны

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) P(A | H_1)}{\sum_{k=1}^3 P(H_k) P(A | H_k)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{6} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{5}{38};$$

$$P(H_2 | A) = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{5}{60}} = \frac{9}{38}; \quad P(H_3 | A) = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{5}{60}} = \frac{12}{19}.$$

Сравнивая значения апостериорных вероятностей, видим, что, наиболее вероятно из первой урны во вторую переложили один черный шар и один белый шар.

Пример 1.19. Производится 6 независимых выстрелов по цели. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,75.

Вычислить: а) вероятность ровно пяти попаданий; б) вероятность не менее пяти попаданий; в) вероятность более трех промахов.

Решение.

а) По условию вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0,75$. Следовательно, вероятность промаха $q = 1 - p = 0,25$. Вероятность $P_6(5)$ ровно пяти попаданий по формуле (1.21) равна

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = 6(0,75)^5 \cdot 0,25 \approx 0,356.$$

б) Требование, чтобы при 6 выстрелах было не менее пяти попаданий, будет удовлетворено, если осуществится или 5 попаданий, или 6. Эти события несовместны. Поэтому по формуле (1.26) имеем

$$\begin{aligned} P_6(m \geq 5) &= \sum_{m=5}^6 C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 = \\ &= 6 \cdot (0,75)^5 \cdot 0,25 + 1 \cdot (0,75)^6 \cdot 1 \approx 0,534. \end{aligned}$$

в) Вероятность того, что при 6 выстрелах будет более трех промахов, равна вероятности того, что при этих 6 выстрелах будет меньше трех попаданий (или ни одного попадания, или одно, или два попадания). Используя формулу (1.28), получим

$$\begin{aligned} P_6(m \leq 2) &= \sum_{m=0}^2 C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 + C_6^2 p^2 q^4 = \\ &= (0,25)^6 + 6 \cdot 0,75 (0,25)^5 + 15 \cdot (0,75)^2 \cdot (0,25)^4 = 0,0376. \end{aligned}$$

Пример 1.20. Вероятность p появления события A при каждом испытании равна 0,2. Производится 400 независимых испытаний.

Определить вероятность $P_n(k)$ того, что: а) событие A наступит ровно 80 раз; б) событие A наступит от 60 до 96 раз включительно.

Решение.

а) Воспользуемся приближенной локальной формулой Муавра—Лапласа (1.24). По условию $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Следовательно,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0.$$

Тогда

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \omega(0).$$

По таблице (см. приложение I) находим $\omega(0) = 0,3989$. Окончательно получим

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} 0,3989 \approx 0,0499.$$

Формула (1.21) приводит примерно к такому же результату:

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

б) Для ответа на второй вопрос используем приближенную интегральную формулу Муавра — Лапласа (1.30)

$$\begin{aligned} P_{400}(60 \leq k \leq 96) &= \Phi\left(\frac{96 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2,5) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2,5)]. \end{aligned}$$

По таблице (см. приложение II) находим $\Phi(2) = 0,977$; $\Phi(2,5) = 0,994$. Следовательно,

$$P_{400}(60 \leq k \leq 96) = 0,977 - 1 + 0,994 = 0,991.$$

Пример 1.21. Противотанковое орудие ведет стрельбу по танку. Всего производится 6 выстрелов, причем вероятность попадания в танк при каждом выстреле равна 0,3.

Рассчитать: а) наимвероятнейшее число попаданий в танк; б) число выстрелов, необходимых для того, чтобы с вероятностью 0,9 поразить танк, если для этого достаточно одного попадания.

Решение.

а) Наивероятнейшее число попаданий k_0 находим по формуле (1.32). По условию $n = 6$; $p = 0,3$; $q = 1 - 0,3 = 0,7$. Следовательно,

$$6 \cdot 0,3 - 0,7 \leq k_0 < 6 \cdot 0,3 + 0,3,$$

т. е.

$$1,1 \leq k_0 < 2,1.$$

Между числами 1,1 и 2,1 заключено лишь одно целое число — два. Поэтому наивероятнейшее число $k_0 = 2$.

б) Применив формулу (1.31), получим

$$n \geq \frac{\log(1-0,9)}{\log(1-0,3)} \approx 6,45.$$

Таким образом, для поражения танка с вероятностью 0,9 достаточно произвести 7 выстрелов.

Пример 1.22. Производится три независимых выстрела по одной и той же цели. Вероятность попадания при первом выстреле 0,3, при втором — 0,4 и при третьем — 0,5.

Определить вероятности промаха одного, двух и трех попаданий, т. е. $P_3(0)$, $P_3(1)$, $P_3(2)$, $P_3(3)$.

Решение. По условию $n = 3$; $p_1 = 0,3$; $q_1 = 1 - 0,3 = 0,7$; $p_2 = 0,4$; $q_2 = 0,6$; $p_3 = 0,5$ и $q_3 = 0,5$. Составляем производящую функцию, т. е. полином $\varphi_n(z)$:

$$\begin{aligned}\varphi_3(z) &= \prod_{i=1}^3 (q_i + p_i z) = (0,7 + 0,3z)(0,6 + 0,4z)(0,5 + 0,5z) = \\ &= 0,21 + 0,44z + 0,29z^2 + 0,06z^3.\end{aligned}$$

Искомая вероятность $P_n(k)$ равна коэффициенту при z^k . Следовательно,

$$P_3(0) = 0,21; P_3(1) = 0,44; P_3(2) = 0,29; P_3(3) = 0,06.$$

Пример 1.23. На участке обстрела находятся три цели. Вероятности p_i попадания в первую, вторую и третью цели соответственно равны $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$. По участку произведено 12 выстрелов.

Какова вероятность того, что в первую цель попадет 5 снарядов, во вторую — 4 и в третью — 2 снаряда?

Решение. По условию $n = 12$; $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$; $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 1 - 0,9 = 0,1$; $k_1 = 5$; $k_2 = 4$; $k_3 = 2$; $k_4 = 12 - 5 - 4 - 2 = 1$. Здесь p_4 — вероятность попадания в область, находящуюся вне целей; k_4 — число попаданий в эту область.

Согласно формуле (1.35) искомая вероятность равна

$$P_{12}(5, 4, 2, 1) = \frac{12!}{5!4!2!1!} (0,4)^5 \cdot (0,3)^4 \cdot (0,2)^2 \cdot 0,1 \approx 0,0276.$$

§ 3. Задачи и ответы

1.1. Привести примеры двух событий: а) равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы; б) несовместных и образующих полную группу, но неравновозможных; в) равновозможных и образующих полную группу, но несовместных.

1.2. Разведывательная пеленгаторная система состоит из четырех синхронно вращающихся антенн с неперекрывающимися диаграммами направленности (рис. 1.6), причем каждая антенна соединена со своим приемником. Длительность сигнала такова, что он не может быть обнаружен двумя приемниками.

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — соответственно события, состоящие в обнаружении сигнала первым, вторым, третьим и четвертым приемником.

Определить событие A , которое состоит в обнаружении сигнала пеленгаторной системой.

Ответ: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$

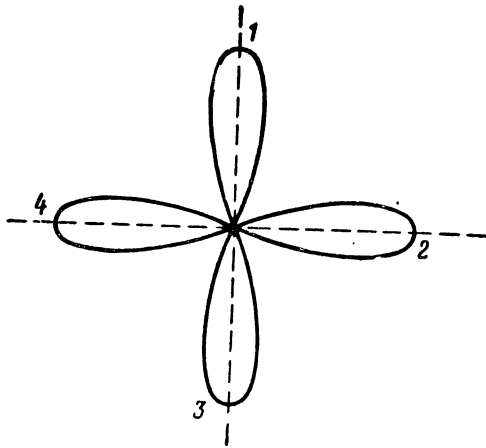


Рис. 1.6. Диаграммы направленности антенн.

1.3. Безотказная работа радиоэлектронного комплекса (событие A) возможна при условии, если отсутствуют отказы в работе узла 1 (событие A_1), узла 2 (событие A_2), ..., узла n (событие A_n). Найти связь события A с частными событиями A_i , $i = 1, 2, \dots, \dots, n$.

Ответ: $A = A_1 A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^n A_i$.

1.4. Выбирается наугад случайная точка внутри квадрата, представленного на рис. 1.7. Пусть событие A — попадание случай-

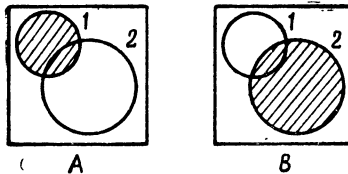


Рис. 1.7. События A и B .

ной точки в круг 1, а событие B — попадание случайной точки в круг 2.

В каких соотношениях с событиями A и B находятся события C , D , E , F , G , H , изображенные на рис. 1.8?

Ответ: $C = \bar{A}$; $D = \bar{B}$; $E = A + B$; $F = AB$; $G = \overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$; $H = \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$.

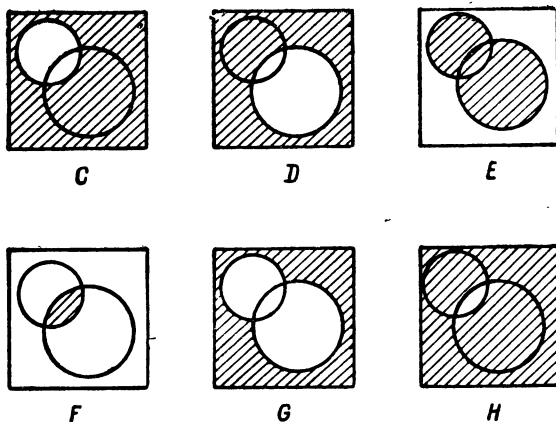


Рис. 1.8. События C, D, E, F, G, H .

1.5. Пусть A, B, C — три произвольных события.

Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C : а) произошло только событие A ; б) произошли события A и B , но C не произошло; в) все три события произошли; г) произошло по крайней мере одно из этих событий; д) произошло по крайней мере два события; е) произошло одно и только одно событие; ж) произошли два и только два события; з) ни одно событие не произошло; и) произошло не больше двух событий.

Ответ: а) $\overline{A}B\overline{C}$; б) $A\overline{B}\overline{C}$; в) ABC ; г) $A+B+C$; д) $AB+AC+BC$; е) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; ж) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} = (AB+AC+BC) - ABC$; з) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; и) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

1.6. Производится пуск трех ракет по одной и той же цели. Пусть события A_1 — попадание при первом пуске, \overline{A}_1 — промах при первом пуске, A_2 — попадание при втором пуске, \overline{A}_2 — промах при втором пуске, A_3 — попадание при третьем пуске, \overline{A}_3 — промах при третьем пуске.

Чему равно событие A , состоящее в том, что в цель попадет не менее двух ракет?

Ответ: $A = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$.

1.7. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: A_i ($i = 1, 2$) — исправен i -й блок первого типа, B_j ($j = 1, 2, 3$) — исправен j -й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа.

Выразить событие C , означающее работу прибора, через события A_i и B_j .

Ответ [4]: $C = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)$.

1.8. Известны события A , B и C , причем $A \subset B$.

Определить сложные события AB , $A + B$, ABC и $A + B + C$.

Ответ: $AB = A$; $A + B = B$; $ABC = AC$; $A + B + C = B + C$.

1.9. Показать, что события:

а) $(A+B)(A+\bar{B}) + (\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$ — достоверно; б) $(A+B) \times (A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$ — невозможно.

1.10. Доказать следующие равенства:

а) $A+B = A+\bar{A}B$; б) $\bar{A}+AB = \bar{A}+B$; в) $\bar{A}+\bar{B} = \overline{AB}$; г) $A+B = \overline{\bar{A}\bar{B}}$; д) $AB = \overline{\bar{A}+\bar{B}}$.

1.11. Упростить выражения:

а) $A(B+C) + (A+B)C$; б) $(A+B)(A+\bar{B})$; в) $(A+B)(\bar{A}+B)(A+\bar{B})$; г) $(A+B)(\bar{A}\bar{B}+C) + \bar{C} + (A+B)(D+E)$.

Ответ: а) $AB+AC+BC$; б) A ; в) AB ; г) $A+B+\bar{C}$.

1.12. Игральная кость бросается один раз.

Найти вероятность того, что выпадет: а) четное число очков; б) число очков, кратное трем; в) не более пяти очков.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{6}$.

1.13. Две однотипные радиостанции, разнесенные в пространстве относительно друг друга, предварительно настроены на 10 фиксированных частот, одинаковых у обеих станций.

Какова вероятность того, что при независимом произвольном выборе рабочих частот обе включенные радиостанции окажутся настроенными на одну и ту же частоту?

Ответ: 0,1.

1.14. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) сумма выпавших очков равна 6; б) произведение выпавших очков равно 12; в) сумма выпавших очков кратна 5; г) на обеих костях выпадет по одинаковому числу очков; д) 5 очков появится хотя бы на одной грани.

Ответ: а) $\frac{5}{36}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{7}{36}$; г) $\frac{1}{6}$; д) $\frac{11}{36}$.

1.15. В партии полупроводниковых триодов n доброкачественных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k триодов доброкачественны.

Определить вероятность P того, что следующий триод будет доброкачественным.

Ответ:

$$P = \frac{n-k}{n+m-k}.$$

1.16. На пяти одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Две из них наугад вынимаются одна за другой.

Найти вероятность того, что: а) сумма цифр на вынутых карточках является нечетным числом; б) вторая цифра меньше первой; в) вторая цифра больше первой ровно на 1.

Ответ: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{5}$.

1.17. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад.

Определить вероятность P того, что набраны нужные цифры.

Ответ:

$$P = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

1.18. Каждая из букв слова «интеграл» написана на одной из восьми карточек. Карточки перемешиваются.

Какова вероятность P того, что при извлечении трех карточек появится (в порядке их выхода) слово «три»?

Ответ:

$$P = \frac{1}{A_8^3} = \frac{1}{336}.$$

1.19. Каждая из цифр 1, 3, 5, 6 и 8 написана на одной из пяти карточек. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд.

Найти вероятность того, что полученное пятизначное число будет делиться на четыре.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

1.20. Из группы, содержащей n карточек, перенумерованных от 1 до n , извлекают по одной карточке.

Найти вероятность P того, что при n -кратном извлечении карточек их номера будут идти в возрастающем порядке, если: а) каждая вынутая карточка после просмотра ее номера возвращается об-

ратно и карточки перемешиваются; б) извлеченные карточки обратно не возвращаются.

Ответ: а) $P = \frac{1}{n^n}$; б) $P = \frac{1}{n!}$.

1. 21. В собираемый радиоблок входят две одинаковые радиолампы. Технические условия нарушаются, если обе они окажутся с пониженной крутизной. У монтажника имеется 10 ламп, из которых 3 с пониженной крутизой.

Определить вероятность нарушения технических условий при случайном выборе двух электронных ламп.

Ответ: $\frac{1}{15}$.

1. 22. В мастерской находится $a + b$ блоков от двух различных радиоприемников, из которых два повреждены.

Какова вероятность P того, что повреждены блоки разных приемников?

Ответ:

$$P = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

1. 23. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются два шара.

Вычислить вероятность P того, что: а) оба шара будут белыми; б) оба вынутых шара будут черными; в) один шар будет белым, а второй — черным.

Ответ:

$$\text{а) } P = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}; \quad \text{б) } P = \frac{C_b^2}{C_{a+b}^2}; \quad \text{в) } P = \frac{ab}{C_{a+b}^2}.$$

1. 24. На десяти из двадцати карточек написана цифра 1, а на остальных десяти — цифра 0. Пять карточек вынимаются наугад.

Найти вероятность P того, что на двух карточках будет стоять цифра 1, а на трех — цифра 0 (безразлично, в каком порядке).

Ответ:

$$P = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{10}^3}{C_{20}^5}.$$

1. 25. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Из урны вынимают три шара.

Найти вероятность P того, что среди них не будет шаров одинакового цвета.

Ответ:

$$P = \frac{abc}{C_{a+b+c}^3}.$$

1.26. В круг радиуса R вписан квадрат.
Какова вероятность P того, что точка, брошенная наудачу внутрь круга, окажется внутри квадрата?

Ответ:

$$P = \frac{2}{\pi}.$$

1.27. Во время разговора абонента с телефонисткой продолжительностью t сек поступил новый вызов.

Определить вероятность того, что к моменту вызова прошла большая часть разговора абонента с телефонисткой.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.28. На отрезок AB длиной l наугад бросается точка M , причем вероятность попадания точки в какой-либо подынтервал отрезка AB не зависит от его положения внутри AB и пропорциональна его длине.

Чему равна вероятность P того, что: а) точка M упадет не дальше, чем на расстоянии a от середины отрезка AB ?; б) площадь квадрата, построенного на AM , будет меньше $l^2/4$ и больше $l^2/9$?

Ответ: а) $P = \begin{cases} \frac{2a}{l} & \text{при } 2a < l, \\ 1 & \text{при } 2a \geq l; \end{cases}$ б) $P = \frac{1}{6}$.

1.29. Найти вероятность $F(A)$ подрыва корабля при форсировании минного заграждения в одну линию при интервале между минами l_m , ширине корабля a_m и диаметре мины d_m . Курс корабля составляет угол β с линией расположения мин.

Ответ: $P(A) = \begin{cases} \frac{a+d}{l \sin \beta} & \text{при } \beta > \arcsin \frac{a+d}{l}, \\ 1 & \text{при } \beta \leq \arcsin \frac{a+d}{l}. \end{cases}$

1.30. Радиопульсы сигнала $s(t)$ и гармонической помехи $n(t)$ одинаковой частоты заполнения ω совпали во времени.

Определить вероятность $P(A)$ того, что результирующая амплитуда суммы сигнала и помехи окажется меньше произвольно заданного уровня U_0 ($0 \leq U_0 \leq U_s$), если сдвиг фаз между высокочастотными колебаниями импульсов является случайным и может с одинаковой вероятностью быть равным любому значению из интервала $0 \div 2\pi$.

Ответ [5]:

$$P(A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0^2 - (U_s - U_n)^2}{U_s U_n}} & \text{при } |U_s - U_n| < U_0, \\ 0 & \text{при } |U_s - U_n| \geq U_0, \end{cases}$$

где U_s — амплитуда сигнала, U_n — амплитуда помехи.

1.31. Посадочная система аэропорта обеспечивает заход на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом между посадками самолетов не менее 5 мин. Два самолета должны прибыть на аэродром по расписанию: один в 10 ч, а другой в 10 ч 10 мин.

Какова вероятность того, что второму самолету придется уходить в зону ожидания, если первый самолет может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах ± 10 мин, а второй — в пределах ± 5 мин, при условии, что величины отклонений от расписания в указанных пределах равновозможны?

Ответ: 0,25.

1.32. На отрезок AB длиной l бросают наугад и независимо друг от друга две точки L и M , причем вероятность попадания каждой точки в какой-либо интервал, принадлежащий AB , не зависит от его положения внутри AB и пропорциональна его длине.

Определить вероятность P того, что: а) расстояние между точками L и M будет не больше a ; б) точка L окажется ближе к точке A , чем точка M ; в) точка L окажется ближе к M , чем к A .

Ответ: а) $P = 1 - \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2$; б) $P = \frac{1}{2}$; в) $P = \frac{3}{4}$.

1.33. Искусственный спутник Земли (ИСЗ) движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Полагая падение ИСЗ в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты.

Ответ [4]: 0,21.

1.34. Панорамный приемник периодически с постоянной скоростью проходит некоторый диапазон частот (f_1, f_2) , где возможно появление сигнала, за которым установлено наблюдение. Полоса пропускания приемника определяется допустимой расстройкой относительно сигнала $\pm \Delta f$.

Считая сигнал импульсным (изображенным точкой как на оси времени, так и на оси частот), появление его равновозможным в любой момент и в любой точке интервала $(f_1 - \Delta f, f_2 + \Delta f)$, определить: а) вероятность P_1 обнаружения сигнала; б) вероятность P_2 пеленга (засечки) передатчика, если известна частота сигнала, а антенна пеленгатора равномерно вращается, причем угол раствора диаграм-

мы направленности антенны $\beta = 18^\circ$; в) вероятность P_3 обнаружения сигнала, если сигнал не является импульсным, а имеет конечную длительность $\tau_{\text{и}}$ (считая, что регистрация сигнала приемником происходит мгновенно); г) вероятность P_4 определения пеленга, если сигнал имеет длительность $\tau_{\text{и}}$, и за время $\tau_{\text{и}}$ антенна пеленгатора поворачивается на угол $0,5 \beta$.

Ответ [6]:

$$\text{а) } P_1 = \frac{2\Delta f}{f_2 - f_1 + 2\Delta f}; \quad \text{б) } P_2 = \frac{1}{20};$$

$$\text{в) } P_3 = \frac{2\Delta f T + 2\tau_{\text{и}}(f_2 - f_1)}{(f_2 - f_1 + 2\Delta f) T + 2\tau_{\text{и}}(f_2 - f_1)},$$

где T — время прохождения приемником диапазона (f_1, f_2) ;

$$\text{г) } P_4 = 0,075.$$

1.35. На склад поступили три партии резисторов. В первой партии 2000, во второй — 2000 и в третьей — 4000 резисторов. Предполагаемый процент брака в партиях составляет соответственно 1, 2 и 3%.

Каков предполагаемый процент брака у смешанной партии?

Ответ: 2,25%.

1.36. Контролер проверяет взятые наудачу изделия из партии, содержащей a изделий 1-го сорта и b изделий 2-го сорта. Проверка первых m изделий ($m < b$) обнаружила, что все они второго сорта.

Определить вероятность P того, что из следующих четырех проверяемых изделий по крайней мере два окажутся второсортными.

Ответ:

$$P = \frac{C_{b-m}^2 C_a^2 + a C_{b-m}^3 + C_{b-m}^4}{C_{a+b-m}^4}.$$

1.37. Из упаковки, содержащей n электронных ламп, взята по крайней мере одна лампа.

Вычислить вероятность P того, что взято четное число ламп, если равновозможно извлечение любого числа ламп из данной совокупности?

Ответ:

$$P = \frac{C_n^2 + C_n^4 + \dots + \dots}{C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}.$$

1.38. На вход радиоприемного устройства поступают кодовые комбинации, состоящие из двух знаков: 1 (посылка) и 0 (пауза).

Какова вероятность того, что в первой кодовой комбинации будет хотя бы один ноль, если появление нуля и единицы равновозможно?

Ответ: $\frac{3}{4}$.

1.39. В упаковке содержится 36 радиоламп, среди которых 4 с пониженной крутизной. Для проверки на испытателе ламп наугад выбирают 3 радиолампы.

Найти вероятность того, что среди проверяемых ламп будет хотя бы одна с пониженной крутизной.

Ответ: 0,305.

1.40. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,8, а для второго — 0,9.

Какова вероятность попадания в цель?

Ответ: 0,98.

1.41. Прием радиосигналов производится на два разнесенных приемника. Вероятность правильного приема на первый приемник равна p_1 , на второй — p_2 . События, состоящие в приеме сигналов каждым приемником, считаются независимыми.

Определить вероятность P правильного приема радиосигналов.

Ответ:

$$P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

1.42. Вероятность ухода частоты принимаемых колебаний за пределы полосы пропускания приемника из-за нестабильности частоты колебаний передатчика равна 0,1, а из-за нестабильности частоты колебаний гетеродина приемника — 0,2.

Определить вероятность того, что частота принимаемых колебаний не выйдет за пределы полосы пропускания приемника.

Ответ: 0,72.

1.43. Две станции дальней радиосвязи с использованием эффекта рассеяния ультракоротких волн метеорными следами одновременно ведут работу на одного корреспондента. Вероятность «прохождения» радиосигналов первой станции, работающей на волне λ_1 , равна 0,7; вероятность «прохождения» сигналов второй станции, работающей на волне λ_2 , равна 0,8.

Определить вероятность «прохождения» связи при одновременной работе обеих радиостанций.

Ответ: 0,94.

1.44. Вероятность вывода истребителя-перехватчика наземными системами наведения в определенный район около цели равна 0,8. Вероятность обнаружения цели бортовой радиолокационной станцией истребителя в этом районе равна 0,9.

Какова вероятность того, что перехват цели будет осуществлен?

Ответ: 0,72.

1.45. В студии имеются три телевизионных камеры. Вероятность того, что каждая камера включена в данный момент, равна 0,6.

Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

Ответ: 0,936.

1.46. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий соответственно равны: 0,8; 0,7; 0,9.

Вычислить вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Ответ: 0,994.

1.47. Для изготовления детали необходимы три основные операции. Вероятность брака на первой операции равна 0,01, на второй — 0,02 и на третьей — 0,025.

Определить вероятность изготовления стандартной детали при условии, что появление брака на отдельных операциях — события независимые.

Ответ: 0,946.

1.48. При передаче текста 10% букв искажаются и принимаются неверно.

Какова вероятность того, что все пять букв данного слова будут приняты правильно?

Ответ: 0,59.

1.49. Цех в среднем выпускает 2% бракованных деталей. Из каждой сотни годных деталей в среднем 70 оказываются первого сорта.

Найти вероятность того, что деталь, изготовленная в цехе, окажется первого сорта.

Ответ: 0,686.

1.50. Вероятность попадания авиабомбы в цель равна 0,2. Найти вероятность поражения цели тремя бомбами, если 2% сброшенных бомб не взрываются.

Ответ: 0,48.

1.51. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех могут возникнуть искажения: посланный сигнал подвергается искажению с вероятностью $1/100$ и принимается правильно с вероятностью $99/100$ (независимо от того, были ли переданы предшествующие сигналы с искажением или без искажения).

Зная, что послана комбинация 10110, найти вероятность того, что: а) она получена без искажений; б) получена комбинация 11110; в) в полученной комбинации имеется одно искажение.

Ответ: а) $0,99^5$; б) $0,01 \cdot 0,99^4$; в) $0,05 \cdot 0,99^4$.

1.52. Электрическая цепь подсвета приборной доски состоит из 8 последовательно включенных лампочек. Вероятность того, что каждая из них будет гореть в течение 1000 ч, равна 0,9.

Чему равна вероятность P того, что цепь не выйдет из строя за этот промежуток времени?

Ответ: $P = 0,9^8 \approx 0,430$.

1.53. Радиотехническое устройство содержит n_1 ламп, n_2 транзисторов и n_3 предохранителей. Выход любой детали из строя приводит к неисправности устройства. Вероятность выхода из строя за время T одной из ламп q_1 , транзистора q_2 , предохранителя q_3 .

Какова вероятность Q того, что за время T устройство выйдет из строя?

Ответ: $Q = 1 - (1 - q_1)^{n_1} (1 - q_2)^{n_2} (1 - q_3)^{n_3}$.

1.54. Радиорелейная линия связи состоит из m ретрансляционных станций. Надежность (вероятность безотказной работы) каждой станции одинакова. Станции выходят из строя независимо друг от друга, причем отказ любой станции влечет за собой отказ всей системы связи.

Определить вероятность p_1 безотказной работы каждой станции за промежуток времени T , если надежность всей линии связи за этот промежуток времени должна быть не менее P .

Ответ: $p_1 \geq P^{\frac{1}{m}}$.

1.55. Шкала радиоприемного устройства освещается четырьмя параллельно включенными лампочками. Вероятность того, что каждая из лампочек будет гореть в течение 1500 ч, равна 0,9.

Какова вероятность того, что шкала будет освещена в течение этих 1500 ч, если лампочки, которые выйдут из строя за указанный промежуток времени, не будут заменены доброкачественными?

Ответ: 0,9999.

1.56. Электрическая цепь (рис. 1.9) состоит из n групп, в каждой из которых имеется k параллельных ветвей. Вероятность перегорания за время T одного элемента ветви равна q .

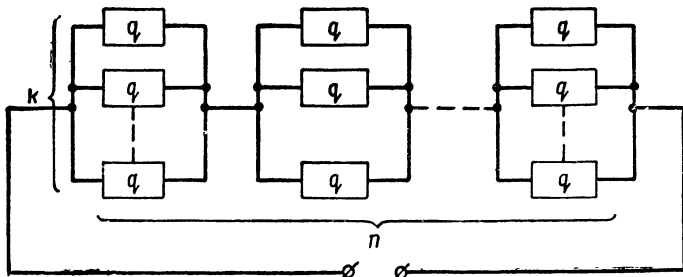


Рис. 1.9. Электрическая цепь.

Найти вероятность P того, что в течение интервала времени $0 \div T$ ток в цепи будет отличен от нуля.

Ответ: $P = (1 - q^k)^n$.

1.57. Радиоблок состоит из трех параллельных цепей, каждая из которых включает в себя четыре последовательно соединенных элемента. Две цепи являются резервными. Надежность элементов в основной цепи 0,97, в резервных цепях 0,92.

Определить надежность радиоблока.

Ответ: 0,991.

1.58. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента k или двух элементов k_1 и k_2 . Вероятность выхода из строя элемента k равна $q_k = 0,3$, а для элементов k_1 и k_2 равна $q_1 = q_2 = 0,2$.

Определить вероятность разрыва электрической цепи.

Ответ: 0,328.

1.59. Система состоит из пяти элементов; надежность p каждого элемента равна 0,8. Работа каждого элемента необходима для работы системы в целом.

Для повышения надежности системы предлагается три метода:

а) резервирование каждого элемента (рис. 1.10);

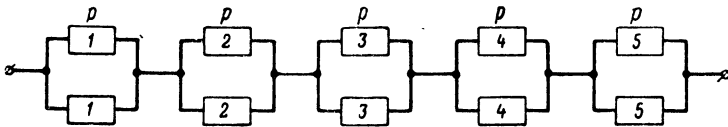


Рис. 1.10. Система с поэлементным резервированием.

б) резервирование системы в целом (рис. 1.11);

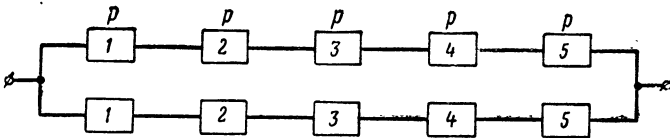


Рис. 1.11. Дублированная система.

в) резервирование блоками (рис. 1.12).

Вычислить надежность системы при всех способах резервирования (надежность переключающих устройств считать равной единице).

Ответ: а) 0,815; б) 0,548; в) 0,663.

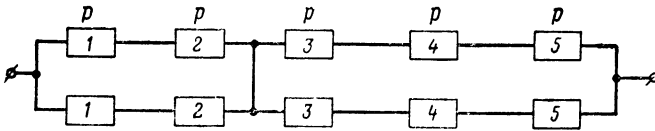


Рис. 1.12. Система с резервированием отдельных блоков.

1.60. Между корреспондентами M и N происходит обмен информацией по схеме, приведенной на рис. 1.13, где k_1 и k_2 — оконечная аппаратура, а L_1, L_2, L_3 — каналы, взаимно резервирующие друг друга. Выходы из строя элементов схемы — независимые события. Вероятности безотказной работы элементов k_1, k_2, L_1, L_2, L_3 за время T соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9; 0,6; 0,5.

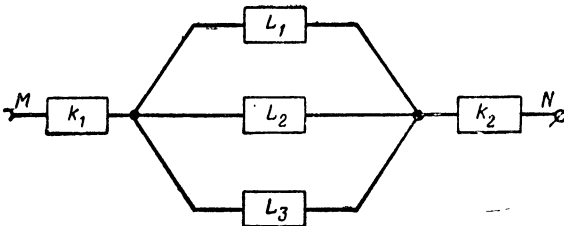


Рис. 1.13. Система передачи информации с тремя параллельными каналами.

Какова вероятность того, что за время T не произойдет перерыва связи?

Ответ: 0,549.

1.61. Связная самолетная радиостанция может работать в трех режимах по мощности: полной, половинной и составляющей 25% полной мощности. Вероятности работы радиостанции в этих режимах соответственно равны: 0,7; 0,1; 0,2. Вероятности отказа радиостанции при работе в этих режимах за время T составляют соответственно величины 0,3; 0,2; 0,05.

Определить вероятность того, что за время T часов работы радиостанция не выйдет из строя.

Ответ: 0,76.

1.62. На конвейер поступают для сборки детали, изготавливаемые на двух станках, причем с первого станка поступает 40% от общего количества и со второго — 35%. Вероятности изготовления нестандартной детали на этих станках равны: на первом — 0,01; на втором — 0,02.

Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется нестандартной?

Ответ: 0,011.

1.63. Каждое из n орудий наведено на цель. Произвольно выбирается орудие и производится выстрел.

Определить вероятность P того, что снаряд попадет в цель, если вероятности попаданий орудий равны p_1, p_2, \dots, p_n .

Ответ:

$$P = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}.$$

1.64. Команда состоит из двух отличных, двух хороших и четырех посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего — 0,7 и для посредственного — 0,5. Наугад вызываются два стрелка, причем каждый из них стреляет один раз.

Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в цель?

Ответ: 0,418.

1.65. Три истребителя-перехватчика независимо один от другого атакуют бомбардировщик противника. Вероятности обнаружения бомбардировщика первым, вторым и третьим истребителями соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8. Если бомбардировщик обнаружен, то первый истребитель сбивает его с вероятностью 0,2; второй и третий — с вероятностью 0,15.

Найти вероятность того, что бомбардировщик будет сбит.

Ответ: 0,345.

1.66. В урне находится два белых и четыре черных шара. Из урны извлекают два шара, цвет которых остается неизвестным, и откладывают их в сторону, после чего вынимают третий шар.

Какова вероятность того, что последний шар белый?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

1.67. Радиолампа, поставленная в телевизор, может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1, p_2 и p_3 , где $p_1 = p_3 = 0,25, p_2 = 0,5$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий, соответственно равны 0,1; 0,2 и 0,4.

Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

Ответ: 0,225.

1.68. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: единица

переходит в единицу с вероятностью p и в нуль с вероятностью $1 - p$; нуль переходит в нуль с вероятностью q и в единицу с вероятностью $1 - q$. Наугад отправлен сигнал.

Вычислить вероятность P того, что: а) на приемном конце будет получен сигнал 1; б) на приемном конце будет получен сигнал 0.

Ответ: а) $P = \frac{1}{2} (1 + p - q)$; б) $P = \frac{1}{2} (1 - p + q)$.

1.69. Вероятности перегорания первой, второй и третьей радиоламп равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Вероятности выхода из строя прибора при перегорании одной, двух и трех ламп равны соответственно 0,25; 0,6 и 0,9.

Определить вероятность выхода прибора из строя.

Ответ: 0,16.

1.70. Самолет, вылетающий на задание, создает радиопомехи, которые с вероятностью 0,4 «забивают» радиосредства системы ПВО. Если радиосредства «забиты», то самолет проходит к объекту необстрелянным, сбрасывает бомбы и поражает объект с вероятностью 0,8. Если радиосредства системы ПВО «не забиты», то самолет подвергается обстрелу и сбивается с вероятностью 0,7.

Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

Ответ: 0,464.

1.71. Для повышения надежности и улучшения качества радиосвязи в условиях замираний прием сообщений корреспондента осуществляется на два приемника, пространственно разнесенных друг относительно друга (пространственно разнесенный прием). Вероятность приема сигнала первым радиоприемником равна 0,8, вторым — 0,7, а при одновременной работе обоих приемников — 0,94.

Определить вероятность приема радиосигнала корреспондента, если вероятность безотказной работы за время сеанса связи первого приемника составляет 0,9, второго — 0,85, а радиостанции корреспондента — 0,8.

Ответ: 0,708.

1.72. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приемника, передаются два сигнала: единица и нуль. За счет воздействия помех сигналы могут искажаться. На участке передатчик — ретранслятор единица переходит в единицу с вероятностью p_1 и в нуль с вероятностью $1 - p_1$; нуль переходит в нуль с вероятностью q_1 и в единицу с вероятностью $1 - q_1$. На участке ретранслятор — приемник указанные вероятности соответственно равны p_2 ; $1 - p_2$; q_2 и $1 - q_2$.

Найти вероятность P того, что комбинация 10, посланная передатчиком, будет принята приемником без искажений.

Ответ: $P = [p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - q_2)] [q_1 q_2 + (1 - q_1)(1 - p_2)]$.

1.73. Бомбометание с данного типа самолета выполняется на 45% с высоты h_1 , 30% с высоты h_2 и 25% с высоты h_3 . Вероятности поражения цели с этих высот при сбрасывании одной бомбы соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4. На цель при заданной высоте сбрасываются три бомбы. Высота бомбометания заранее неизвестна. Для поражения цели необходимо не менее одного попадания.

Определить вероятность поражения цели.

Ответ: 0,613

1.74. Группа, состоящая из трех самолетов-разведчиков, действующих независимо один от другого, высылается в район расположения войск противника с целью уточнить координаты объекта, который предлагается подвергнуть обстрелу баллистическими ракетами. Всего по данному объекту предполагается выпустить три ракеты. Если координаты цели не уточнены, одна ракета уничтожает объект с вероятностью 0,2; если уточнены — с вероятностью 0,7. Перед выходом в разведываемый район каждый самолет-разведчик проходит зону действия ПВО противника; вероятность того, что в этой зоне он будет сбит, равна 0,6. Координаты объекта сообщаются разведчиками по радио.

Определить: а) вероятность того, что объект будет уничтожен баллистическими ракетами с учетом деятельности разведки; б) вероятность уничтожения объекта, при условии, что самолеты не имеют радиосвязи со своей базой и для сообщения разведывательных данных должны вторично пересечь зону действия ПВО.

Ответ: а) 0,868; б) 0,686.

1.75. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Вероятность поражения цели при одном попадании равна 0,1; при двух попаданиях — 0,3; при трех попаданиях — 0,6. Произведено три выстрела, в результате которых цель была поражена.

Каково наиболее вероятное число попаданий?

Ответ: два попадания.

1.76. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная система контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98, а изделия, не удовлетворяющие стандарту, пропускает (как годные) с вероятностью 0,05.

Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль как годное, действительно удовлетворяет стандарту.

Ответ: 0,998.

1.77. Самолет может выполнять задание на больших, средних и малых высотах, причем на больших высотах предполагается совершить 25% всех полетов, на средних — 10% и на малых — 65%. Вероятности выхода самолета на заданный объект на больших,

средних и малых высотах соответственно равны 0,75; 0,9; 0,65. Самолет вышел на заданный объект.

Определить вероятность того, что полет происходил на малой высоте.

Ответ: 0,604.

1.78. По двоичному каналу связи с шумами, схематически изображенному на рис. 1.14, передаются токовая (1) и бестоковая (0) посылки с априорными вероятностями $p(1) = 0,6$ и $p(0) = 0,4$. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: вероятность перехода единицы в единицу (вероятность принять единицу при передаче единицы) $p(1'/1) = 0,9$; вероятность перехода единицы в нуль $p(0'/1) = 0,1$; вероятность перехода нуля в нуль $p(0'/0) = 0,8$ и вероятность перехода нуля в единицу $p(1'/0) = 0,2$. На выходе радиоприемного устройства зарегистрирована единица.

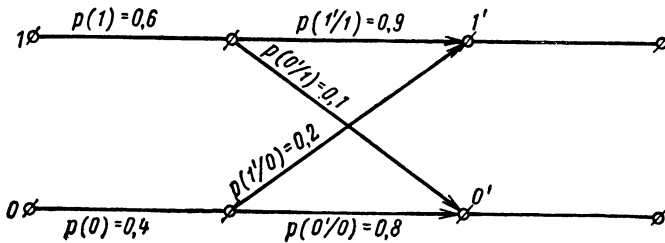


Рис. 1.14 Двоичный канал связи.

Какова вероятность того, что: а) в действительности была передана 1; б) на самом деле был передан 0.

Ответ: а) 0,87; б) 0,13.

1.79. Три самолета производят одиночное бомбометание по некоторой цели. Каждый самолет сбрасывает одну бомбу. Вероятность попадания в цель при сбрасывании одной бомбы для первого самолета равна 0,1; для второго самолета — 0,2 и для третьего — 0,3. В результате бомбометания в цель попало две бомбы.

Определить вероятность того, что в цель попали бомбы, сброшенные с первого и второго самолетов.

Ответ: $\frac{7}{46}$.

1.80. В каждой из трех одинаковых упаковок содержится по 10 деталей, причем в первой упаковке 8 стандартных деталей и 2 бракованные; во второй — 9 стандартных и 1 бракованная; в третьей — одни стандартные. Выбираются наудачу 3 детали из одной упаковки.

Определить вероятность того, что извлечение происходило из второй упаковки, если известно, что среди отобранных оказались 2 стандартные и 1 бракованная детали.

Ответ: $\frac{9}{23}$.

1.81. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое.

Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

Ответ: пять бракованных изделий.

1.82. Вероятности того, что при одном выстреле из орудия получаются недолет, попадание и перелет, равны 0,1; 0,7; 0,2. Для другого орудия вероятности этих событий равны соответственно 0,2; 0,6 и 0,2. Наугад выбранное орудие стреляет трижды. Отмечены: одно попадание, один недолет и один перелет.

Найти вероятность того, что стреляло первое орудие.

Ответ: $\frac{7}{19}$.

1.83. Алфавит источника сигналов состоит из 10 равновероятных кодовых комбинаций, причем каждый раз в линию связи посылается одна из них.

Какова вероятность того, что в результате пятикратной передачи одна и та же кодовая комбинация появится не менее трех раз?

Ответ: 0,00856.

1.84. Для увеличения надежности радиосвязи используется метод накопления, при котором каждый символ (0 или 1) передается три раза подряд. На приемной стороне регистрируется тот символ, который в принятой последовательности из трех символов содержится не менее двух раз.

Определить вероятность правильного приема по методу накопления, если вероятность правильного приема каждого символа равна 0,9.

Ответ: 0,972.

1.85. Импульсно-кодовая комбинация образуется с помощью шести двоичных сигналов 0 или 1, которые случайным образом появляются на позициях кодовой комбинации независимо друг от друга. Появление сигналов 0 или 1 на каждой позиции равновозможно.

Вычислить вероятность того, что в кодовой комбинации появится число нулей меньше двух.

Ответ: $\frac{7}{64}$.

1.86. Из 150 изделий, среди которых 50 штук второго сорта, отбирается 6 изделий по схеме возвращенного шара (повторная выборка).

Определить вероятность того, что среди изделий, попавших в выборку, будет не более двух изделий второго сорта.

Ответ: 0,68.

1.87. Транзисторный радиоприемник смонтирован на 9 полупроводниках, для которых вероятность брака равна 0,05.

Найти вероятность того, что приемник будет не работоспособным, если он отказывает при наличии в нем не менее двух бракованных полупроводников.

Ответ: 0,073.

1.88. При вращении антенны обзорного радиолокатора за время облучения цели успевает отразиться 8 импульсов. Для обнаружения цели необходимо, чтобы через приемник на индикатор прошло не менее 6 отраженных импульсов. Вероятность подавления импульса шумом в приемнике равна 0,1.

Вычислить вероятность обнаружения цели за один оборот антенны радиолокатора.

Ответ: 0,96.

1.89. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп I-го типа или не менее двух ламп II-го типа. В приборе перегорело пять ламп.

Определить вероятность того, что прибор будет работать, если вероятности перегорания ламп I и II типов соответственно равны 0,7 и 0,3.

Ответ: 0,36.

1.90. Радиоэлектронный комплекс самолета-бомбардировщика включает в себя 10 объектов. Вероятность безотказной работы каждого объекта в течение времени T равна 0,9. Объекты выходят из строя независимо один от другого.

Вычислить вероятность того, что за время T : а) откажет хотя бы один объект; б) откажут ровно два объекта; в) откажут не менее двух объектов.

Ответ: а) 0,652; б) 0,194; в) 0,264.

1.91. По самолету производится четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в самолет при одном выстреле равна 0,1. Чтобы вывести самолет из строя, достаточно трех попаданий. При попадании одного снаряда вероятность вывода самолета из строя равна 0,5, а при попадании двух снарядов — 0,8.

Найти вероятность того, что самолет будет выведен из строя.

Ответ: 0,188.

1.92. Пункт *A* нужно связать с 10 абонентами пункта *B*. Каждый абонент в среднем занимает линию 12 мин в 1 ч. Вызовы любых двух абонентов независимы.

Какое минимальное количество каналов *N* необходимо для того, чтобы с вероятностью 0,99 в любой момент обслужить всех абонентов?

Ответ [4]: $N = 5$.

1.93. На ограничитель поступает последовательность из восьми случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсом равна 0,25.

Вычислить: а) вероятность того, что из 8 импульсов не менее 6 видеоимпульсов превысят порог; б) наимвероятнейшее число видеоимпульсов, превысивших порог.

Ответ: а) 0,00422; б) 2.

1.94. При одном заходе на цель бомбардировщик сбрасывает одну бомбу. Вероятность попадания в цель при сбрасывании одной бомбы равна 0,3. Для поражения цели достаточно одного попадания.

Сколько заходов *n* нужно сделать бомбардировщику, чтобы с вероятностью не менее 0,99 быть уверенным в поражении цели?

Ответ: $n \geq 13$.

1.95. Вероятность того, что изготовленное изделие удовлетворяет стандарту, равна 0,95.

Найти наиболее вероятное число изделий, не удовлетворяющих стандарту, в партии, содержащей 400 изделий.

Ответ: 20.

1.96. Вероятность попадания в самолет при одном выстреле равна 0,01. По самолету производится 100 независимых выстрелов.

Определить вероятность двух попаданий в самолет.

Ответ: $P_{100}(2) \approx 0,184$.

1.97. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех независимо искажается с вероятностью 0,2. Независимым образом передано 10 000 знаков.

Какова вероятность того, что в принятой последовательности будет от 2000 до 2100 искажений?

Ответ: 0,494.

1.98. Доля изделий первого сорта в продукции завода составляет 60%.

Какова вероятность того, что из отобранных 500 изделий окажется от 310 до 330 изделий первого сорта?

Ответ: 0,177.

1.99. Трехорудийная батарея с вероятностями попадания из каждого орудия 0,3; 0,4; 0,5 дает залп.

Определить вероятность поражения цели, если для этого достаточно: а) одного попадания; б) двух попаданий; в) трех попаданий.

Ответ: а) 0,79; б) 0,35; в) 0,06.

1.100. По объекту производится стрельба ракетами с четырех позиций; с каждой позиции выпускается по одной ракете. Вероятности попадания при стрельбе с различных позиций равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5 и 0,6.

Найти вероятность того, что: а) в объект попадут одна, две, три и четыре ракеты; б) в объект попадет не менее трех ракет.

Ответ: а) 0,302; 0,380; 0,198; 0,036; б) 0,234.

1.101. Вероятности разрегулировки датчика опорных частот, передатчика, приемника и антенно-фидерного тракта за время T работы радиостанции соответственно равны 0,4; 0,2; 0,3; 0,3.

Определить вероятность отказа радиостанции за время T , если из-за разрегулировки одного блока радиостанция отказывает с вероятностью 0,3; двух блоков — 0,5; трех блоков — 0,7; четырех блоков — 0,9.

Ответ: 0,316.

1.102. По линии связи передано четыре радиосигнала, имеющих различные амплитуды. Вероятности приема каждого из сигналов не зависят от приема остальных и соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Определить вероятность того, что: а) будет принято k сигналов ($k = 0, 1, 2, 3, 4$); б) будет установлена двухсторонняя радиосвязь, если вероятность этого события при приеме одного сигнала равна 0,2, при приеме двух сигналов — 0,6, а при приеме трех и четырех сигналов — единице.

Ответ: а) 0,168; 0,394; 0,320; 0,106; 0,012; б) 0,389.

1.103. Какова вероятность того, что при бросании двенадцати игральных костей каждая грань выпадет дважды?

Ответ [7]: 0,0034.

1.104. Девяти радиостанциям разрешена работа на 3 волнах: λ_1 , λ_2 и λ_3 . Выбор волны на каждой станции производится случайным образом.

Какова вероятность того, что на каждой из волн будет работать точно 3 станции?

Ответ: 0,0854.

1.105. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой 4 торпеды. Для от-

дельной торпеды вероятность потопления корабля равна 0,5; вероятность повреждения — 0,25 и вероятность промаха равна 0,25. Корабль тонет уже от двух повреждений.

Определить вероятность того, что корабль будет затоплен.

Ответ: 0,982.

Литература

1. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. Физматгиз, 1960.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
4. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1965.
5. Каневский З. М. Вероятностные задачи в радиотехнике. Изд-во «Энергия», 1966.
6. Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. ЛГУ, 1967.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во «Мир», 1964.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Теоретические сведения

Случайной величиной называется такая переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное заранее неизвестное значение. Различают два основных типа случайных величин: дискретные и непрерывные. Дискретная (прерывная) случайная величина X может принимать конечное или бесконечное счетное множество значений x_i (их можно пронумеровать). Возможные значения непрерывных случайных величин не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток или даже всю ось.

Часто встречаются случайные величины смешанного типа, которые наряду с непрерывным заполнением некоторого промежутка могут принимать и отдельные дискретные значения.

Полной статистической характеристикой случайной величины является закон распределения вероятностей. В случае дискретной случайной величины X под ним понимается соотношение, устанавливающее зависимость между возможными значениями x_i дискретной случайной величины и их вероятностями $p_i = p(x_i)$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать в различных формах: табличной (ряд распределения), графической (многоугольник распределения), аналитической (в виде формулы).

Универсальной характеристикой, одинаково пригодной как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является функция распределения $F_1(x)$, определяющая вероятность P того, что случайная величина X примет значение меньше некоторого числа x :

$$F_1(x) = P(X < x). \quad (2.1)$$

Функцию распределения $F_1(x)$ иногда называют также интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

$$1) F_1(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = 0;$$

$$2) F_1(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = 1;$$

$$3) F_1(x) \text{ — неубывающая функция, т. е. } F_1(x_2) \geq F_1(x_1)$$

при $x_2 > x_1$;

$$4) P(x_1 \leq X < x_2) = F_1(x_2) - F_1(x_1). \quad (2.2)$$

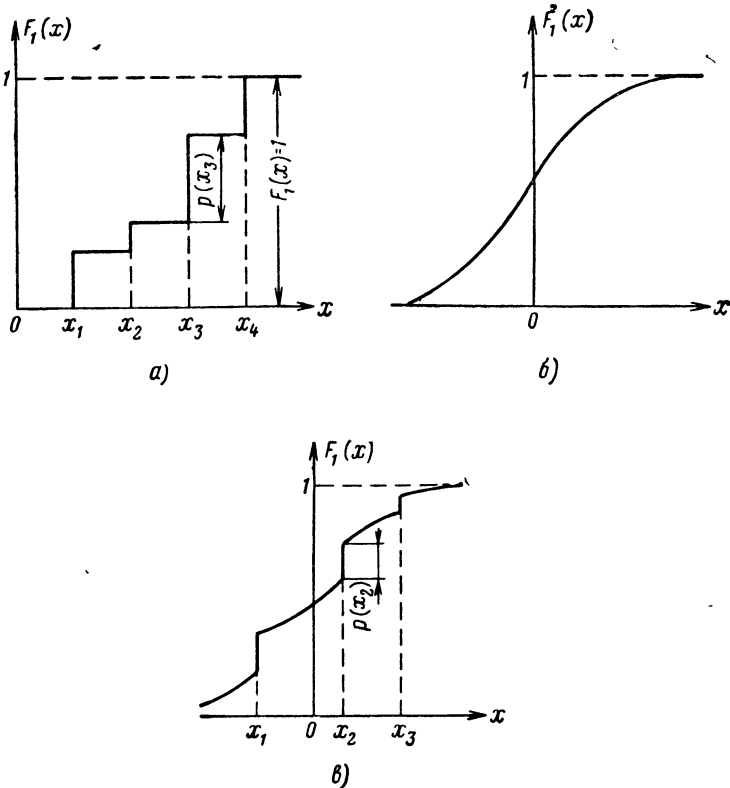


Рис. 2.1. Функции распределения дискретной (а), непрерывной (б) и смешанной (в) случайных величин.

Функция распределения дискретной случайной величины представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках x_1, x_2, \dots (рис. 2.1, а), непрерывной случайной величины — непрерывную функцию (рис. 2.1, б), а функция распределения смешанной случайной величины — кусочно-непрерывную функцию с конечным числом скачков (рис. 2.1, в).

В прикладных задачах предполагают, что функции распределения непрерывных случайных величин дифференцируемы во всей области возможных значений случайных величин. При таком предположении непрерывная случайная величина X чаще всего описывается плотностью вероятности $W_1(x)$, которая иногда называется

дифференциальным законом распределения или дифференциальной функцией распределения. Плотность вероятности определяется как производная функции распределения:

$$W_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}. \quad (2.3)$$

Плотность вероятности обладает следующими основными свойствами.

1. Плотность вероятности неотрицательна, т. е. $W_1(x) \geq 0$.
2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (x_1, x_2) равна интегралу от плотности вероятности в этих пределах:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} W_1(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (2.4)$$

3. Интеграл в бесконечных пределах от функции $W_1(x)$ равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) dx = 1. \quad (2.5)$$

Очень часто приходится иметь дело с нормальной плотностью вероятности $w(x)$, которая имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.6)$$

или

$$w(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\rho^2(x-m)^2}{E^2}}, \quad (2.7)$$

где m — математическое ожидание (иначе, среднее значение) случайной величины X ; σ^2 — дисперсия; $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ — среднее квадратичное (иначе, стандартное) отклонение X ; $E = \rho\sqrt{2\sigma}$ — вероятное отклонение (иначе, срединное); $\rho = 0,476936\dots$

Вероятность P попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал (α, β) равна

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right), \quad (2.8)$$

где $\Phi(z)$ — табулированный интеграл вероятности:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z). \quad (2.9)$$

Значения интеграла вероятности приведены в приложении II.

Плотность вероятности для дискретной случайной величины можно записать так:

$$W_1(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i), \quad (2.10)$$

где x_i — возможные значения случайной величины X ,

p_i — вероятности возможных значений x_i ;

$\delta(z - z_0)$ — дельта-функция (импульсная функция, функция Дирака).

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \delta(z - z_0) &= \begin{cases} \infty & \text{при } z = z_0, \\ 0 & \text{при } z \neq z_0, \end{cases} \\ \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz &= 1 \text{ при любом } \varepsilon > 0, \\ \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} f(z) \delta(z - z_0) dz &= f(z_0), \\ \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0} \delta(z - z_0) dz &= \int_{z_0}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Систему нескольких случайных величин можно рассматривать как точку в n -мерном пространстве со случайными координатами. Поэтому систему n случайных величин часто называют n -мерным случайным вектором или n -мерной случайной величиной. При $n=2$ система случайных величин может интерпретироваться как случайная точка на плоскости, а при $n=3$ — как случайная точка в пространстве.

Полными вероятностными характеристиками системы случайных величин являются законы распределения вероятностей, задаваемые функцией распределения или плотностью вероятности. В статистической радиотехнике основное практическое значение имеют системы непрерывных случайных величин, распределение которых обычно характеризуют не функцией распределения, а плотностью вероятности.

Функцией распределения $F_2(x, y)$ системы двух случайных величин X, Y (иначе, совместной или двумерной функцией распределения) называется вероятность одновременного выполнения двух неравенств $X < x, Y < y$, рассматриваемая как функция переменных x, y :

$$F_2(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (2.12)$$

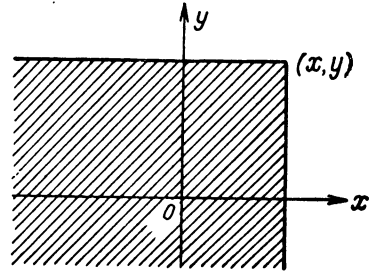
В геометрической интерпретации (рис. 2.2) функцию распределения $F_2(x, y)$ можно трактовать как вероятность попадания слу-

чайной точки внутрь бесконечного левого нижнего квадранта с вершиной (x, y) .

Если функция распределения $F_2(x, y)$ непрерывна и обладает непрерывной смешанной производной второго порядка, то двумерная плотность вероятности $W_2(x, y)$ определяется формулой

$$W_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.13)$$

Рис. 2.2. К определению функции распределения.



Функции $F_2(x, y)$ и $W_2(x, y)$ обладают следующими основными свойствами:

1) $F_2(x, y)$ — неубывающая функция своих аргументов;

2) $F_2(x, -\infty) = F_2(-\infty, y) = F_2(-\infty, -\infty) = 0;$ (2.14)

3) $F_2(\infty, \infty) = 1;$ (2.15)

4) $F_2(x, \infty) = F_1(x), F_2(\infty, y) = F_1(y),$ (2.16)

где $F_1(x)$ и $F_1(y)$ — соответственно функции распределения случайных величин X и Y ;

5) функция распределения $F_2(x, y)$ выражается через плотность вероятности $W_2(x, y)$ при помощи двойного интеграла:

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y W_2(u, v) dudv; \quad (2.17)$$

6) $W_2(x, y) \geq 0;$ (2.18)

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dxdy = 1$ (условие нормировки); (2.19)

8) вероятность $P(R)$ попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R (рис. 2.3) со сторонами, параллельными осям координат, и с координатами вершин $A(x_1, y_1), B(x_2, y_1), C(x_2, y_2), D(x_1, y_2)$ равна

$$P(R) = P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = F_2(x_2, y_2) - F_2(x_1, y_2) - F_2(x_2, y_1) + F_2(x_1, y_1); \quad (2.20)$$

9) вероятность $P(D)$ попадания случайной точки в произвольную область D (рис. 2.4) определяется формулой

$$P(D) = \iint_{(D)} W_2(x, y) dx dy. \quad (2.21)$$

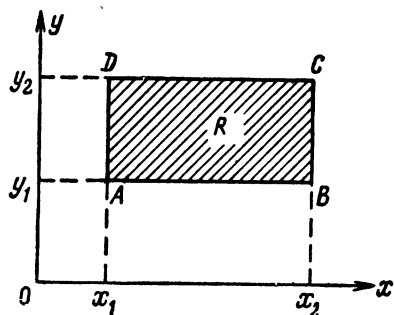


Рис. 2.3. Прямоугольная область.

Плотность вероятности $w_2(x, y)$ для системы двух нормальных случайных величин (X, Y) имеет вид

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}, \quad (2.22)$$

где m_x, m_y — математические ожидания X и Y ; σ_x, σ_y — средние

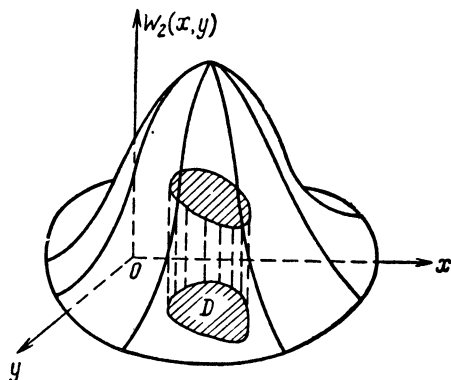


Рис. 2.4. Область D .

квадратичные отклонения; R_{xy} — коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

Геометрическое место точек, имеющих равную плотность вероятности, есть эллипс (эллипс рассеивания), определяемый уравнением

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = C^2. \quad (2.23)$$

Если $R_{xy} = 0$, то оси симметрии эллипса рассеивания параллельны координатным осям Ox и Oy , случайные величины X и Y не связаны и независимы, а плотность вероятности $\omega_2(x, y)$ равна

$$\begin{aligned} \omega_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]} = \\ &= \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left[\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{E_y^2} \right]}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $E_x = \sigma_x \rho \sqrt{2}$, $E_y = \sigma_y \rho \sqrt{2}$ — соответственно вероятные отклонения X и Y .

Эллипс, определяемый равенством

$$\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{E_y^2} = 1, \quad (2.25)$$

называется единичным.

Одномерные функции распределения и плотности вероятности выражаются через двумерные с помощью следующих соотношений:

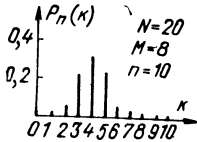
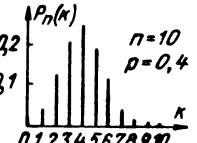
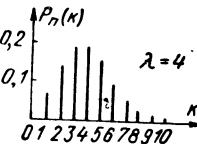
$$\left. \begin{aligned} F_1(x) = F_2(x, \infty) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx dy, \\ W_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dy, \\ F_1(y) = F_2(\infty, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx dy, \\ W_1(y) = \frac{\partial F_1(y)}{\partial y} &= \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Закон распределения системы двух случайных величин X, Y определяется распределением каждой из величин, входящих в систему,

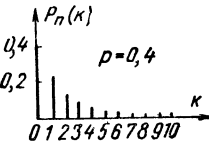
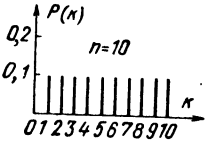
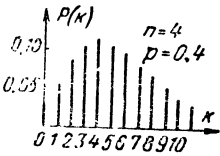
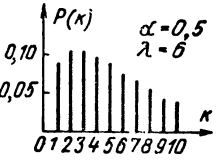
Законы распределения дискретной

| Закон распределения | Случайная величина и область ее изменения | Аналитическое выражение закона распределения |
|----------------------------|--|---|
| 1. Гипергеометрический | $k=0, 1, 2, \dots$ $\dots, \min(M, n)$ | $P_n(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ |
| 2. Биномиальный (Бернулли) | $k=0, 1, 2, \dots, n$ | $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ |
| 3. Полиномиальный | $k_1=0, 1, \dots, n;$ $k_2=0, 1, \dots, n;$ \dots $k_m=0, 1, \dots, n;$ $\sum_{i=1}^m k_i = n$ | $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$ $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ |
| 4. Пуассона | $k=0, 1, 2, \dots$ | $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ |

случайной величины

| Определяющие параметры | График закона распределения | Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ |
|---|---|---|
| N, M, n |  | $\sum_{k=0}^{\min(M, n)} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} e^{jku}$ |
| n, p |  | $[1 + p(e^{ju} - 1)]^n$ |
| n и любые $m-1$ величин из p_1, p_2, \dots, p_m | | |
| λ |  | $e^{\lambda} (e^{ju} - 1)$ |

| Закон распределения | Случайная величина и область ее изменения | Аналитическое выражение закона распределения |
|----------------------------------|---|---|
| 5. Геометрический (Фарри) | $k=0, 1, 2, \dots$ | $P_n(k) = p(1-p)^k$ |
| 6. Равномерный | $k=1, 2, \dots, n$ | $P(k) = \frac{1}{n}$ |
| 7. Отрицательный биномиальный | $k=n, n+1, \dots$ или $k=0, 1, 2, \dots$ | $P(k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ или $P(k) = C_{k+n-1}^{n-1} p^n (1-p)^k$ |
| 8. Пуассона | $k=0, 1, 2, \dots$ при $\alpha=0$; $k=1, 2, \dots$ при $\alpha > 0$ | $P(k) = P_0 \left(\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda} \right)^k \times$ $\times \frac{1(1+\alpha) \dots [1+(k-1)\alpha]}{k!};$ $\alpha \geq 0, \lambda > 0,$ $P_0 = P(0) = (1+\alpha\lambda)^{-\frac{1}{\alpha}}$ |

| Определяющие параметры | График закона распределения | Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ |
|-------------------------------------|--|---|
| <p>p</p> |  <p>$P_n(\kappa)$ $p=0,4$</p> | $p [1 - (1 - p) e^{ju}]^{-1}$ |
| <p>n</p> |  <p>$P(\kappa)$ $n=10$</p> | $\frac{e^{ju} (1 - e^{jun})}{n (1 - e^{ju})}$ |
| <p>n, p</p> |  <p>$P(\kappa)$ $n=4$ $p=0,4$</p> | $p^n [1 - (1 - p) e^{ju}]^{-n}$ |
| <p>α, λ</p> |  <p>$P(\kappa)$ $\alpha=0,5$ $\lambda=6$</p> | $[1 + \alpha \lambda (1 - e^{ju})]^{-\frac{1}{\alpha}}$ |

Законы распределения непрерывны

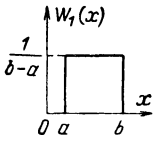
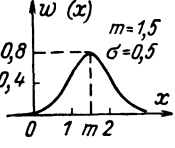
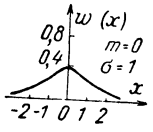
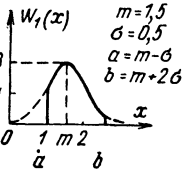
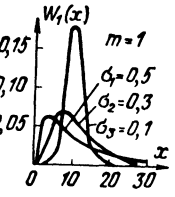
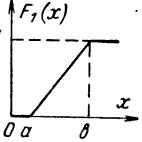
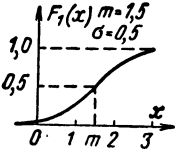
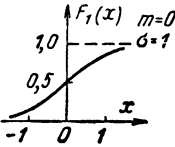
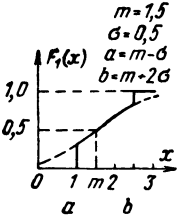
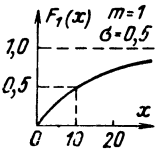
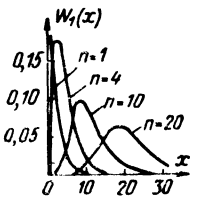
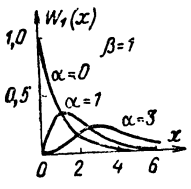
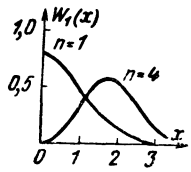
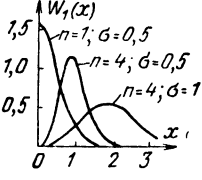
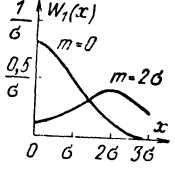
| Закон распределения | Область значений случайной величины | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Определяющие параметры | График плотности вероятности $W_1(x)$ |
|--------------------------------|-------------------------------------|---|------------------------|---|
| 1. Равномерный (прямоугольный) | $a < x < b$ | $\frac{1}{b-a}$ | a, b |  |
| 2. Нормальный (Гаусса) | $-\infty < x < \infty$ | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ | m, σ |  |
| 3. Нормальный стандартный | $-\infty < x < \infty$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $m=0, \sigma=1$ |  |
| 4. Усеченный нормальный | $a < x < b$ | $\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$ $c = \frac{1}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}$ | m, σ, a, b |  |
| 5. Логарифмически нормальный | $0 < x < \infty$ | $\frac{\log e}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}},$ $m = M(\log X),$ $\sigma^2 = D(\log X)$ | m, σ |  |

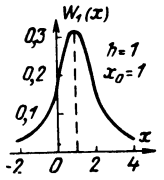
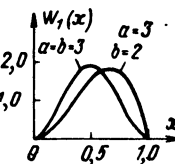
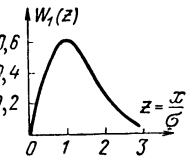
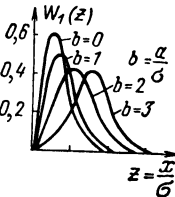
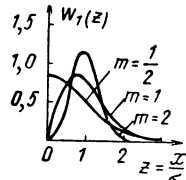
Таблица 2.2

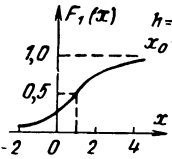
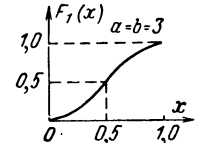
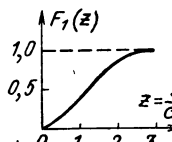
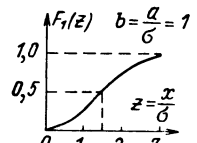
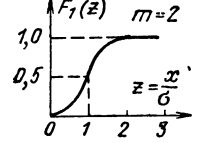
вной случайной величины

| Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$ | График функции распределения $F_1(x)$ | Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ |
|--|---|--|
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b, \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}$ |  | $\frac{e^{jbu} - e^{jau}}{ju(b-a)}$ |
| $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ |  | $e^{jmu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$ |  | $e^{-\frac{u^2}{2}}$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ c \left[\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \right] & \text{при } a < x < b, \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}$ |  | |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \Phi\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right) & \text{при } x > 0 \end{cases}$ |  | |

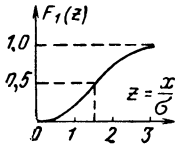
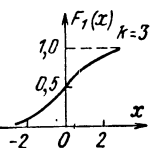
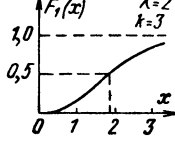
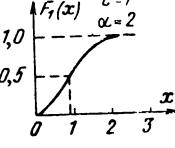
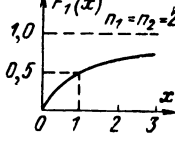
| Закон распределения | Область значений случайной величины | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Определяющие параметры | График плотности вероятности $W_1(x)$ |
|--|-------------------------------------|---|---|---|
| 6. Хи-квадрат распределение | $0 < x < \infty$ | $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ | n |  |
| 7. Гамма-распределение | $0 < x < \infty$ | $\frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}$ | $\alpha, \beta,$ $\alpha > -1,$ $\beta > 0$ |  |
| 8. Хи-распределение | $0 < x < \infty$ | $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}$ | n |  |
| 9. Распределение модуля многомерного вектора | $0 < x < \infty$ | $\frac{2x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ | n, σ |  |
| 10. Распределение модуля нормальной случайной величины | $0 < x < \infty$ | $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+m)^2}{2\sigma^2}} \right]$ | m, σ |  |

| Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$ | График функции распределения $F_1(x)$ | Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ |
|--|---------------------------------------|--|
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ | | $(1 - ju)^{-\frac{n}{2}}$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{\Gamma(\alpha + 1; \frac{x}{\beta})}{\Gamma(\alpha + 1)} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ | | $(1 - ju\beta)^{-(\alpha+1)}$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{x^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ | | $\frac{\Gamma(n)}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times e^{-\frac{u^2}{4}} D_{-n}(-ju),$ <p>где $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра [15]</p> |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ | | $\frac{\Gamma(n)}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times e^{-\frac{u^2 \sigma^2}{4}} D_{-n}(ju\sigma)$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{x+m}{\sigma}\right) - 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$ | | $2 \cos mu \cdot e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$ |

| Закон распределения | Область значений случайной величины | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Определяющие параметры | График плотности вероятности $W_1(x)$ |
|------------------------------------|-------------------------------------|---|--------------------------------|---|
| 11. Коши | $0 < x < \infty$ | $\frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2 + (x - x_0)^2}$ | h, x_0 |  |
| 12. Бета-распределение | $0 < x < 1$ | $\frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1},$ $B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ | $a, b;$ $a > 0,$ $b > 0$ |  |
| 13. Релея | $0 < x < \infty$ | $\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ | σ |  |
| 14. Обобщенный закон Релея (Райса) | $0 < x < \infty$ | $\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right)$ | a, σ |  |
| 15. m-распределение (Накагами) | $0 < x < \infty$ | $\frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m x^{2m-1} \times$ $\times e^{-\frac{m}{\sigma^2} x^2},$ $m > \frac{1}{2}$ | m, σ |  |

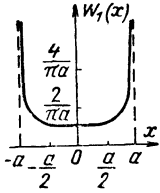
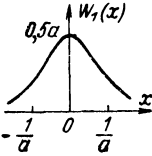
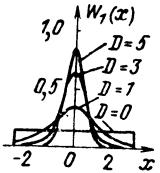
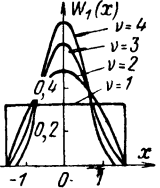
| Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$ | График функции распределения $F_1(x)$ | Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ |
|--|---|---|
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{h}$ |  | $e^{jx_0 u - h u }$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ |  | |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ |  | $1 + jau \sqrt{\frac{\pi}{2}} W\left(\frac{au}{\sqrt{2}}\right),$ <p>где</p> $W(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \right) -$ <p>табулированный интеграл вероятности от комплексного аргумента</p> |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(k!)^2 \left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)^k} \times \\ \times \Gamma\left(k+1; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{при } x > 0 \end{cases}$ |  | |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{\Gamma\left(m; i \frac{mx^2}{\sigma^2}\right)}{\Gamma(m)} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ |  | $\frac{\Gamma(2m)}{2^{m-1} \Gamma(m)} e^{-\frac{u^2 \sigma^2}{8m}} \times$ $\times D_{-2m} \left(-\frac{j u \sigma}{\sqrt{2m}} \right)$ |

| Закон распределения | Область значений случайной величины | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Определяющие параметры | График плотности вероятности $W_1(x)$ |
|--|-------------------------------------|---|-----------------------------|---------------------------------------|
| 16. Максвелла | $0 < x < \infty$ | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma^3} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ | σ | |
| 17. Стюдента (t -распределение) | $-\infty < x < \infty$ | $\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times$ $\times \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$ | k | |
| 18. Эрланга k -го порядка | $0 < x < \infty$ | $\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} x^k e^{-\lambda x}$ | $\lambda, k,$ k -целое | |
| 19. Вейбулла | $0 < x < \infty$ | $c x^{\alpha-1} e^{-c x^\alpha}$ | $c > 0,$ $\alpha > 0$ | |
| 20. Фишера—Снедекора (F -распределение) | $0 < x < \infty$ | $\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \times$ $\times x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$ | n_1, n_2 | |

| Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$ | График функции распределения $F_1(x)$ | Характеристическая функция $\Phi_1(u)$ |
|--|---|---|
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{при } x > 0 \end{cases}$ |  | $(1 - \sigma^2 u^2) W\left(\frac{\sigma u}{\sqrt{2}}\right) + j\sigma u \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ |
| $\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ |  | $\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} e^{jut} dt$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{\Gamma(k+1; \lambda x)}{\Gamma(k+1)} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ |  | $\left(1 - \frac{ju}{\lambda}\right)^{-(k+1)}$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-cx^\alpha} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ |  | $1 + j u \int_0^{\infty} e^{jux - cx^\alpha} dx$ |
| |  | |

| Закон распределения | Область значений случайной величины | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Определяющие параметры | График плотности вероятности $W_1(x)$ |
|--|-------------------------------------|--|------------------------|---------------------------------------|
| 21. Лапласа (двусторонний экспоненциальный) | $-\infty < x < \infty$ | $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x - \mu }$ | λ, μ | |
| 22. Экспоненциальный односторонний (показательный) | $0 < x < \infty$ | $\lambda e^{-\lambda x}$ | λ | |
| 23. Двойное показательное распределение | $-\infty < x < \infty$ | $c \alpha e^{-\alpha x - c e^{-\alpha x}}$ | $c > 0, \alpha > 0$ | |
| 24. Показательно-степенной | $0 < x < \infty$ | $\frac{x^m}{m!} e^{-x}$ | m | |
| 25. Симпсона (треугольный) | $a < x < b$ | $\begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{при } a < x < \frac{a+b}{2}, \\ < \frac{b+a}{2}, \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{при } \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 0 & \text{при } b < x < \infty \end{cases}$ | a, b | |

| Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$ | График функции распределения $F_1(x)$ | Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ |
|--|---------------------------------------|---|
| $\begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)} & \text{при } -\infty < x < \mu, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)} & \text{при} \\ & \mu < x < \infty \end{cases}$ | | $\frac{\lambda^2 e^{j\mu u}}{\lambda^2 + u^2}$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ | | $\frac{\lambda}{\lambda - ju}$ |
| $e^{-\alpha e^{-ax}}$ | | |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{\Gamma(m+1; x)}{\Gamma(m+1)} & \text{при } x > 0 \end{cases}$ | | $(1 - ju)^{-(m+1)}$ |
| $\begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} & \text{при } a < x < \frac{a+b}{2}, \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2} & \text{при } \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 1 & \text{при } b < x < \infty \end{cases}$ | | $\frac{4}{u^2 (b-a)^2} \times \left(e^{ju \frac{b}{2}} - e^{ju \frac{a}{2}} \right)^2$ |

| Закон распределения | Область значений случайной величины | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Определяющие параметры | График плотности вероятности $W_1(x)$ |
|------------------------------|--------------------------------------|---|------------------------|---|
| 26. Закон арксинуса | $-a < x < a$ | $\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$ | a |  |
| 27. Закон sch ² x | $-\infty < x < \infty$ | $\frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 ax}$ | a |  |
| 28. | $-\pi < x < \pi$ | $\frac{1}{2\pi I_0(D)} e^{D \cos x}$ | D |  |
| 29. | $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ | $B \frac{(\cos x)^{\nu-1}}{2^{\nu-1} \Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ | $\nu > 0$ |  |

| Аналитическое выражение функции распределения $F_1(x)$ | График функции распределения $F_1(x)$ | Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ |
|---|---------------------------------------|--|
| $\begin{cases} 0 & \text{при } x < -a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} & \text{при } -a < x < a, \\ 1 & \text{при } x > a \end{cases}$ | | $\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{e^{jux}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = J_0(au),$ <p>где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка</p> |
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$ | | $\frac{\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{\pi}{2a}}$ |
| $\frac{1}{2\pi I_0(D)} \int_{-\pi}^x e^{D \cos t} dt$ | | |
| $B \int_{-\frac{\pi}{2}}^x (\cos t)^{\nu-1} dt$ | | |

и зависимостью между ними. Степень зависимости случайных величин X и Y характеризуется условным законом распределения, под которым понимается закон распределения одной из случайных величин, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

По теореме умножения законов распределения

$$W_2(x, y) = W_1(x) W_1(y|x) = W_1(y) W_1(x|y), \quad (2.27)$$

где

$$W_1(y|x) = \frac{\partial F_1(y|x)}{\partial y}, \quad W_1(x|y) = \frac{\partial F_1(x|y)}{\partial x}$$

— условные плотности вероятностей.

Для независимых случайных величин

$$W_2(x, y) = W_1(x) W_1(y). \quad (2.28)$$

Условие (2.28) — необходимое и достаточное условие независимости случайных величин.

Условные и безусловные плотности вероятностей связаны между собой выражениями

$$\left. \begin{aligned} W_1(y|x) &= \frac{W_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dy} = \frac{W_2(x, y)}{W_1(x)}, \\ W_1(x|y) &= \frac{W_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx} = \frac{W_2(x, y)}{W_1(y)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Условные плотности вероятностей обладают всеми свойствами, которые присущи безусловным плотностям.

Формулы полной вероятности и Байеса для непрерывных случайных величин соответственно имеют вид

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) W_1(y|x) dx, \quad (2.30)$$

$$W_1(x|y) = \frac{W_1(x) W_1(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) W_1(y|x) dx}. \quad (2.31)$$

Выражения (2.12) — (2.31) можно обобщить на многомерные (n -мерные) функции распределения $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и плотности вероятности $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые описывают систему n случайных величин (n -мерный случайный вектор) [1].

В табл. 2.1 приведен ряд законов распределения дискретной случайной величины и соответствующие им характеристические функции $\Theta_1(u)$ (см. § 1, гл. 3), а также графики законов при различных значениях параметров распределений.

Аналогичные данные по законам распределения непрерывных случайных величин представлены в табл. 2.2 [1—17].

§ 2. Примеры

Пример 2.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск пяти ракет, причем вероятность p попадания в цель при каждом пуске равна 0,8.

Построить: а) ряд распределения числа попаданий; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения $F_1(x)$ числа попаданий.

Решение. Случайная величина X (число попаданий в цель) может принять следующие значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$. Эти значения случайная величина X принимает с вероятностями $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$, которые равны:

$$p_0 = (1 - p)^5 = 0,2^5 = 0,00032,$$

$$p_1 = C_5^1 p (1 - p)^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 = 0,0064,$$

$$p_2 = C_5^2 p^2 (1 - p)^3 = 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512,$$

$$p_3 = C_5^3 p^3 (1 - p)^2 = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,2048,$$

$$p_4 = C_5^4 p^4 (1 - p) = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,4096,$$

$$p_5 = p^5 = 0,8^5 = 0,32768.$$

Из вычисленных значений $p_i, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, видно, что наиболее вероятно попадание в цель четырьмя ракетами, в то время как промах всеми ракетами маловероятен.

а) Ряд распределения имеет следующий вид:

| | | | | | | |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| p_i | 0,00032 | 0,00640 | 0,05120 | 0,20480 | 0,40960 | 0,32768 |

б) в соответствии с рядом распределения вероятностей числа попаданий в цель построен многоугольник распределения, представленный на рис. 2.5;

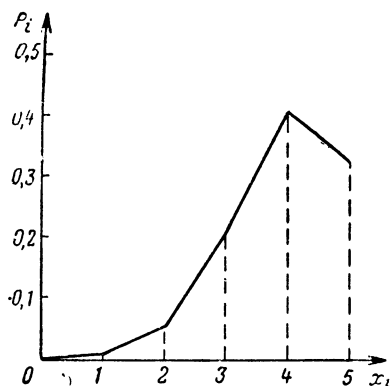


Рис. 2.5. Многоугольник распределения.

в) по определению функция распределения $F_1(x)$ равна

$$F_1(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

При $x \leq 0$

$$F_1(x) = P(X < 0) = 0,$$

при $0 < x \leq 1$

$$F_1(x) = P(X = x_0 = 0) = 0,00032,$$

при $1 < x \leq 2$

$$F_1(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,00032 + 0,00640 = 0,00672,$$

при $2 < x \leq 3$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^2 P(X = x_i) = 0,00032 + 0,00640 + 0,05120 = 0,05792,$$

при $3 < x \leq 4$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^3 P(X = x_i) = 0,26272,$$

при $4 < x \leq 5$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^4 P(X = x_i) = 0,67232,$$

при $x > 5$

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^5 P(X = x_i) = \sum_{i=0}^5 p_i = 1.$$

Таким образом, аналитическое выражение функции распределения имеет вид

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,00032 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,00672 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,05792 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,26272 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,67232 & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 2.6.

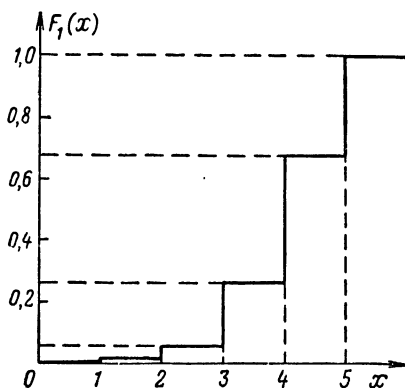


Рис. 2.6. График функции распределения дискретной случайной величины.

Пример 2.2. Плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X имеет вид

$$W_1(x) = \beta e^{-\lambda |x|}, \quad (-\infty < x < \infty),$$

где β и λ — постоянные величины.

Требуется: а) найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные β и λ ; б) вычислить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X ; в) построить графики плотности вероятности $W_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$ при $\lambda = 2$.

Решение. а) Чтобы найти соотношение между постоянными β и λ , воспользуемся условием нормировки для плотности вероятности. При этом учтем, что плотность вероятности имеет разные аналитические выражения при $x < 0$ и $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) dx = \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda |x|} dx = \beta \left[\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2\beta}{\lambda} = 1.$$

Следовательно, $\lambda = 2\beta$.

б) Функция распределения $F_1(x)$ по определению равна:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x W_1(z) dz.$$

При $x < 0$

$$F_1(x) = \beta \int_{-\infty}^x e^{\lambda z} dz = \frac{\beta}{\lambda} e^{\lambda x} = \frac{1}{2} e^{\lambda x}.$$

При $x > 0$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} + \beta \int_0^x e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}.$$

в) Когда $\lambda = 2$, то $W_1(x) = e^{-2|x|}$, а

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2x} & \text{при } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-2x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Графики $W_1(x)$ и $F_1(x)$ при $\lambda = 2$ соответственно изображены на рис. 2.7.

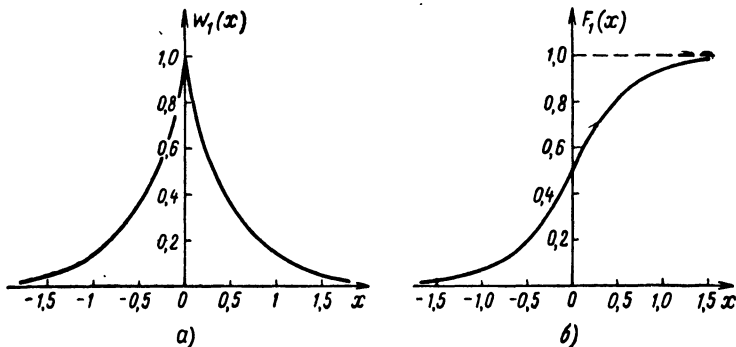


Рис. 2.7. Плотность вероятности (а) и функция распределения (б) непрерывной случайной величины.

Пример 2.3. Функция распределения $F_1(x)$ случайной величины X задана графиком (рис. 2.8).

Требуется: а) найти аналитическое выражение для функции распределения; б) построить график плотности вероятности $W_1(x)$; в) определить вероятность P того, что величина X примет значение, заключенное в пределах от 3,5 до 4,5.

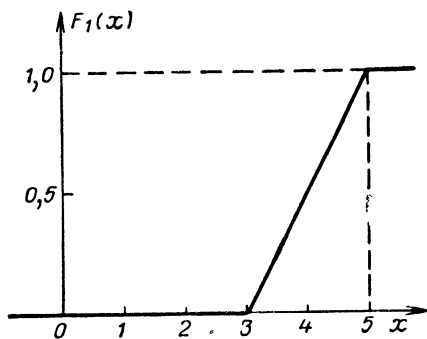


Рис. 2.8. Функция распределения.

Решение. а) Когда значения величины X заключены в пределах от 3 до 5, функция распределения $F_1(x)$ представляет собой отрезок прямой, проходящей через две точки с координатами (3, 0) и (5, 1). Используя уравнение прямой в виде $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, получим $\frac{x-3}{5-3} = \frac{F_1(x)}{1}$, т. е. $F_1(x) = \frac{x-3}{2}$. Следовательно,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{x-3}{2} & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

б) По определению $W_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}$. Поэтому

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

График плотности вероятности $W_1(x)$ представлен на рис. 2.9.

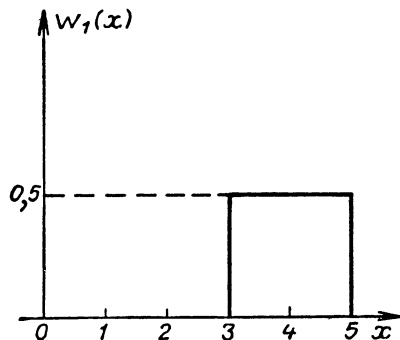


Рис. 2.9. Плотность вероятности.

$$\begin{aligned}
 \text{в) } P &= P(3,5 \leq X < 4,5) = F_1(4,5) - F_1(3,5) = \frac{4,5 - 3}{2} - \\
 &\quad - \frac{3,5 - 3}{2} = 0,5.
 \end{aligned}$$

Пример 2.4. Случайная величина X удовлетворяет неравенству $-1 \leq X \leq 1$, причем в интервале от -1 до $+1$ она распределена равномерно, а каждое из значений -1 и $+1$ принимает с вероятностью $1/4$.

Требуется: а) найти и построить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X ; б) вычислить вероятность P того, что случайная величина попадет в интервал от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$.

Решение. По условию X — случайная величина смешанного типа. а) При $x \leq -1$

$$F_1(x) = P(X < x) = 0.$$

При $-1 < x \leq 1$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= P(X = -1) + \int_{-1}^x W_1(z) dz = \frac{1}{4} + \int_{-1}^x \frac{dz}{4} = \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{x+1}{4} = \frac{x+2}{4}.
 \end{aligned}$$

При $x > 1$

$$F_1(x) = P(X = -1) + \int_{-1}^1 \frac{dx}{4} + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

Следовательно,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{x+2}{4} & \text{при } -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

График функции распределения $F_1(x)$ представлен на рис. 2.10.

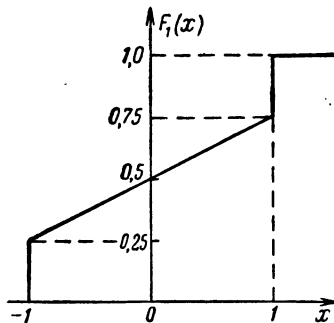


Рис. 2.10. Функция распределения.

$$б) P = F_1\left(\frac{1}{2}\right) - F_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2+0,5}{4} - \frac{2-0,5}{4} = \frac{1}{4}.$$

Пример 2.5. Вычислить и построить двумерную функцию распределения $F_2(x, y)$ независимых дискретных случайных величин X и Y , если случайная величина X принимает три возможных значения $0, 1, 3$ с вероятностями $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}$ и $\frac{1}{8}$, а Y — два возможных значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

Решение. По определению

$$F_2(x, y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P(X = x_i, Y = y_j),$$

где $i = 0, 1, 3$, а $j = 0, 1$.

Так как по условию случайные величины X и Y независимы, то

$$F_2(x, y) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \sum_{y_j < y} P(Y = y_j).$$

При $x \leq 0$ $P(X < x) = 0$. Следовательно, в этом случае при любом Y из области его возможных значений $F_2(x, y) = 0$. Аналогично, при $y \leq 0$ $P(Y < y) = 0$. Поэтому при любом X из области его возможных значений $F_2(x, y) = 0$.

При $0 < x \leq 1$ и $0 < y \leq 1$ имеем

$$F_2(x, y) = P(X = x_0 = 0) P(Y = y_0 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

При $0 < x \leq 1$ и $y > 1$

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= P(X = x_0 = 0) [P(Y = y_0 = 0) + P(Y = y_1 = 1)] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Когда $1 < x \leq 3$ и $0 < y \leq 1$, то

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= [P(X = x_0 = 0) + P(X = x_1 = 1)] P(Y = y_0 = 0) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) \frac{1}{3} = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

При $1 < x \leq 3$ и $y > 1$ получим

$$F_2(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) \cdot 1 = \frac{7}{8}.$$

Если $x > 3$ и $0 < y \leq 1$, то

$$F_2(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

При $x > 3$ и $y > 1$ получим

$$F_2(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = 1.$$

Таким образом, функцию распределения $F_2(x, y)$ можно записать в виде

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \quad y \leq 0, \\ \frac{1}{6} & \text{при } 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1, \quad y > 1, \\ \frac{7}{24} & \text{при } 1 < x \leq 3, \quad 0 < y \leq 1, \\ \frac{7}{8} & \text{при } 1 < x \leq 3, \quad y > 1, \\ \frac{1}{3} & \text{при } x > 3, \quad 0 < y \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 3, \quad y > 1. \end{cases}$$

График функции распределения $F_2(x, y)$ представлен на рис. 2.11.

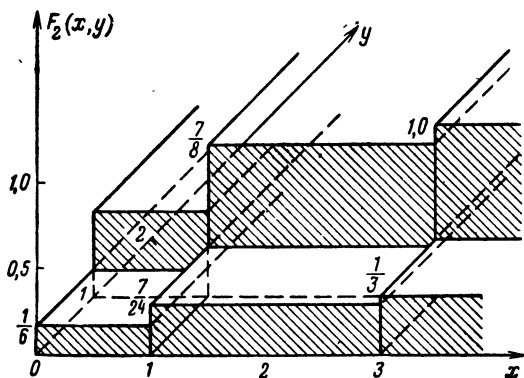


Рис. 2.11. Двумерная функция распределения.

Пример 2.6. Самолет производит одиночное бомбометание по автостраде шириной 15 м. Заход — вдоль автострады, прицеливание — по средней линии автострады. Из-за наличия скольжения самолета имеется систематическая ошибка — точка попадания смещается от точки прицеливания вправо в среднем на 10 м. Вероятное отклонение E в направлении, перпендикулярном полету, равно 15 м.

Определить вероятность P попадания в автостраду при нормальном распределении абсциссы точки попадания.

Решение. Из-за наличия систематической ошибки центр рассеивания (ЦР) не совпадает с точкой прицеливания (ТП). Выберем начало координат в центре рассеивания (рис. 2.12), ось Oy направим по полету самолета, ось Ox — в боковом направлении вправо.

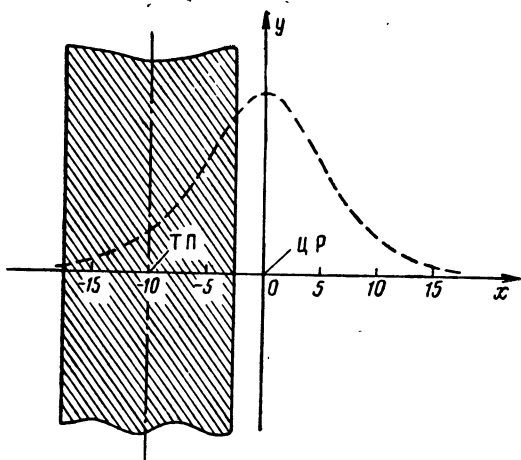


Рис. 2.12. К вычислению вероятности P .

Задача сводится к вычислению вероятности попадания случайной величины X — абсциссы точки попадания — на участок от $-17,5$ до $-2,5$.

Полагая в формуле (2.8)

$$m = 0, \alpha = -17,5, \beta = -2,5, \sigma = \frac{E}{\rho \sqrt{2}} = \frac{15}{0,477 \sqrt{2}} \approx 22,2,$$

получим

$$P = P(-17,5 \leq X < -2,5) = \Phi\left(\frac{-2,5}{22,2}\right) - \Phi\left(\frac{-17,5}{22,2}\right) = \Phi(0,79) - \Phi(0,11) \approx 0,241.$$

Пример 2.7. Плотность вероятности $w_2(x, y)$ нормального распределения двух случайных величин X и Y выражается формулой

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2(1-R_{xy}^2)} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y \sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]},$$

где $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, R_{xy}$ — параметры распределения.

Определить:

- а) плотности вероятностей $w(x)$ и $w(y)$ случайных величин X и Y ;
 б) условные плотности вероятностей $w(y|x)$ и $w(x|y)$ величин X и Y .

Решение. а) Согласно формуле (2.26) имеем

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]} dy.$$

Произведя замену переменных

$$\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} = u, \quad \frac{y-m_y}{\sqrt{2}\sigma_y} = v,$$

получим

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_x\sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{u^2}{1-R_{xy}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1-R_{xy}^2}v^2 + \frac{2R_{xy}u}{1-R_{xy}^2}v} dv.$$

Известно [15], что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2x^2 \pm qx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{\frac{q^2}{4p^2}}.$$

Воспользовавшись этим интегралом, найдем

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-u^2}$$

или

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Таким образом, величина X подчинена нормальному закону с параметрами m_x и σ_x .

Произведя аналогичные вычисления, получим

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

б) По формулам (2.29) находим условные плотности вероятности

$$\omega(y|x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi} \sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)\sigma_y^2} \left[y - m_y - R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x) \right]^2},$$

$$\omega(x|y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi} \sqrt{1-R_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)\sigma_x^2} \left[x - m_x - R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y) \right]^2}.$$

Из этих выражений следует, что $\omega(y|x)$ и $\omega(x|y)$ представляют собой нормальные плотности вероятности с параметрами:

$$m_{y|x} = m_y + R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x),$$

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y \sqrt{1 - R_{xy}^2},$$

$$m_{x|y} = m_x + R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y),$$

$$\sigma_{x|y} = \sigma_x \sqrt{1 - R_{xy}^2}.$$

§ 3. Задачи и ответы

2.1. Привести примеры случайных величин дискретного, непрерывного и смешанного типов.

2.2. Какие размерности имеют функция распределения $F_1(x)$ и плотность вероятности $W_1(x)$?

2.3. Симметричная игральная кость брошена 3 раза. Найти ряд распределения числа появлений цифры 4.

Ответ:

| | | | | |
|-------|-------------------|------------------|------------------|-----------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| p_i | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

2.4. По двоичному каналу связи с помехами передаются две цифры: единица и нуль. Априорные вероятности передачи этих цифр равны $p(1) = p(0) = \frac{1}{2}$. Из-за наличия помех возможны искажения. Вероятности перехода единицы в единицу и нуля в нуль соответственно равны $p(1/1) = p$, $p(0/0) = q$.

Определить закон распределения вероятностей случайной величины X -однозначного числа, которое будет получено на приемном конце в некоторый момент времени.

Ответ:

| | | |
|-------|-----------------------|-----------------------|
| x_i | 0 | 1 |
| p_i | $\frac{1}{2} (1-p+q)$ | $\frac{1}{2} (1-q+p)$ |

2.5. Вероятность отыскания малоразмерного объекта в заданном районе в каждом вылете равна p .

Найти ряд распределения числа произведенных независимых вылетов, которые выполняются до первого обнаружения объекта.

Ответ:

| | | | | | | |
|-------|-----|----------|------------|-----|----------------|-----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | ... | i | ... |
| p_i | p | $p(1-p)$ | $p(1-p)^2$ | ... | $p(1-p)^{i-1}$ | ... |

2.6. Производятся последовательные испытания k приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным.

Построить ряд распределения случайной величины X (числа испытанных приборов), если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна p .

Ответ:

| | | | | | | | |
|-------|---------|----------|------------|-----|----------------|-----|----------------|
| x_i | 1 | 2 | 3 | ... | i | ... | k |
| p_i | $(1-p)$ | $p(1-p)$ | $p^2(1-p)$ | ... | $p^{i-1}(1-p)$ | ... | $p^{k-1}(1-p)$ |

2.7. Два стрелка стреляют поочередно по мишени, причем стрельба ведется до первого попадания.

Определить закон распределения вероятностей случайной величины X -числа произведенных выстрелов, если известно, что при одном выстреле вероятность попадания первого стрелка равна p_1 , а второго стрелка — p_2 .

Ответ:

$$P(X = 2k + 1) = p_1(1 - p_1)^k(1 - p_2)^k,$$

$$P(X = 2k + 2) = p_2(1 - p_1)^{k+1}(1 - p_2)^k,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.8. Из 25 радиоламп, среди которых 10 бракованных, случайным образом выбраны 5 радиоламп для проверки их параметров.

Определить и построить: а) ряд распределения случайного числа X бракованных радиоламп в выборке; б) функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X .

Ответ: а)

| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|--------|-------|-------|-------|--------|---------|
| p_i | 0,0565 | 0,257 | 0,386 | 0,237 | 0,0593 | 0,00475 |

$$\text{б) } F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,0565 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,314 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,700 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,937 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,996 & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

2.9. Производится 5 выстрелов по мишени; вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4.

Определить и построить: а) ряд распределения случайной величины X — числа попаданий в мишень; б) функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X .

Ответ: а)

| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| p_i | 0,07776 | 0,25920 | 0,34560 | 0,23040 | 0,07680 | 0,01024 |

$$\text{б) } F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,07776 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,33696 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,68256 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,91296 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,98976 & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

2.10. Пуск ракет по одной и той же стартовой позиции противника производится до тех пор, пока не произойдет двух попаданий в цель. Вероятность p попадания в цель одной ракетой равна 0,5.

Определить закон распределения числа X произведенных пусков ракет.

Ответ:

$$P(k) = P(X = k) = (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

где $k = 2, 3, 4, \dots$

2.11. Вероятность получения отметки от цели на экране обзорного радиолокатора при одном обороте антенны равна p . Цель считается обнаруженной, если от нее получено n отметок.

Найти закон распределения случайной величины X — числа оборотов антенны радиолокатора.

Ответ:

$$P(k) = P(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

где $k = n, n+1, n+2, \dots$

2.12. Прибор, состоящий из блоков a, b_1 и b_2 , дает отказ в случае осуществления события $C = A + B_1 B_2$, где A — отказ блока a ; B_1 и B_2 — соответственно отказы блоков b_1 и b_2 . Отказы происходят при попадании в блок хотя бы одной космической частицы.

Определить закон распределения числа случайных частиц X , попадание которых в прибор приводит к его отказу, если вероятности попадания в блоки частицы, попавшей в прибор, равны $P(A) = 0,5$, $P(B_1) = P(B_2) = 0,25$.

Ответ [18]:

$$P(X = m) = 1 - 2 \cdot 0,25^m$$

для всех $m \geq 1$.

2.13. Стрельба по подвижной цели ведется до получения первого попадания. Вероятность попадания от выстрела к выстрелу не меняется и равна 0,6. На стрельбу отпущено 4 снаряда.

Вычислить: а) ряд распределения случайной величины X расхода снарядов; б) функцию распределения случайной величины X .

Ответ: а)

| | | | | |
|-------|-----|------|-------|-------|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p_i | 0,6 | 0,24 | 0,096 | 0,064 |

$$б) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,6 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,84 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,936 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

2.14. Ряд распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

| | | | | | | | |
|-------|------|------|-----|-----|------|-----|------|
| x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| p_i | 0,05 | 0,15 | 0,2 | 0,2 | 0,25 | 0,1 | 0,05 |

Найти: а) функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X и построить ее график; б) вероятность того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.

Ответ:

$$а) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ 0,05 & \text{при } -3 < x \leq -2, \\ 0,20 & \text{при } -2 < x \leq -1, \\ 0,40 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 0,60 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,85 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,95 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

$$б) P(X \leq |1|) = P(-1 \leq X \leq 1) = 0,65.$$

2.15. Последовательные ускоренные испытания приборов на надежность производятся до первого отказа, после чего они прекращаются.

Пользуясь понятием плотности вероятности для дискретной случайной величины, найти плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X — числа испытанных приборов, если вероятность отказа для всех приборов одна и та же и равна 0,5.

Ответ [18]:

$$W_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \delta(x - x_i).$$

2.16. Функция распределения $F_1(x)$ случайной величины X задана графиком (рис. 2.13, а).

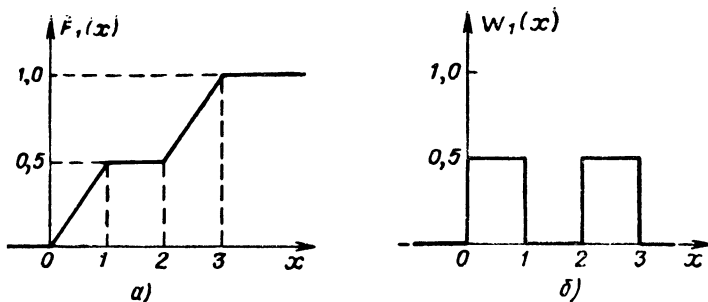


Рис. 2.13. Функция распределения (а) и плотность вероятности (б).

Требуется: а) найти аналитическое выражение для $F_1(x)$; б) построить график плотности вероятности $W_1(x)$; в) определить вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в пределах от 0,2 до 0,8.

Ответ:

$$а) F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ \frac{x-1}{2} & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

б) график $W_1(x)$ приведен на рис. 2.13, б;
в) 0,3.

2.17. Плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X графически изображена на рис. 2.14 (закон Симпсона).

Найти: а) аналитические выражения плотности вероятности $W_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$; б) вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в пределах от $-0,5$ до $+0,5$.

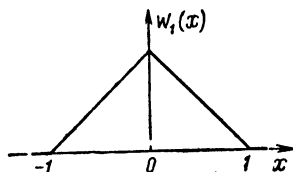


Рис. 2.14. Закон Симпсона.

Ответ:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } W_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ x+1 & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1-x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1; \end{cases} \\
 F_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1; \end{cases} \\
 \text{б) } & \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

2.18. График плотности вероятности $W_1(x)$ непрерывной случайной величины X имеет вид, представленный на рис. 2.15.

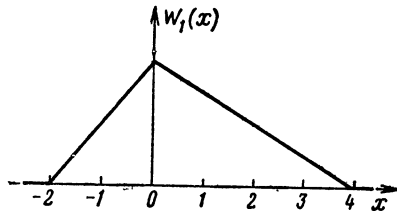


Рис. 2.15. Плотность вероятности.

Найти аналитические выражения плотности вероятности $W_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$ величины X .

Ответ:

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x+2}{6} & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ \frac{4-x}{12} & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4; \end{cases} \\
 F_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x^2+4x+4}{12} & \text{при } -2 < x \leq 0, \\ \frac{8x-x^2}{24} & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.19. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с параметром распределения $\lambda = 2$.

Требуется: а) построить ряд и функцию распределения $F_1(x)$ величины X ; б) определить вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в пределах от 2 до 4.

Ответ: а)

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-----|-------------------------|-----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | i | ... |
| p_i | 0,135 | 0,271 | 0,271 | 0,180 | 0,0902 | 0,0361 | ... | $\frac{2^i}{i!} e^{-2}$ | ... |

б) 0,5412.

2.20. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с параметром λ :

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказать справедливость следующих соотношений:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}; \quad P_n(k > 1) = 1 - (1 + \lambda) e^{-\lambda}.$$

2.21. При фиксированном положении точки разрыва снаряда в уязвимый агрегат цели попадает случайное число осколков X , распределенное по закону Пуассона с параметром $\lambda = 4$. Каждый осколок, попавший в агрегат, поражает его (независимо от других) с вероятностью 0,3 и не поражает с вероятностью 0,7.

Определить вероятность того, что агрегат будет поражен.

Ответ: 0,699.

2.22. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x = 3$, $\sigma_x = 2$. Как изменится плотность вероятности $\omega(x)$, если параметры примут значения $m_x = -3$, $\sigma_x = 4$?

2.23. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m_x = -2$ и $\sigma_x = 4$.

Требуется: а) написать выражения для плотности вероятности $\omega(x)$ и функции распределения $F_1(x)$ величины X и построить их графики; б) определить вероятность неравенства $-1 \leq X < 1$.

Ответ:

$$а) \quad \omega(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}, \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^x \omega(z) dz = \Phi\left(\frac{x+2}{4}\right),$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (2.9).

б) 0,175.

2.24. Сообщение передается последовательностью амплитудно-модулированных импульсов с заданным шагом квантования Δ (Δ — наименьшая разность между двумя импульсами). На сообщение накладываются шумы, распределенные по нормальному закону с плотностью вероятности

$$\omega(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Если мгновенное значение шумов превышает половину шага квантования Δ , то при передаче сообщения возникает ошибка.

Определить, при каком минимально допустимом шаге квантования вероятность ошибки из-за шумов не превысит 0,1.

Ответ: $\Delta = 3,4\sigma$.

2.25. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами распределения σ_x и $m_x = 0$.

Определить вероятности P_1, P_2, P_3 того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине $\sigma_x, 2\sigma_x, 3\sigma_x$.

Ответ: $P_1 \approx 0,683; P_2 \approx 0,955; P_3 \approx 0,997$.

2.26. Стрельба ведется из точки O вдоль прямой Ox . Средняя дальность полета снаряда равна 120 км.

Предполагая, что дальность полета X есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратичным отклонением 3 км, найти, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 6 до 9 км.

Ответ: 2,14 %.

2.27. При массовом изготовлении некоторой детали установлено, что ее длина X распределена нормально с параметрами $m_x = 25$ см и $\sigma_x = 0,2$ см.

Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

Ответ: С вероятностью 0,95 можно гарантировать, что отклонение длины детали от среднего значения не превзойдет $\Delta l = 0,392$ см.

2.28. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и вероятным отклонением E .

Определить вероятность того, что $|X - m| < 4E$.

Ответ: 0,993.

2.29. Возможный результат измерения длительности τ видеоимпульса подчиняется нормальному закону распределения. Вероятное отклонение E метода измерения равно 0,001 сек.

Как следует выбрать число ε , чтобы с вероятностью 0,997 имело место неравенство $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$, где τ_0 — истинное значение длительности видеопульса?

Ответ: $\varepsilon = 0,0044$ сек.

2.30. Расстояние до объекта измеряют с помощью метода, вероятная ошибка которого равна 30 м. Предполагается, что возможный результат измерения распределен по нормальному закону.

Найти вероятность того, что измеренное значение расстояния уклоняется от истинного не более чем на: а) 15 м; б) 30 м; в) 60 м.

Ответ: а) 0,264; б) 0,500; в) 0,823.

2.31. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$.

Определить, каким должно быть среднее квадратичное значение σ_x , чтобы вероятность попадания величины X на участок (α, β) была наибольшей, если $0 < \alpha < \beta$.

Ответ:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln \beta - \ln \alpha)}}.$$

2.32. Случайная величина X — ошибка измерительного прибора, распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мв^2 . Систематическая ошибка прибора отсутствует.

Найти вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка X : а) превзойдет по модулю 6 мв не более трех раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале $0,5\text{—}3,5 \text{ мв}$.

Ответ: а) 0,999; б) 0,776.

2.33. В круг радиуса R наудачу бросили точку. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области.

Найти функцию распределения $F_1(x)$ и плотность вероятности $W_1(x)$ расстояния X точки до центра круга.

Ответ:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{R^2} & \text{при } 0 < x \leq R, \\ 1 & \text{при } x > R; \end{cases}$$

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{2x}{R^2} & \text{при } 0 < x \leq R, \\ 0 & \text{при } x > R. \end{cases}$$

2.34. На отрезок AB длиной l наугад бросают точку M . Вероятность попадания этой точки в любой отрезок, лежащий целиком внутри AB , зависит только от длины этого отрезка и пропорциональна ему.

Определить: а) функцию распределения $F_1(x)$ и плотность вероятности $W_1(x)$ площади прямоугольника со сторонами AM и MB ; б) вероятность P того, что площадь прямоугольника будет меньше $\frac{3l^2}{16}$.

Ответ:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } F_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{4x}{l^2}} & \text{при } 0 < x \leq \frac{l^2}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{l^2}{4}; \end{cases} \\
 W_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{2}{l^2 \sqrt{1 - \frac{4x}{l^2}}} & \text{при } 0 < x \leq \frac{l^2}{4}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{l^2}{4}; \end{cases} \\
 \text{б) } P &= P\left(X < \frac{3}{16} l^2\right) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

2.35. На окружности радиусом R и с центром, расположенным в начале координат, берется наудачу точка. Вероятность взять точку на любой дуге окружности зависит только от длины этой дуги и пропорциональна ей.

Вычислить: а) функцию распределения $F_1(x)$ и плотность вероятности $W_1(x)$ положения проекции X точки на ось абсцисс; б) вероятность неравенства $-\frac{R}{2} < X < \frac{R}{2}$.

Ответ:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } F_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -R, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x}{R} & \text{при } -R < x \leq R, \\ 1 & \text{при } x > R; \end{cases} \\
 W_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -R, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{R^2 - x^2}} & \text{при } -R < x \leq R, \\ 0 & \text{при } x > R; \end{cases} \\
 \text{б) } &\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

2.36. Функция распределения $F_1(x)$ непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ ax^2 & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Определить: а) коэффициент a ; б) плотность вероятности $W_1(x)$; в) вероятность попадания величины X на участок от 1,5 до 3,5.

Ответ:

а) $a = \frac{1}{16}$;

б) $W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{8}x & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{при } x > 4; \end{cases}$

в) $\frac{5}{8}$.

2.37. Случайная величина X подчинена закону Коши с плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{c}{h^2 + x^2}.$$

Требуется: а) найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные c и h ; б) определить функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины X ; в) построить графики $W_1(x)$ и $F_1(x)$ для случая, когда $h = 1$; г) вычислить вероятность неравенства $-1 < X \leq 1$ при $h = 1$.

Ответ:

а) $c = \frac{h}{\pi}$, $W_1(x) = \frac{h}{\pi(h^2 + x^2)}$;

б) $F_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{h}$;

г) $\frac{1}{2}$.

2.38. На электронное реле воздействует случайное напряжение X с релейской плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Определить вероятность P срабатывания схемы, если электронное реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает 2σ .

Ответ: $P = e^{-\frac{2}{\sigma^2}}$.

2.39. При определенных условиях замирания радиосигнала из-за явления многолучевости можно моделировать распределением Релея

$$W_1(A) = \frac{2A}{A_0^2} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}}, \quad A > 0,$$

где A — подверженные замираниям мгновенные значения амплитуды огибающей принимаемого сигнала; A_0^2 — квадрат усредненной за достаточно большое время амплитуды огибающей.

Пусть федингующий сигнал принимается на n антенн, разнесенных друг относительно друга на такие расстояния, при которых складываемые сигналы можно рассматривать статистически независимыми.

Вычислить вероятность P того, что сигнал на всех антеннах одновременно упадет ниже уровня H .

Ответ: $P = \left(1 - e^{-\frac{H^2}{A_0^2}}\right)^n$.

2.40. Функция $W_1(x)$ задана выражением

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{A}{x^4} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Определить: а) при каком значении A эта функция будет плотностью вероятности случайной величины X ; б) вероятность P_1 того, что величина X примет значения в интервале от 1 до 2; в) вероятность P_2 того, что при 3-х независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадет в интервал от 1 до 2.

Ответ:

а) $A = 3$;

б) $P_1 = \frac{7}{8}$;

в) $P_2 = \left(\frac{1}{8}\right)^3$.

2.41. Бомбардировщик может быть атакован истребителем под различными курсовыми углами; случайная величина X —

курсовой угол — распределена по закону, плотность вероятности $W_1(x)$ которого имеет вид

$$W_1(x) = \begin{cases} A_0 \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A_0 и функцию распределения $F_1(x)$ курсового угла; б) вероятность того, что атакующий истребитель может быть обстрелян, если на бомбардировщике имеется стрелковая установка, позволяющая обстреливать атакующий истребитель, только когда курсовой угол находится в пределах от $-\pi/3$ до $+\pi/3$.

Ответ:

а) $A_0 = \frac{1}{2}$;

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

б) 0,866.

2.42. Плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X имеет вид

$$W_1(x) = \frac{c}{e^x + e^{-x}}.$$

Вычислить: а) постоянную c ; б) вероятность P того, что в двух независимых наблюдениях случайная величина X примет значения, меньшие 1.

Ответ [20]:

а) $c = \frac{2}{\pi}$;

б) $P = \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e\right)^2$.

2.43. Испытания показали, что срок службы X элементов радиоэлектронного оборудования можно описать функцией распределения Вейбулла

$$F_1(x) = 1 - e^{-cx^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad c > 0, \quad x > 0.$$

Определить плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X .

Ответ: $W_1(x) = c\alpha x^{\alpha-1} e^{-c\alpha x}$.

2.44. Функция распределения $F_1(t)$ случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид

$$F_1(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t > 0.$$

Определить: а) плотность вероятности $W_1(t)$; б) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T .

Ответ:

а) $W_1(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}};$

б) $P = e^{-1} \approx 0,368.$

2.45. Напряжения сигнала $u_s(t)$ и гармонической помехи $u_n(t)$ имеют вид

$$u_s(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$u_n(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi),$$

где φ — случайная разность фаз колебаний сигнала и помехи, равномерно распределенная в интервале от $-\pi$ до π .

Определить вероятность того, что амплитуда суммарного колебания меньше половины амплитуды сигнала.

Ответ [19]: 0,16.

2.46. Группа самолетов производит одиночное и независимое бомбометание по железнодорожному мосту, ширина которого равна 10 м. Направление захода — вдоль моста. Прицеливание — по средней линии моста. Вероятное отклонение E при нормальном рассеивании в направлении, перпендикулярном полету, равно 25 м. Систематические ошибки отсутствуют. Каждый самолет сбрасывает одну бомбу. Для разрушения моста достаточно одного попадания.

Сколько следует послать самолетов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным в разрушении моста?

Ответ: $n \geq 21.$

2.47. Самолет производит одиночное бомбометание по колонне войск противника, ширина которой 8 м. Направление полета — вдоль колонны, прицеливание — по средней линии. Вероятное отклонение при нормальном рассеивании в направлении, перпендикулярном полету, равно 10 м. Вследствие скольжения стреляющего самолета имеется систематическая ошибка — центр

рассеивания смещается в направлении, перпендикулярном полету, в среднем на 10 м.

Найти вероятность попадания в колонну.

Ответ: 0,171.

2.48. Производится стрельба ракетами по взлетно-посадочной полосе, ширина которой 100 м, длина практически не ограничена. Прицеливание ведется по средней линии полосы, но из-за наличия ветра средняя точка попадания смещается: вдоль полосы на 200 м и поперек на 50 м. Вероятное отклонение E , характеризующее нормальное рассеивание точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, равно 100 м.

Найти вероятность того, что из трех выстрелов ракетами хотя бы один даст попадание во взлетно-посадочную полосу.

Ответ: 0,578.

2.49. Доказать, что для независимых случайных величин X и Y справедливо равенство

$$F_2(x, y) = F_1(x) F_1(y).$$

2.50. По цели производятся два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна p_1 , при втором — p_2 .

Найти функцию распределения $F_2(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) , где X — число попаданий при первом выстреле, а Y — число попаданий при втором выстреле.

Ответ:

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \quad y \leq 0, \\ (1-p_1)(1-p_2) & \text{при } 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq 1, \\ 1-p_1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \quad y > 1, \\ 1-p_2 & \text{при } x > 1, \quad 0 < y \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1, \quad y > 1. \end{cases}$$

2.51. Система независимых случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) задана плотностями вероятностей $W_1(x_1), W_1(x_2), \dots, W_1(x_n)$.

Вычислить функцию распределения $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этой системы случайных величин.

Ответ:
$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} W_1(y_i) dy_i.$$

2.52. Независимые случайные величины X и Y распределены по нормальному закону с параметрами $m_x = 1, m_y = -3, \sigma_x^2 = 9, \sigma_y^2 = 16$.

Написать выражение для плотности вероятности $w_2(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) .

Ответ:

$$w_2(x, y) = \frac{1}{24\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{18} - \frac{(y+3)^2}{32}}.$$

2.53. Плотность вероятности $w_2(x, y)$ нормального распределения системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид

$$w_2(x, y) = \frac{1}{70\pi} e^{-\frac{(x+3)^2}{50} - \frac{(y-5)^2}{98}}.$$

Найти параметры распределения $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$.

Ответ: $m_x = -3, m_y = 5, \sigma_x = 5, \sigma_y = 7$.

2.54. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерные распределения соответственно в интервалах от 0 до 1 и от -1 до 1.

Определить функцию распределения $F_2(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) .

Ответ:

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \quad y \leq -1, \\ \frac{x(y+1)}{2} & \text{при } 0 < x \leq 1, \quad -1 < y \leq 1, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1, \quad y > 1, \\ \frac{y+1}{2} & \text{при } x > 1, \quad -1 < y \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1, \quad y > 1. \end{cases}$$

2.55. Плотность вероятности $W_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) имеет вид

$$W_2(x, y) = \frac{A}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}.$$

Найти: а) коэффициент A ; б) вероятность P попадания величины (X, Y) в квадрат $-1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$; в) функции распределения $F_2(x, y), F_1(x), F_1(y)$; г) плотности вероятностей $W_1(x)$ и $W_1(y)$ и зависимость случайных величин X и Y .

Ответ:

а) $A = \frac{1}{\pi^2};$

б) $P = 0,125;$

$$в) F_2(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right), \quad F_1(y) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$г) W_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad W_1(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Случайные величины X и Y независимы.

2.56. Функция распределения $F_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением

$$F_2(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Определить: а) плотность вероятности $W_2(x, y)$ системы (X, Y) ; б) плотности вероятностей $W_1(x)$ и $W_1(y)$ и зависимость случайных величин X и Y ; в) вероятность попадания величины (X, Y) в квадрат с вершинами: $A(1, 1)$, $B(0, 1)$, $C(0, 0)$, $D(1, 0)$.

Ответ:

а) $W_2(x, y) = \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y}$;

б) $W_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $W_1(y) = \beta e^{-\beta y}$.

Случайные величины X и Y независимы;

в) $P = (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-\beta})$.

2.57. Плотность вероятности $W_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением

$$W_2(x, y) = \frac{A}{\pi} e^{-x^2 + 6x - y^2 - 2y - 12}.$$

Определить: а) коэффициент A ; б) плотности вероятностей $W_1(x)$ и $W_1(y)$ соответственно величин X и Y ; в) являются ли случайные величины X и Y зависимыми.

Ответ:

а) $A = e^2$;

б) $W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-3)^2}$, $W_1(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y+1)^2}$;

в) случайные величины X и Y независимы.

2.58. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность вероятности

$$W_2(x, y) = A \sin(x + y), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Определить: а) постоянную A , функции распределения $F_2(x, y)$, $F_1(x)$, $F_1(y)$; б) вероятность P выполнения неравенств $x < \frac{\pi}{4}$, $y < \frac{\pi}{4}$.

Ответ:

$$\text{а) } A = 0,5, \quad F_2(x, y) = 0,5 [\sin x + \sin y - \sin(x + y)], \\ F_1(x) = 0,5(1 - \cos x + \sin x), \quad F_1(y) = 0,5(1 - \cos y + \sin y);$$

$$\text{б) } P = P\left(X < \frac{\pi}{4}, \quad Y < \frac{\pi}{4}\right) = 0,207.$$

2.59. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерную плотность вероятности внутри круга C радиуса R :

$$W_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{при } x^2 + y^2 < R^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 \geq R^2. \end{cases}$$

Доказать, что случайные величины X и Y являются зависимыми.

2.60. Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-R^2}} e^{-\frac{x^2 - 2Rxy + y^2}{2(1-R^2)}}.$$

Вычислить плотность вероятности случайной величины X .

Ответ:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2.61. Плотность вероятности $W_2(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$W_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi} & \text{внутри эллипса } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ 0 & \text{вне этого эллипса.} \end{cases}$$

Доказать, что X и Y — зависимые величины.

2.62. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по нормальному закону с плотностью вероятности

$$\omega_2(x, y) = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(x^2 + y^2)}.$$

Требуется: а) найти значение величины h , если известно, что вероятность попадания в круг $x^2 + y^2 \leq R^2$ равна p ; б) определить, при каком значении h вероятность попадания в кольцо $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ будет наибольшей.

Ответ:

$$а) \quad h = \frac{1}{R} \sqrt{\ln \frac{1}{1-p}};$$

$$б) \quad h = \sqrt{\frac{2 \ln \frac{R}{r}}{R^2 - r^2}}.$$

Литература

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
2. Уилкс С. Математическая статистика. Изд-во «Наука», 1967.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
4. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. Изд-во «Наука», 1965.
5. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Изд-во «Наука», 1967.
6. Кендалл М. Дж., Стюарт А. Теория распределений. Изд-во «Наука», 1966.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
8. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. Изд-во «Советское радио», 1962.
9. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
10. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Изд-во «Советское радио», 1965.
11. Farison James. On calculating moments for some common probability laws. IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, 11, № 4.
12. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд-во «Советское радио», 1966.
13. Абезгауз Г. Г., Тронь А. П., Копенкин Ю. Н., Коровина И. А. Справочник по вероятностным расчетам. Воениздат, 1966.
14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1 и 2. Изд-во «Мир», 1967.
15. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
16. Пагурова В. И. Таблицы неполной Г-функции. Изд. ВЦ АН СССР, 1964.
17. Барк Л. С., Большев Л. Н., Кузнецов П. И. Таблицы распределения Релея — Райса. Изд. ВЦ АН СССР, 1964.
18. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин В. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1965.
19. Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. ЛГУ, 1967.
20. Ефимочкина Е. П., Кожевников Н. И. Задачи по теории вероятностей. Изд. МАИ, 1963.

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Теоретические сведения

Во многих практических задачах трудно или даже невозможно полностью определить функцию распределения случайной величины. Иногда в ней и нет необходимости. В таких случаях полное описание случайной величины при помощи закона распределения может быть заменено более грубым, но зато и более простым указанием отдельных параметров (числовых характеристик) этого распределения.

Наиболее важными числовыми характеристиками случайной величины X являются математическое ожидание (среднее значение) m_x и дисперсия σ_x^2 . Вместо m_x используют обозначения $M(X)$, $E(X)$, а вместо σ_x^2 — $D(X)$.

Для дискретной случайной величины X математическое ожидание равно

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3.1)$$

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $W_1(x)$, то

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x) dx. \quad (3.2)$$

Формулы для дисперсии имеют вид

$$\sigma_x^2 = M[(X - m_x)^2] = M(\overset{\circ}{X}^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (3.3)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 W_1(x) dx, \quad (3.4)$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ — центрированная случайная величина, т. е. отклонение случайной величины X от ее математического ожидания.

Обобщением формул (3.1) — (3.4) являются выражения, определяющие математическое ожидание и дисперсию произвольной функции $\varphi(X)$ случайной величины X :

$$M[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i, \quad (3.5)$$

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_1(x) dx, \quad (3.6)$$

$$D[\varphi(X)] = \sum_i [\varphi(x_i) - m_\varphi]^2 p_i, \quad (3.7)$$

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_\varphi]^2 W_1(x) dx, \quad (3.8)$$

где $m_\varphi = M[\varphi(X)]$ — математическое ожидание функции $\varphi(X)$.

Математическое ожидание определяет абсциссу центра тяжести кривой распределения, а дисперсия — разброс случайной величины относительно ее математического ожидания. Рассеивание случайной величины часто характеризуют средним квадратичным отклонением («стандартом») σ_x , которое равно

$$\sigma_x = + \sqrt{\sigma_x^2}. \quad (3.9)$$

Кроме математического ожидания в качестве характеристик положения случайной величины применяются иногда медиана и мода.

Медианой Me (иначе, срединным или вероятным значением) называется такое значение случайной величины X , при котором

$$P(X < Me) = P(X > Me) = \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

Для непрерывной случайной величины X медиана находится из условия

$$F_1(Me) = \frac{1}{2}$$

или

$$\int_{-\infty}^{Me} W_1(x) dx = \int_{Me}^{\infty} W_1(x) dx.$$

Для дискретных случайных величин медиана определяется неоднозначно и практически не употребляется.

Модой M (иначе, наименее вероятным значением) называется такое значение случайной величины X , для которого вероятность

$\dot{P}(X = M)$ или плотность вероятности $\dot{W}_1(M)$ имеют наибольшее значение. Если максимум один, то распределение называется одномодальным (унимодальным), а если несколько — многомодальным (полимодальным, мультимодальным).

При описании непрерывного распределения используют иногда квантили. Квантилем, отвечающим заданному уровню вероятности p , называется такое значение $x = x_p$, при котором функция распределения $F_1(x)$ принимает значение, равное p :

$$F_1(x_p) = p. \quad (3.11)$$

Общими числовыми характеристиками случайной величины являются моменты, которые представляют собой неслучайные величины (числа), характеризующие случайную величину с какой-либо стороны. Характерная особенность их состоит в том, что моменты более низкого порядка несут в себе больше сведений о случайной величине, чем моменты более высокого порядка.

Моментом k -го порядка случайной величины X относительно произвольной точки a называется математическое ожидание величины $(X - a)^k$:

$$m_k(a) = M(X - a)^k. \quad (3.12)$$

Момент, рассматриваемый относительно начала координат ($a = 0$), называется начальным, а относительно математического ожидания ($a = m_x$) — центральным.

В некоторых случаях используются абсолютные и факториальные моменты, которые соответственно определяются формулами:

$$\beta_k(a) = M(|X - a|^k), \quad (3.13)$$

$$m_{[k]}(a) = M([X - a]^{[k]}), \quad (3.14)$$

где $z^{[k]} = z(z-1)(z-2) \dots (z-k+1)$.

Факториальные моменты полезны в двух отношениях. С их помощью можно в более компактном виде записать моменты некоторых дискретных распределений (типа биномиального) и, кроме того, в задачах определенного класса, включающих дискретные случайные величины, часто удобно находить начальные моменты m_k , предварительно вычислив факториальные.

В табл. 3.1 приведены аналитические выражения различных моментов для дискретной и непрерывной случайных величин. Из приведенных данных видно, что математическое ожидание (среднее значение), определяемое формулами (3.1) и (3.2), представляет собой начальный момент первого порядка. Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю, а центральный момент второго порядка представляет собой

Таблица 3.1

Формулы для определения моментов случайных величин

| Наименование момента | Аналитическое выражение момента дискретной случайной величины X | Аналитическое выражение момента непрерывной случайной величины X |
|---|--|--|
| 1. Начальный момент m_k k -го порядка | $m_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i$ | $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_1(x) dx$ |
| 2. Централный момент μ_k k -го порядка | $\mu_k = M(\overset{\circ}{X}^k) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i$ | $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k W_1(x) dx$ |
| 3. Абсолютный начальный момент β_k k -го порядка | $\beta_k = M(X ^k) = \sum_{i=1}^n x_i ^k p_i$ | $\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} x ^k W_1(x) dx$ |
| 4. Абсолютный центральный момент ν_k k -го порядка | $\nu_k = M(\overset{\circ}{X} ^k) = \sum_{i=1}^n x_i - m_x ^k p_i$ | $\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x - m_x ^k W_1(x) dx$ |
| 5. Факториальный начальный момент $m_{[k]}$ k -го порядка | $m_{[k]} = M(X^{[k]}) = \sum_{i=1}^n x_i^{[k]} p_i$ | $m_{[k]} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{[k]} W_1(x) dx$ |
| 6. Факториальный центральный момент $\mu_{[k]}$ k -го порядка | $\mu_{[k]} = M(\overset{\circ}{X}^{[k]}) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^{[k]} p_i$ | $\mu_{[k]} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{[k]} W_1(x) dx$ |

дисперсию. Абсолютные моменты четных порядков совпадают с обычными моментами.

При решении практических задач наиболее часто используются начальный момент первого порядка m_1 (математическое ожидание), начальный момент второго порядка m_2 (средний квадрат случайной величины), центральный момент второго порядка μ_2 (дисперсия), центральные моменты третьего и четвертого порядков, а также абсолютный центральный момент ν_1 первого порядка, называемый средним арифметическим отклонением.

С центральным моментом третьего порядка μ_3 связан коэффициент асимметрии γ_1 , характеризующий «скошенность» распределения, а с центральным моментом четвертого порядка μ_4 — коэффициент эксцесса γ_2 , показывающий «крутость» распределения вероятностей.

Для симметричных относительно математического ожидания распределений все моменты нечетного порядка (если они существуют) равны нулю и асимметрия отсутствует. Эксцесс нормального распределения равен нулю. Если кривая плотности вероятности $W_1(x)$ имеет более острую и высокую вершину по сравнению с нормальным распределением $w(x)$, то эксцесс положителен; если более низкую и пологую — отрицателен.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса определяются соответственно формулами

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (3.15)$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (3.16)$$

Моменты — не единственные постоянные, характеризующие распределение случайной величины. С теоретической точки зрения более полезна другая совокупность постоянных, называемых семиинвариантами (или кумулянтами) κ_k . Отличие их от моментов относительно произвольной точки состоит в том, что все семиинварианты (за исключением первого) инвариантны относительно изменения начала отсчета. Название «семиинварианты» как раз и обусловлено их инвариантными свойствами.

Различные моменты и семиинварианты связаны между собой следующими соотношениями [1—3]:

$$m_k = \sum_{i=0}^k C_k^i \mu_{k-i} m_1^i, \quad (3.17)$$

$$\mu_k = \sum_{i=0}^k C_k^i m_{k-i} (-m_1)^i, \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= \mu_2 + m_1^2, \\ m_3 &= \mu_3 + 3m_1\mu_2 + m_1^3, \\ m_4 &= \mu_4 + 4m_1\mu_3 + 6m_1^2\mu_2 + m_1^4, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= m_2 - m_1^2, \\ \mu_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \\ \mu_4 &= m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{[1]} &= m_1, \\ m_{[2]} &= m_2 - m_1, \\ m_{[3]} &= m_3 - 3m_2 + 2m_1, \\ m_{[4]} &= m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_{[1]}, \\ m_2 &= m_{[2]} + m_{[1]}, \\ m_3 &= m_{[3]} + 3m_{[2]} + m_{[1]}, \\ m_4 &= m_{[4]} + 6m_{[3]} + 7m_{[2]} + m_{[1]}, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= \kappa_2, \\ \mu_3 &= \kappa_3, \\ \mu_4 &= \kappa_4 + 3\kappa_2^2, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_2 &= \mu_2, \\ \kappa_3 &= \mu_3, \\ \kappa_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \kappa_1, \\ m_2 &= \kappa_2 + \kappa_1^2, \\ m_3 &= \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3, \\ m_4 &= \kappa_4 + 4\kappa_1\kappa_3 + 3\kappa_2^2 + 6\kappa_1^2\kappa_2 + \kappa_1^4, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= m_1, \\ \kappa_2 &= m_2 - m_1^2, \\ \kappa_3 &= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3, \\ \kappa_4 &= m_4 - 4m_1 m_3 - 3m_2^2 + 12m_1^2 m_1 - 6m_1^4, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

В формулах (3.21) и (3.22) предполагается, что возможные значения случайной величины отстоят друг от друга на единицу.

В случае аналитического задания закона распределения (в виде формулы) определение моментов сводится к вычислению соответствующих сумм и интегралов (см. табл. 3.1). Расчет моментов упрощается, если воспользоваться аппаратом характеристических функций.

Характеристическая функция $\Theta_1(u)$ определяется как математическое ожидание случайной величины e^{jux} , т. е.

$$\Theta_1(u) = M(e^{jux}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} W_1(x) dx, \quad (3.27)$$

где u — вещественная величина; $j = \sqrt{-1}$.

Используя представление плотности вероятности $W_1(x)$ в виде суммы дельта-функций, формулу (3.27) можно распространить на дискретные случайные величины

$$\Theta_1(u) = \sum_{k=1}^n p_k e^{jux_k}, \quad (3.28)$$

где x_k — возможные значения случайной величины X ; $p_k = p(X = x_k)$ — соответствующие им вероятности.

Плотность вероятности $W_1(x)$ однозначно выражается через характеристическую функцию:

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(u) e^{-iux} du. \quad (3.29)$$

Из (3.27) видно, что при изменении знака у показателя экспоненты, определение характеристической функции совпадает с определением спектральной функции. Поэтому для нахождения $\Theta_1(u)$ по известной плотности $W_1(x)$, или $W_1(x)$ по $\Theta_1(u)$ можно пользоваться таблицами преобразований по Фурье (или по Лапласу с учетом пределов интегрирования).

Для определения моментов m_k случайной величины X нужно вычислить k -ю производную от характеристической функции по параметру u и положить $u = 0$:

$$m_k = \frac{1}{j^k} \left. \frac{d^k \Theta_1(u)}{du^k} \right|_{u=0}. \quad (3.30)$$

Семиинварианты (или кумулянты) κ_k определяются из соотношения

$$\ln \Theta_1(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k. \quad (3.31)$$

Вместо характеристических функций $\Theta_1(u)$ часто используют так называемые производящие функции $\varphi_1(u)$ [1, 3, 4]:

$$\varphi_1(u) = M(e^{ux}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} W_1(x) dx. \quad (3.32)$$

Существенное различие между ними состоит в том, что характеристическая функция существует всегда, а производящая функция — только в случае существования всех моментов.

При решении задач, связанных с совместным изучением нескольких случайных величин, кроме моментов каждой из них в отдельности, пользуются смешанными моментами случайных величин. Так, например, в случае системы двух случайных величин (X, Y) начальный момент $(k_1 + k_2)$ -го порядка определяется как математическое ожидание величины $X^{k_1} Y^{k_2}$:

$$m_{k_1 k_2} = M(X^{k_1} Y^{k_2}). \quad (3.33)$$

При $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$ формула (3.33) дает моменты случайных величин X и Y по отдельности.

В табл. 3.2 приведены формулы для определения различных моментов двумерных случайных величин дискретного и непрерывного типов.

Среди смешанных моментов случайных величин особую роль играет центральный смешанный момент второго порядка μ_{11} , который обычно называется корреляционным моментом (иначе «моментом связи», ковариацией) случайных величин X, Y и обозначается символом K_{xy}

$$\mu_{11} = K_{xy} = M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = M[(X - m_x)(Y - m_y)]. \quad (3.34)$$

Для дискретных случайных величин

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \quad (3.35)$$

где

$$p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j),$$

а для непрерывных

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) W_2(x, y) dx dy. \quad (3.36)$$

Таблица 3.2

Формулы для определения моментов двумерных случайных величин

| Наименование момента | Аналитическое выражение момента двумерной случайной величины (X, Y) дискретного типа | Аналитическое выражение момента двумерной случайной величины (X, Y) непрерывного типа |
|--|---|---|
| 1. Начальный момент m_{k_1, k_2} порядка $k_1 + k_2$ | $m_{k_1, k_2} = M(X^{k_1} Y^{k_2}) = \sum_i \sum_j x_i^{k_1} y_j^{k_2} p_{ij}$ | $m_{k_1, k_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k_1} y^{k_2} W_2(x, y) dx dy$ |
| 2. Централный момент μ_{k_1, k_2} порядка $k_1 + k_2$ | $\begin{aligned} \mu_{k_1, k_2} &= M(\overset{\circ}{X}^{k_1} \overset{\circ}{Y}^{k_2}) = \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^{k_1} (y_j - m_y)^{k_2} p_{ij} \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \mu_{k_1, k_2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{k_1} (y - m_y)^{k_2} \times \\ &\times W_2(x, y) dx dy \end{aligned}$ |
| 3. Абсолютный начальный момент β_{k_1, k_2} порядка $k_1 + k_2$ | $\begin{aligned} \beta_{k_1, k_2} &= M(X ^{k_1} Y ^{k_2}) = \\ &= \sum_i \sum_j x_i ^{k_1} y_j ^{k_2} p_{ij} \end{aligned}$ | $\beta_{k_1, k_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x ^{k_1} y ^{k_2} W_2(x, y) dx dy$ |
| 4. Абсолютный центральный момент ν_{k_1, k_2} порядка $k_1 + k_2$ | $\begin{aligned} \nu_{k_1, k_2} &= M(\overset{\circ}{X} ^{k_1} \overset{\circ}{Y} ^{k_2}) = \\ &= \sum_i \sum_j x_i - m_x ^{k_1} y_j - m_y ^{k_2} p_{ij} \end{aligned}$ | $\nu_{k_1, k_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x - m_x ^{k_1} y - m_y ^{k_2} \times \\ \times W_2(x, y) dx dy$ |
| 5. Факториальный начальный момент $m_{[k_1][k_2]}$ порядка $k_1 + k_2$ | $\begin{aligned} m_{[k_1][k_2]} &= M(X^{[k_1]} Y^{[k_2]}) = \\ &= \sum_i \sum_j x_i^{[k_1]} y_j^{[k_2]} p_{ij} \end{aligned}$ | $m_{[k_1][k_2]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{[k_1]} y^{[k_2]} W_2(x, y) dx dy$ |
| 6. Факториальный центральный момент $\mu_{[k_1][k_2]}$ порядка $k_1 + k_2$ | $\begin{aligned} \mu_{[k_1][k_2]} &= M(\overset{\circ}{X}^{[k_1]} \overset{\circ}{Y}^{[k_2]}) = \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^{[k_1]} (y_j - m_y)^{[k_2]} p_{ij} \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \mu_{[k_1][k_2]} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{[k_1]} (y - m_y)^{[k_2]} \times \\ &\times W_2(x, y) dx dy \end{aligned}$ |

Корреляционный момент K_{xy} представляет собой такую характеристику системы случайных величин, которая описывает, помимо рассеивания величин X и Y , еще и связь между ними. Часто вместо корреляционного момента K_{xy} пользуются безразмерной величиной, называемой коэффициентом корреляции R_{xy} :

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (3.37)$$

где σ_x , σ_y — средние квадратичные значения величин X и Y .

Коэффициент корреляции R_{xy} удовлетворяет условию

$$-1 \leq R_{xy} \leq 1 \quad (3.38)$$

и определяет линейную вероятностную зависимость между случайными величинами.

Если X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$ и $R_{xy} = 0$. Две случайные величины, для которых коэффициент корреляции равен нулю, называются некоррелированными. Независимые величины всегда не коррелированы. Зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Для нормальных случайных величин некоррелированность означает также и независимость.

В некоторых случаях используются условные моменты случайной величины X относительно Y . Для условных математического ожидания и дисперсии случайной величины X относительно Y формулы соответственно имеют вид

$$M(X|y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x|y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx}, \quad (3.39)$$

$$D(X|y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X|y)]^2 W_1(x|y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) dx}. \quad (3.40)$$

При решении задач настоящей главы следует иметь в виду известные соотношения для основных числовых характеристик случайных величин:

1) если C — не случайная величина, то

$$M(C) = C, \quad M(CX) = CM(X); \quad (3.41)$$

2) для любых случайных величин X и Y

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y); \quad (3.42)$$

3) математическое ожидание линейной функции равно

$$M\left(\sum_{i=1}^n a_i X + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i M(X_i) + b, \quad (3.43)$$

где a_i, b — не случайные коэффициенты;

4) для любых X и Y

$$M(XY) = M(X)M(Y) + K_{xy}. \quad (3.44)$$

Если X и Y некоррелированы ($K_{xy} = 0$), то

$$M(XY) = M(X)M(Y); \quad (3.45)$$

5) если C — не случайная величина, то

$$D(C) = 0;$$

6) не случайную величину C можно выносить за знак дисперсии, возводя ее в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X), \quad \sigma(CX) = |C| \sigma(X); \quad (3.46)$$

7) для любых случайных величин X и Y

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K_{xy}. \quad (3.47)$$

Дисперсия суммы (разности) некоррелированных случайных величин ($K_{xy} = 0$) равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y); \quad (3.48)$$

8) дисперсия линейной функции $\sum_{i=1}^n a_i X_i + b$ определяется формулой

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}. \quad (3.49)$$

Если все величины X_1, X_2, \dots, X_n не коррелированы, то

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i); \quad (3.50)$$

9) для независимых случайных величин X и Y дисперсия их произведения равна

$$D(XY) = D(X)D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X). \quad (3.51)$$

В табл. 3.3 приведены выражения для основных числовых характеристик дискретных законов распределения, а в табл. 3.4 — для наиболее распространенных непрерывных законов распределения [1—13].

Таблица 3.3

Основные числовые характеристики дискретных законов распределения

| Наименование закона | Математическое ожидание m | Дисперсия σ^2 | Центральный момент μ_3 , коэффициент асимметрии γ_1 | Центральный момент μ_4 , коэффициент эксцесса γ_2 | Другие соотношения для моментов |
|------------------------|-----------------------------|---------------------------------|---|---|--|
| 1. Гипергеометрический | $n \cdot \frac{M}{N}$ | $\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$ | $\mu_3 = \frac{M(N-M)(N-2M)}{N^3(N-1)(N-2)} \times$ $\times n(N-n)(N-2n);$ $\gamma_1 = \frac{(N-2M)(N-2n)\sqrt{N-1}}{(N-2)\sqrt{M(N-M)n(N-n)}}$ | $\mu_4 = \frac{M(N-M)n(N-n)}{N^4(N-1)(N-2)(N-3)} \times$ $\times \{N^3(N+1) - 6N^2n(N-n) +$ $+ 3M(N-M)[N^2(n-2) -$ $- Nn^2 + 6n(N-n)]\}$ | |
| 2. Биномиальный | np | $npq,$ $q = 1 - p$ | $\mu_3 = npq(q-p);$ $\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ | $\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq);$ $\gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}$ | $\mu_{k+1} = pq \left(nk\psi_{k-1} + \frac{d\mu_k}{dp} \right)$ |

Продолжение табл. 3.3

| Наименование закона | Математические ожидания | Дисперсия σ^2 | Центральный момент μ_3 , коэффициент асимметрии γ_1 | Центральный момент μ_4 , коэффициент эксцесса γ_2 | Другие соотношения для моментов |
|---------------------|-------------------------|----------------------------|--|--|---|
| 3. Пуассона | λ | λ | $\mu_3 = \lambda;$ $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ | $\mu_4 = 3\lambda^2 + \lambda;$ $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$ | $\kappa_k = \lambda;$ $\nu_{k+1} = \lambda k^{\nu_{k-1}} + \lambda \frac{d^{\nu_k}}{d\lambda};$ $m_{k+1} = m_k +$ $+ \lambda \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{n-1} m_{n-i}$ |
| 4. Равномерный | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ | $\mu_3 = 0;$ $\gamma_1 = 0$ | $\mu_4 = \frac{(n^2-1)(3n^2-7)}{240};$ $\gamma_2 = -1,2 + \frac{4}{n^2-1}$ | |
| 5. Полна | λ | $\lambda(1+\alpha\lambda)$ | $\mu_3 = \lambda(1+\alpha\lambda)(1+2\alpha\lambda);$ $\gamma_1 = \frac{1+2\alpha\lambda}{\sqrt{\lambda(1+\alpha\lambda)}}$ | $\mu_4 = 3\alpha^2(2\alpha+1)\lambda^4 +$ $+ 6\alpha(2\alpha+1)\lambda^3 +$ $+ (7\alpha+3)\lambda^2 + \lambda;$ $\gamma_2 = 6\alpha + \frac{1}{\lambda(1+\alpha\lambda)}$ | |

Таблица 3.4

Основные числовые характеристики непрерывных законов распределения

| Наименование закона | Математическое ожидание m | Дисперсия σ^2 | Центральный момент μ_3 , коэффициент асимметрии γ_1 | Центральный момент μ_4 , коэффициент эксцесса γ_2 | Другие соотношения для моментов |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------|--|--|--|
| 1. Равномерный | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\mu_3 = 0;$ $\gamma_1 = 0$ | $\mu_4 = \frac{(b-a)^4}{80};$ $\gamma_2 = -1,2$ | $m_k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)},$ $m_{k+1} = \frac{b^{k+2} - a^{k+2}}{b^{k-1} - a^{k-1}} \frac{k+1}{k+2} m_k$ |
| 2. Нормальный | m | σ^2 | $\mu_3 = 0;$ $\gamma_1 = 0$ | $\mu_4 = 3\sigma^4;$ $\gamma_2 = 0$ | $\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{1}{2} \sigma^2\right)^k,$ $\mu_{2k+1} = 0;$ $m_k = k! \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{m^{k-2i}}{(k-2i)!} \left(\frac{1}{2} \sigma^2\right)^i,$ $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{k}{2}$ |
| 3. Нормальный стандартный | 0 | 1 | $\mu_3 = 0;$ $\gamma_1 = 0$ | $\mu_4 = 3;$ $\gamma_2 = 0$ | $m_{2k} = \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k,$ $m_{2k+1} = \mu_{2k+1} = 0$ |

| Наименование закона | Математическое ожидание m | Дисперсия σ^2 | Центральный момент μ_3 , коэффициент асимметрии γ_1 | Центральный момент μ_4 , коэффициент эксцесса γ_2 | Другие соотношения для моментов |
|-----------------------|--|--|---|---|--|
| 4. Бета-распределение | $\frac{a}{a+b}$ | $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ | | | $m_k = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}$ |
| 5. Релея | $\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ | $\sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ | $\mu_3 = \sigma^3(\pi-3) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\gamma_1 = (\pi-3) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ | $\mu_4 = \sigma^4 \left(8 - \frac{3}{4}\pi^2\right)$; $\gamma_2 = 5 - \frac{3}{4}\pi^2$ | $m_k = (\sigma\sqrt{2})^k \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)$; $\nu_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i m^i m_{k-i}$ |
| 6. Вейбулла | $\frac{1}{c} \times \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}$ | $\frac{1}{c^2} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right]$ | $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ | $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ | $m_k = c^{-\frac{k}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$; $\nu_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i m^i m_{k-i}$ |

| Наименование закона | Математические ожидания данные m | Дисперсия σ^2 | Центральный момент μ_3 , коэффициент асимметрии γ_1 | Центральный момент μ_4 , коэффициент эксцесса γ_2 | Другие соотношения для моментов |
|------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------|---|--|--|
| 7. Лапласа | μ | $\frac{2}{\lambda^2}$ | $\mu_3 = \frac{6}{\lambda^3};$ $\gamma_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $\mu_4 = \frac{24}{\lambda^4};$ $\gamma_2 = 3$ | $m_k = k! \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\mu^{k-2i}}{(k-2i)!} \lambda^{-2i};$ $\mu_{2k} = (2k)! \lambda^{-2k},$ $\mu_{2k+1} = 0$ |
| 8. Экспоненциальный одно-сторонний | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\mu_3 = \frac{2}{\lambda^3};$ $\gamma_1 = 2$ | $\mu_4 = \frac{9}{\lambda^4};$ $\gamma_2 = 6$ | $m_k = k! \lambda^{-k},$ $m_{k+1} = \frac{k+1}{\lambda} m_k$ |
| 9. Гамма-распределение | $(\alpha+1)\beta$ | $(\alpha+1)\beta^2$ | $\mu_3 = 2(\alpha+1)\beta^3;$ $\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}$ | $\mu_4 = 3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4;$ $\gamma_2 = \frac{6}{\alpha+1}$ | $m_{k+1} = (\alpha+k+1)\beta m_k;$ $x_k = (k-1)!(\alpha+1)\beta^k,$ $x_{k+1} = k\beta x_k$ |

§ 2. Примеры

Пример 3.1. Производится стрельба по подвижной цели до первого попадания. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,4. На стрельбу отпущено 4 снаряда.

Определить: а) математическое ожидание m_x случайной величины X — числа израсходованных снарядов; б) дисперсию σ_x^2 и среднее квадратичное значение σ_x величины X .

Решение. Случайная величина X может принять следующие значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Вероятности принятия величиной X этих значений соответственно равны:

$$P(X=1) = p_1 = p = 0,4; \quad P(X=2) = p_2 = (1-p)p = 0,6 \times 0,4 = 0,24; \\ P(X=3) = p_3 = (1-p)^2 p = 0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144; \\ P(X=4) = p_4 = (1-p)^3 p + (1-p)^4 = 0,6^3 \cdot 0,4 + 0,6^4 = 0,216.$$

а) По определению математического ожидания имеем

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,144 + \\ + 4 \cdot 0,216 \approx 2,2 \text{ сн.}$$

б) Для дисперсии получим

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i - m_x)^2 p_i = (1 - 2,2)^2 \cdot 0,4 + (2 - 2,2)^2 \cdot 0,24 + \\ + (3 - 2,2)^2 \cdot 0,144 + (4 - 2,2)^2 \cdot 0,216 \approx 1,38 \text{ сн}^2, \\ \sigma_x = + \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1,38} \approx 1,17 \text{ сн.}$$

Пример 3.2. Случайная величина X распределена по закону Лапласа с плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию величины X .

Решение. Математическое ожидание m_x определяется формулой (3.2)

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\lambda|x|} dx.$$

Так как плотность вероятности $W_1(x)$ имеет разные аналитические выражения при $x < 0$ и $x > 0$, то

$$m_x = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 x e^{\lambda x} dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Сделав в первом интеграле замену переменной $x = -y$, получим

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 ye^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} ye^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Известно [14], что

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}. \quad (3.52)$$

Следовательно,

$$m_x = -\frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} = 0.$$

Поскольку $m_x = 0$, то

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = m_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_1(x) dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 x^2 e^{\lambda x} dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-\lambda y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Но

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^3}.$$

Поэтому

$$\sigma_x^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Пример 3.3. Случайная ошибка измерения дальности импульсным радиодальномером имеет нормальное распределение, причем среднее квадратичное отклонение равно 50 м.

Найти вероятность P того, что измеренное значение дальности будет отличаться по абсолютной величине от истинного не более чем на 30 м, если систематическая ошибка дальномера равна +20 м.

Решение. По условию случайная ошибка распределена по нормальному закону. Следовательно, плотность вероятности $w(x)$ суммарных ошибок имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{50 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{2 \cdot 50^2}}.$$

Измеренное значение дальности по абсолютной величине не превзойдет истинное более чем на 30 м, если выполняется неравенство

$$|X| < 30 \text{ м.}$$

Вероятность P выполнения этого неравенства равна

$$\begin{aligned} P = P(|X| < 30) &= P(-30 \leq X < 30) = \int_{-30}^{30} \omega(x) dx = \Phi\left(\frac{30-20}{50}\right) - \\ &- \Phi\left(\frac{-30-20}{50}\right) = \Phi(0,2) - [1 - \Phi(1)] = 0,5793 - 1 + \\ &+ 0,8413 \approx 0,421, \end{aligned}$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (2.9).

Пример 3.4. Случайная величина X описывается биномиальным законом распределения вероятностей.

Найти математическое ожидание m_y и дисперсию σ_y^2 случайной величины $Y = e^{aX}$.

Решение. Случайная величина X может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$. Вероятность $P_n(k)$ того, что она примет значение k определяется формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Используя формулы (3.5) и (3.7), получим

$$\begin{aligned} m_y &= \sum_k \varphi(x_k) p_k = \sum_{k=0}^n y_k P_n(k) = \\ &= \sum_{k=0}^n e^{ak} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + pe^a)^n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sum_{k=0}^n y_k^2 P_n(k) - m_y^2 = \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{2a})^k q^{n-k} - m_y^2 = \\ &= (q + pe^{2a})^n - (q + pe^a)^{2n}. \end{aligned}$$

Пример 3.5. Случайная величина X подчинена равномерному закону распределения вероятностей в интервале от 0 до 2.

Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = 6X^2$.

Решение. На основании формулы (3.6) имеем

$$m_y = \int_0^2 \varphi(x) W_1(x) dx = \int_0^2 6x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = 3 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = 8.$$

Дисперсию случайной величины Y находим по формуле (3.8)

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \int_0^2 [\varphi(x) - m_y]^2 W_1(x) dx = \int_0^2 (6x^2)^2 \frac{1}{2} dx - m_y^2 = \\ &= 18 \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 - 64 = 51,2.\end{aligned}$$

Пример 3.6. По каналу связи с помехами передается кодовая комбинация, состоящая из двух импульсов. В результате независимого воздействия каждый из импульсов может быть подавлен помехой с вероятностью p .

Определить характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ случайной величины X — числа подавленных помехами импульсов.

Решение. Возможные значения дискретной случайной величины X : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности p_k этих значений соответственно равны $p_1 = (1 - p)^2$; $p_2 = 2p(1 - p)$; $p_3 = p^2$.

Согласно формуле (3.28) имеем

$$\begin{aligned}\Theta_1(u) &= \sum_{k=1}^3 p_k e^{jux_k} = (1 - p)^2 + 2p(1 - p)e^{ju} + p^2 e^{2ju} = \\ &= 1 - 2p + p^2 + 2p e^{ju} - 2p^2 e^{ju} + p^2 e^{2ju} = \\ &= 1 + 2p(e^{ju} - 1) + p^2(e^{ju} - 1)^2 = [1 + p(e^{ju} - 1)]^2.\end{aligned}$$

Пример 3.7. Случайная величина X имеет равномерную плотность вероятности в пределах от $-\frac{\beta}{2}$ до $\frac{\beta}{2}$.

Определить характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ случайной величины X и нарисовать ее график.

Решение. По условию нормировки $W_1(x) \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 1$. Следовательно, $W_1(x) = \frac{1}{\beta}$. Тогда

$$\begin{aligned}\Theta_1(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} W_1(x) dx = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} e^{jux} \frac{1}{\beta} dx = \\ &= \frac{1}{j\beta u} \left(e^{ju \frac{\beta}{2}} - e^{-ju \frac{\beta}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{u\beta}{2}}{\frac{u\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Графики плотности вероятности $W_1(x)$ и соответствующей ей характеристической функции $\Theta_1(u)$ приведены на рис. 3.1.

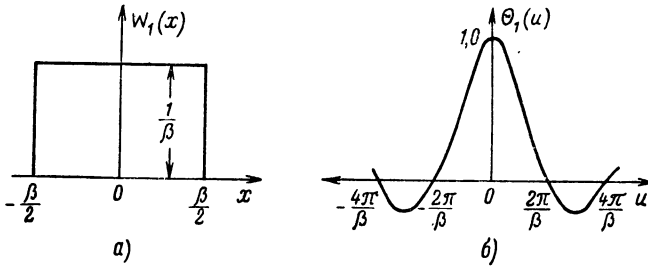


Рис. 3.1. Равномерная плотность [вероятности (а) и соответствующая ей характеристическая функция (б).

Пример 3.8. Найти плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X , характеристическая функция $\Theta_1(u)$ которой имеет вид

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$

Решение. Согласно формуле (3.29) имеем

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(u) e^{-jux} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jux}}{1+u^2} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux - j \sin ux}{1+u^2} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2} du - \\ &- \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ux}{1+u^2} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2} du = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

Пример 3.9. Случайная величина X распределена по закону «хи-квадрат» с плотностью вероятности

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x > 0, n > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Вычислить характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ и начальные моменты m_h величины X .

Решение. Так как плотность вероятности отлична от нуля только при $x > 0$, то

$$\begin{aligned}\Theta_1(u) &= \int_0^{\infty} e^{jux} W_1(x) dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{jux} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2}-ju\right)x} dx.\end{aligned}$$

Воспользовавшись интегралом (3.52), получим

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1+1\right)}{\left(\frac{1}{2}-ju\right)^{\frac{n}{2}-1+1}} = (1-2ju)^{-\frac{n}{2}}.$$

Начальные моменты m_k связаны с характеристической функцией соотношением (3.30):

$$m_k = \frac{1}{j^k} \left. \frac{d^k \Theta_1(u)}{du^k} \right|_{u=0}.$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta_1(u)}{du} &= jn(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-1}, \\ \frac{d^2\Theta_1(u)}{du^2} &= j^2 n(n+2)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-2}, \\ \frac{d^3\Theta_1(u)}{du^3} &= j^3 n(n+2)(n+4)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-3}, \\ \frac{d^4\Theta_1(u)}{du^4} &= j^4 n(n+2)(n+4)(n+6)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-4}, \dots, \\ \frac{d^k\Theta_1(u)}{du^k} &= j^k n(n+2)(n+4)\dots(n+2k-2)(1-2ju)^{-\frac{n}{2}-k}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$m_k = n(n+2)(n+4)\dots(n+2k-2).$$

Пример 3.10. Случайная точка на плоскости распределена по закону, приведенному в таблице.

| | | | |
|-------|-------|------|------|
| | x_i | 0 | 1 |
| y_j | | | |
| -1 | | 0,10 | 0,15 |
| 0 | | 0,15 | 0,25 |
| 1 | | 0,20 | 0,15 |

Найти: а) математические ожидания случайных величин X и Y ; б) дисперсии величин X и Y ; в) корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции R_{xy} .

Решение. Воспользовавшись соответствующими определениями, получим:

$$а) m_x = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^2 x_i p(x_i) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,55 = 0,55,$$

$$m_y = \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^3 y_j p(y_j) = -1 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,40 + 1 \cdot 0,35 = 0,10;$$

$$б) \sigma_x^2 = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^2 (x_i - m_x)^2 p(x_i) = \\ = (0 - 0,55)^2 \cdot 0,45 + (1 - 0,55)^2 \cdot 0,55 = 0,2475,$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i \sum_j (y_j - m_y)^2 p_{ij} = \sum_{j=1}^3 (y_j - m_y)^2 p(y_j) = \\ = (-1 - 0,10)^2 \cdot 0,25 + (0 - 0,10)^2 \cdot 0,40 + (1 - 0,10)^2 \cdot 0,35 = 0,59;$$

$$в) K_{xy} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} = (x_1 - m_x) [(y_1 - m_y) p_{11} + (y_2 - m_y) p_{12} + (y_3 - m_y) p_{13}] + \\ + (x_2 - m_x) [(y_1 - m_y) p_{21} + (y_2 - m_y) p_{22} + (y_3 - m_y) p_{23}] = (0 - 0,55) [(-1 - 0,10) 0,10 + \\ + (0 - 0,10) 0,15 + (1 - 0,10) 0,20] + (1 - 0,55) [(-1 - 0,10) 0,15 + (0 - 0,10) 0,25 + (1 - 0,10) 0,15] = -0,055,$$

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -\frac{0,055}{\sqrt{0,2475} \sqrt{0,59}} \approx -0,144.$$

§ 3. Задачи и ответы

3.1. Какие размерности имеют математическое ожидание m , дисперсия σ^2 и среднее квадратичное отклонение σ ?

3.2. Закон распределения дискретной случайной величины задан рядом распределения

| | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| p_i | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

Найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X .

Ответ: $m_x = 2$; $\sigma_x^2 = 4,8$.

3.3. Определить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 числа приборов X , давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа равна q .

Ответ: $m_x = q$; $\sigma_x^2 = q(1 - q)$.

3.4. Стрельба ведется по наблюдаемой цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5 и от выстрела к выстрелу не меняется.

Вычислить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X — числа попаданий в цель при пяти выстрелах.

Ответ: $m_x = 2,5$; $\sigma_x^2 = 1,25$.

3.5. На вход ограничителя воздействует видеопульс со случайной амплитудой. Вероятность превышения импульсом уровня ограничения равна p .

Рассматривая событие превышения уровня ограничения импульсом как случайную величину X , принимающую значения 1 (превышение) и 0 (непревышение), определить среднее значение и дисперсию величины X . Найти среднее значение и дисперсию числа Y импульсов, превысивших порог, при подаче на вход ограничителя n импульсов.

Ответ: $m_x = p$, $\sigma_x^2 = p(1 - p)$; $m_y = np$, $\sigma_y^2 = np(1 - p)$.

3.6. Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанции другой радиостанцией равна 0,2 при каждой посылке. Позывные передаются каждые 5 сек до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 сек.

Найти среднее число переданных позывных сигналов до установления двухсторонней связи.

Ответ [12]: $m = 8$.

3.7. В партии из 100 изделий имеется 20 бракованных. Из партии выбираются для контроля 5 изделий.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

Ответ: $m = 1$; $\sigma^2 = \frac{76}{99}$.

3.8. Вероятность отыскания малоразмерного объекта в заданном районе в каждом вылете равна p .

Определить математическое ожидание и дисперсию числа произведенных независимых вылетов, которые выполняются до первого обнаружения цели.

Ответ: $m = \frac{1}{p}$; $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

3.9. Производится стрельба по цели до получения k попаданий. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p . Случайная величина X — число необходимых выстрелов.

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

Ответ:

$$m_x = \frac{k}{p}; \quad \sigma_x^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

3.10. В партии из n изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынуженное изделие проверяют.

Найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 числа проверенных изделий.

Ответ: $m_x = \frac{n+1}{2}$; $\sigma_x^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

3.11. Связь с дрейфующей станцией могут поддерживать n радиостанций. Вступает в двухстороннюю связь та из них, которая первой примет позывной дрейфующей станции, причем это событие равновероятно для всех n радиостанций ($p = \frac{1}{n}$). Дрейфующая станция будет устанавливать связь m раз.

Определить: а) вероятность P того, что радиостанция № 1 вступит в двухстороннюю связь k раз; б) математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 числа вступлений в двухстороннюю связь этой радиостанции.

Ответ [12]:

а) $P = C_m^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k}$;

б) $m_x = \frac{m}{n}$; $\sigma_x^2 = \frac{m(n-1)}{n^2}$.

3.12. Найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X , распределенной по закону Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0.$$

Ответ: $m_x = \lambda; \sigma_x^2 = \lambda.$

3.13. Число вызовов на телефонной станции за единицу времени распределено по закону Пуассона. Математическое ожидание числа вызовов за час равно 30.

Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее двух вызовов.

Ответ: 0,09.

3.14. На радиомаяк-ответчик в среднем поступает 15 запросов за 1 час.

Считая число запросов случайной величиной, распределенной по закону Пуассона, определить вероятность того, что за 4 мин: а) поступит ровно 3 запроса; б) поступит хотя бы один запрос.

Ответ: а) 0,0613; б) 0,632.

3.15. Радиостанция передает информацию в течение времени $\tau = 10$ мсек. Работа ее происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой в одну секунду составляет 10^4 . Для срыва передачи достаточно попадания одного импульса помехи в период работы станции.

Считая, что число импульсов помехи, попадающих в данный интервал времени, распределено по закону Пуассона, найти вероятность P срыва передачи информации.

Ответ [13]: $P = P(k > 0, \tau) = 0,09516.$

3.16. Случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P(k) = P(X = k) = P_0 \left(\frac{\lambda}{1 + \alpha \lambda} \right)^k \frac{1 \cdot (1 + \alpha)(1 + 2\alpha) \dots [1 + (k-1)\alpha]}{k!},$$

где

$$P_0 = P(0) = (1 + \alpha \lambda)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \lambda > 0.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию величины X .

Ответ: $m_x = \lambda; \sigma_x^2 = \lambda(1 + \alpha \lambda).$

3.17. Изменение частоты X генератора из-за самопрогрева подчинено распределению, график которого изображен на рис. 3.2.

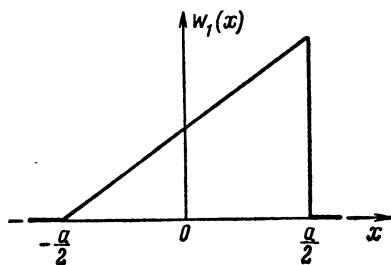


Рис. 3.2. Плотность вероятности.

Определить: а) выражения для плотности вероятности $W_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$; б) математическое ожидание m_x и среднее квадратичное значение случайной величины X .

Ответ:

а)

$$W_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{a}{2}, \\ \frac{2x+a}{a^2} & \text{при } -\frac{a}{2} < x \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{a}{2}; \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{a}{2}, \\ \frac{4x^2 + 4ax + a^2}{4a^2} & \text{при } -\frac{a}{2} < x \leq \frac{a}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

б) $m_x = \frac{a}{6}$, $\sigma_x = \frac{a}{3\sqrt{2}}$.

3.18. Сообщение передается квантованными импульсами с шагом квантования $\Delta = 1\text{в}$.

Предполагая, что ошибка квантования равномерно распределена в пределах интервала квантования и имеет нулевое среднее значение, определить дисперсию σ^2 (мощность) шума квантования.

Ответ:

$$\sigma^2 = \frac{1}{12} \text{в}^2.$$

3.19. Случайная величина X с математическим ожиданием $m_x = 4$ и дисперсией $\sigma_x^2 = 3$ распределена равномерно.

Найти плотность вероятности $W_1(x)$ величины X .

Ответ:

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{при } 1 < x \leq 7, \\ 0 & \text{при } x \leq 1 \text{ и } x > 7. \end{cases}$$

3.20. При измерении напряжения гармонического колебания

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

ламповым вольтметром, проградуированным в эффективных значениях, стрелка вольтметра из-за наличия помех равномерно колеблется между значениями α_1 и α_2 .

Вычислить: а) среднее значение m_α показаний вольтметра; б) относительную погрешность $\Delta = \frac{\sigma_\alpha}{m_\alpha}$ измерения амплитуды напряжения $u(t)$, где σ_α — среднее квадратичное значение.

Ответ:

$$\text{а) } m_\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}; \quad \text{б) } \Delta = \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\sqrt{3}(\alpha_2 + \alpha_1)}.$$

3.21. Время безотказной работы самолетного радиоэлектронного оборудования в полете является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону.

Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десятичасового полета, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 час.

Ответ: 0,951.

3.22. Вероятность того, что станок, работающий в момент t_0 , не остановится до момента $t_0 + t$, определяется формулой

$$P(t) = e^{-\alpha t}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию рабочего периода станка (время между двумя последовательными остановками).

Ответ:

$$m_t = \frac{1}{\alpha}; \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

3.23. Линия длиной l обслуживается ремонтной бригадой, база которой находится у середины линии.

Найти среднее значение и дисперсию расстояния (вдоль линии) от базы до места очередного ремонта, если известно, что последнее с одинаковой вероятностью находится в любой точке линии.

Ответ:

$$m = \frac{l}{4}; \quad \sigma^2 = \frac{l^2}{48}.$$

3.24. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R . Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области.

Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния X точки до центра круга.

Ответ:

$$m_x = \frac{2}{3} R; \quad \sigma_x^2 = \frac{R^2}{18}.$$

3.25. Радиотехническая система состоит из пяти последовательно соединенных устройств, среднее время безотказной работы каждого из которых составляет: $T_1 = 40$, $T_2 = 60$, $T_3 = 100$, $T_4 = 80$, $T_5 = 150$ час. Распределение времени безотказной работы устройств экспоненциальное.

Вычислить: а) среднее время T_0 безотказной работы системы; б) вероятность P безотказной работы системы за время $t = 3$ час.

Ответ: а) $T_0 = 14,1$ час; б) $P = 0,811$.

3.26. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{x^m}{m!} e^{-x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 величины X .

Ответ: $m_x = \sigma_x^2 = m + 1$.

3.27. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

Ответ: $m_x = 0$; $\sigma_x^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

3.28. Мгновенные значения амплитуды X принимаемого сигнала при замираниях описываются распределением Релея

$$W_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Определить среднее значение и дисперсию случайной величины X .

Ответ: $m_x = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sigma_x^2 = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$.

3.29. Случайная величина R (расстояние от точки попадания до центра мишени) распределена по закону вида

$$W_1(r) = \begin{cases} Ar e^{-h^2 r^2} & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r \leq 0. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A ; б) моду M , медиану Me , математическое ожидание m_r и дисперсию σ_r^2 величины R ; в) вероятность P того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше его моды.

Ответ:

а) $A = 2h^2$;

б) $M = \frac{1}{h\sqrt{2}}$, $Me = \frac{\sqrt{\ln 2}}{h}$, $m_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$, $\sigma_r^2 = \frac{4-\pi}{4h^2}$;

в) $P = 0,393$.

3.30. Интенсивность отказов элемента $\lambda(t)$ определяется функцией вида

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{100-t} & \text{при } 0 < t \leq 100 \text{ час}, \\ 0 & \text{при других значениях } t. \end{cases}$$

Определить: а) вероятность P безотказной работы элемента в интервале времени $0-10$ час; б) среднее время T_0 безотказной работы элемента; в) плотность вероятности $W_1(t)$ распределения времени безотказной работы элемента.

Ответ: а) $P = 0,9$; б) $T_0 = 50$ час; в) $W_1(t) = \frac{1}{100}$ при $0 < t \leq 100$ час.

3.31. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

| | | | |
|-------|-----|-----|-----|
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| p_i | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 1 - 2X^2$.

Ответ: $m_y = -2,4$; $\sigma_y^2 = 9,63$.

3.32. Доказать, что математическое ожидание центрированной и нормированной случайной величины

$$\frac{X - m_x}{\sigma_x}$$

равно нулю, а дисперсия — единице.

3.33. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны соответственно m_x и σ_x^2 .

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = -X$.

Ответ: $m_y = -m_x$; $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$.

3.34. Через равные временные интервалы произведено 36 измерений величины тока, при которых получены следующие результаты:

| | | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| Значение тока, <i>ма</i> | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| Число измерений | 3 | 1 | 5 | 4 | 10 | 4 | 5 | 1 | 3 |

Определить среднее значение тока m_i , среднее значение мощности $M(I^2)$ на единичном сопротивлении и дисперсию σ_i^2 .

Ответ: $m_i = 10$ ма; $M(I^2) = 104,5$ ма²; $\sigma_i^2 = 4,5$ ма².

3.35. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, x > 2. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 3X - 1$.

Ответ: $m_y = 3$; $\sigma_y^2 = 2$.

3.36. Случайная величина Φ равномерно распределена в интервале от 0 до 2π .

Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины $A_0 \cos^2(\omega_0 t + \Phi)$, где A_0 , ω_0 , t — неслучайные величины.

Ответ: $m = \frac{A_0}{2}$; $\sigma^2 = \frac{A_0^2}{8}$.

3.37. Случайная величина K дискретного типа распределена по закону Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Показать, что первые моменты этого распределения вероятностей выражаются следующими формулами:

$$m_1 = \mu_2 = \mu_3 = \lambda; \mu_4 = \lambda(1 + 3\lambda).$$

3.38. Доказать справедливость следующего соотношения между центральными μ_k и начальными m_k моментами:

$$\mu_n = \sum_{k=2}^n (-1)^{n-k} C_n^k m_k m_1^{n-k} + (-1)^{n-1} (n-1) (m_1)^n.$$

3.39. Показать, что начальный факториальный момент 4-го порядка $m_{[4]}$ случайной величины X связан с начальными моментами следующим соотношением:

$$m_{[4]} = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1.$$

3.40. Случайная величина X имеет плотность вероятности вида

$$W_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

(экспоненциальный односторонний закон).

Определить: а) функцию распределения $F_1(x)$; б) математическое ожидание m , дисперсию σ^2 , коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 .

Ответ:

$$\text{а) } F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } m = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 6.$$

3.41. Показать, что для распределения Лапласа

$$W_1(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0,$$

справедливы следующие формулы для моментов случайной величины X :

$$m_{2k+1} = 0, \quad m_{2k} = \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{\lambda^{2k}}.$$

3.42. Найти центральные μ_k и центральные абсолютные ν_k моменты случайной величины X , распределенной по нормальному закону

$$\omega(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ответ: При k —нечетном $\mu_k = 0$,

$$\nu_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{k-1}{2}\right)! \sigma^k.$$

При k —четном

$$\mu_k = \nu_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

3.43. Показать, что для одностороннего нормального распределения

$$W_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0,$$

среднее значение и дисперсия соответственно равны

$$m_x = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \sigma_x^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2,$$

а начальный момент k -го порядка определяется формулой

$$m_k = \sigma^k 2^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

3.44. Найти для бета-распределения, задаваемого плотностью вероятности

$$W_1(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

начальный момент k -го порядка.

Ответ:

$$m_k = \frac{\Gamma(a+b) \Gamma(a+k)}{\Gamma(a) \Gamma(a+b+k)}.$$

3.45. Случайная величина X имеет χ -распределение

$$W_1(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0.$$

Показать, что начальные моменты m_k величины X определяются формулой

$$m_k = 2^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

3.46. Случайная величина X подчинена закону Вейбулла, плотность вероятности ее имеет вид

$$W_1(x) = c\alpha x^{\alpha-1} e^{-cx^\alpha}, \quad x > 0, \quad c > 0, \quad \alpha > 0.$$

Показать, что начальные моменты m_k определяются выражением

$$m_k = c^{-\frac{k}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right).$$

3.47. Доказать, что если случайная величина X подчинена гамма-распределению

$$W_1(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0, \quad \alpha > -1, \quad \beta > 0,$$

то характеристическая функция величины X равна

$$\Theta_1(u) = (1 - j\beta u)^{-(\alpha+1)},$$

а начальные моменты m_k вычисляются по формуле

$$m_k = \beta^k \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

3.48. Определить характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ случайной величины X , принимающей: а) одно единственное значение, равное c ; б) с одинаковой вероятностью два значения, равные $\pm c$.

Ответ: а) $\Theta_1(u) = e^{juc}$; б) $\Theta_1(u) = \cos uc$.

3.49. Вероятность появления события A при одном испытании равна p .

Найти характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ числа появлений события A при одном испытании.

Ответ: $\Theta_1(u) = 1 + p(e^{ju} - 1)$.

3.50. В партии из N полупроводников имеется M бракованных. Для проверки качества произведена бесповторная выборка n полупроводников ($M < n < N - M$).

Определить характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ числа бракованных полупроводников, содержащихся в случайной выборке.

Ответ:

$$\Theta_1(u) = \sum_{k=0}^M \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} e^{iuk}.$$

3.51. Доказать, что для биномиального закона распределения вероятностей

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

характеристическая функция $\Theta_1(u)$ имеет вид

$$\Theta_1(u) = [1 + p(e^{iu} - 1)]^n.$$

3.52. Характеристическая функция случайной величины K равна

$$\Theta_1(u) = \frac{e^{iu}(1 - e^{iun})}{n(1 - e^{iu})}.$$

Показать, что K является дискретной случайной величиной с равномерным законом распределения вероятностей:

$$P(k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

3.53. Найти характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ случайной величины, подчиненной закону Пуассона с параметром λ :

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ответ:

$$\Theta_1(u) = e^{\lambda(e^{iu} - 1)}.$$

3.54. Плотность вероятности $W_1(x)$ случайной величины X представляет собой четную функцию.

Доказать, что характеристическая функция $\Theta_1(u)$ величины X вещественна.

3.55. Показать, что если $\Theta_1(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ — характеристическая функция случайной величины X , то плотность вероятности $w(x)$ этой величины равна

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

3.56. Найти плотности вероятности случайных величин, имеющих следующие характеристические функции:

$$\text{а) } \Theta_1(u) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{при } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |u| > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \Theta_1(u) = e^{jx_0 u - h|u|}.$$

Ответ:

$$\text{а) } W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2;$$

$$\text{б) } W_1(x) = \frac{h}{\pi [h^2 + (x - x_0)^2]}.$$

3.57. Показать, что характеристической функции

$$\Theta_1(u) = \cos \frac{\pi u}{2(1-u^2)}$$

соответствует плотность вероятности

$$W_1(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.58. Определить характеристическую функцию $\Theta_1(u)$ случайной величины X , плотность вероятности которой равна

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ответ:

$$\Theta_1(u) = e^{jum - \frac{u^2\sigma^2}{2}}.$$

3.59. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$W_1(x) = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 ax}.$$

Вычислить характеристическую функцию величины X .

Ответ:

$$\Theta_1(u) = \frac{u\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{u\pi}{2a}}.$$

3.60. Определить характеристическую функцию $\Theta_{1Y}(u)$ случайной величины $Y = aX + b$, где a и b — постоянные.

Ответ: $\Theta_{1Y}(u) = \Theta_{1X}(au) e^{jbu}$.

3.61. Доказать, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

3.62. Показать, что если случайные величины X и Y связаны между собой линейной зависимостью

$$Y = a + bX,$$

то коэффициент корреляции $R_{xy} = \pm 1$.

3.63. По одной и той же стартовой позиции противника производится три независимых пуска ракет, причем вероятность попадания в цель одной ракетой равна p . Пусть случайная величина X — число попаданий в цель, а случайная величина Y — число промахов.

Определить математические ожидания, дисперсии случайных величин X и Y , а также корреляционный момент и коэффициент корреляции между ними.

Ответ: $m_x = 3p$; $m_y = 3q$; $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 3pq$; $K_{xy} = -3pq$; $R_{xy} = -1$; $q = 1 - p$.

3.64. Изготавливаемые в цехе втулки сортируются по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями 0,01, 0,02, 0,03 и 0,04 мм и по овальности на четыре группы со значениями 0,002, 0,004, 0,006 и 0,008 мм. Совместное распределение отклонений диаметра (X) и овальности (Y) втулок задано таблицей

| $y_j \backslash x_i$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 |
|----------------------|------|------|------|------|
| 0,002 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,04 |
| 0,004 | 0,03 | 0,24 | 0,15 | 0,06 |
| 0,006 | 0,04 | 0,10 | 0,08 | 0,08 |
| 0,008 | 0,02 | 0,04 | 0,03 | 0,02 |

Найти: а) одномерные законы распределения каждой из величин X и Y ; б) математические ожидания, средние квадратичные отклонения X и Y и коэффициент корреляции между ними.

Ответ [13]:

а) величины X и Y имеют следующие распределения:

| | | | | |
|-------|------|------|------|------|
| x_i | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 |
| p_i | 0,10 | 0,40 | 0,30 | 0,20 |

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_j | 0,002 | 0,004 | 0,006 | 0,008 |
| p_j | 0,11 | 0,48 | 0,30 | 0,11 |

б) $m_x = 0,026$; $m_y = 0,00482$; $\sigma_x \approx 0,0093$; $\sigma_y \approx 0,00159$;
 $R_{xy} \approx 0,141$.

3.65. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

| | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | -2 | -1 | 1 | 2 |
| p_i | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Вычислить коэффициент корреляции R_{xy} , если $Y = X^2$.

Ответ: $R_{xy} = 0$.

3.66. Случайная величина X имеет математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 ; величина Y связана с X соотношением

$$Y = 3X - 2;$$

величина Z , в свою очередь, связана с X соотношением

$$Z = 3 - 4X.$$

Определить: а) корреляционный момент величин Y и Z ; б) коэффициент корреляции Y и Z .

Ответ: а) $K_{yz} = -12\sigma_x^2$; б) $R_{xy} = -1$.

3.67. Система случайных величин (X, Y) имеет следующие характеристики: $m_x = 0$, $m_y = 2$, $\sigma_x^2 = 2$, $\sigma_y^2 = 1$ и коэффициент корреляции $R_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X - 3Y$.

Ответ: $m_z = -6$; $\sigma_z^2 = 29$.

3.68. Написать выражение для нормальной плотности вероятности $\omega_2(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) , если

$$m_x = 0, m_y = 6, \quad \|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{vmatrix}.$$

Ответ:

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{32\pi} e^{-\frac{1}{1,28} \left[\frac{x^2}{16} - \frac{1,2x(y-6)}{20} + \frac{(y-6)^2}{25} \right]}$$

3.69. В радиолокационной системе с разнесенным приемом (рис. 3.3) приемники находятся на таких расстояниях друг от друга, что сигналы X , Y и Z статистически независимы. Законы распре-

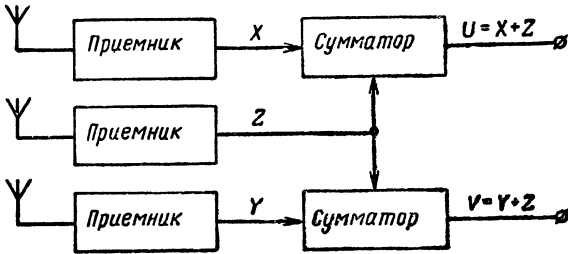


Рис. 3.3. Схема разнесенного приема с тремя приемниками.

деления вероятностей для сигналов X , Y и Z нормальные с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 3$, $\sigma_z^2 = 12$.

Найти коэффициент корреляции для напряжений U и V .

Ответ: $R_{uv} = 0,8$.

3.70. Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) определяется формулой

$$W_2(x, y) = 0,5 \sin(x + y) \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Определить: а) средние значения m_x , m_y и дисперсии σ_x^2 , σ_y^2 случайных величин X и Y ; б) корреляционную $\|K_{ij}\|$ и нормированную $\|R_{ij}\|$ корреляционные матрицы.

Ответ: а) $m_x = m_y = 0,785$; $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0,188$;

$$\text{б) } \|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,188 & -0,046 \\ -0,046 & 0,188 \end{vmatrix}; \quad \|R_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & -0,245 \\ -0,245 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.71. Доказать, что среднее значение квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания m_x меньше, чем среднее значение квадрата ее отклонения от любого другого числа c , т. е.

$$M[(X - m_x)^2] < M[(X - c)^2].$$

3.72. Орудие стреляет по цели, для уничтожения которой достаточно двух попаданий.

Зная, что при одном выстреле орудие попадает в цель с вероятностью p , найти математическое ожидание числа произведенных выстрелов, если известно, что стрельба прекращается сразу после уничтожения цели.

Ответ: $m_x = \frac{2}{p}$.

3.73. Какому условию должны удовлетворять независимые случайные величины X и Y , чтобы $D(XY) = D(X)D(Y)$.

Ответ: $m_x = m_y = 0$.

3.74. Производится n независимых измерений некоторой физической величины. Результат каждого измерения можно рассматривать как случайную величину X_i с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 .

Определить: а) математическое ожидание m_n и дисперсию σ_n^2 среднего арифметического n измерений; б) относительную ошибку $\Delta = \frac{\sigma_n}{m_n}$ в определении среднего арифметического.

Ответ: а) $m_n = m$, $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$;

б) $\Delta = \frac{\sigma_n}{m_n} = \frac{\sigma}{m\sqrt{n}}$.

3.75. Найти математическое ожидание m_{xy} и дисперсию σ_{xy}^2 произведения двух независимых случайных величин X и Y , равномерно распределенных соответственно в промежутках (a, b) и (c, d) .

Ответ:

$$m_{xy} = \frac{a+b}{2} \frac{c+d}{2},$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)}{9} - \frac{(a+b)^2(c+d)^2}{16}.$$

3.76. Для определения площади квадрата измеряют две его стороны с помощью одного и того же инструмента и результаты измерения перемножают.

С какой относительной средней квадратичной ошибкой $\Delta = \frac{\sigma}{m}$ нужно измерять стороны квадрата для того, чтобы средняя квадратичная ошибка площади была не более 1%?

Ответ: $\Delta = 0,71\%$.

3.77. Угол упреждения Y при воздушной стрельбе определяется формулой

$$Y = \frac{U}{v} \sin X,$$

где U — скорость цели; v — скорость полета снаряда; X — курсовой угол цели.

Найти математическое ожидание m_y и среднее квадратичное отклонение σ_y угла упреждения, если X — случайная величина, равномерно распределенная в интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$; U — случайная величина, равномерно распределенная в интервале 600—700 км/час, а $v \approx 1$ км/сек и постоянна (U и X независимы).

Ответ [13]: $m_y = 0,115 \text{ рад}$; $\sigma_y \approx 0,056 \text{ рад}$.

3.78. Индикатор кругового обзора радиолокационной станции представляет собой круг радиусом a . Вследствие помех может появиться пятно с центром в любой точке этого круга.

Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния R центра пятна от центра круга.

Ответ: $m_r = \frac{2}{3} a$; $\sigma_r^2 = \frac{a^2}{18}$.

3.79. Самолет летит прямолинейно и равномерно со скоростью v на постоянной высоте H над землей. В момент времени $t = 0$ производится бомбометание. Пусть плотность вероятности $W_1(t)$ случайного момента T отделения бомбы от самолета имеет вид, представленный на рис. 3.4.

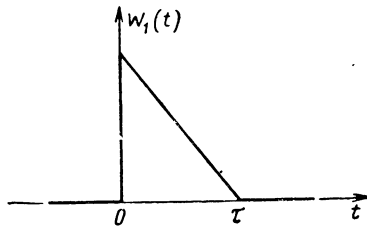


Рис. 3.4. Плотность вероятности.

Найти среднее значение и дисперсию расстояния L от места, над которым самолет находился при $t = 0$, до места падения бомбы. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ:

$$m_l = \frac{v\tau}{3} + v \sqrt{\frac{2H}{g}}; \quad \sigma_l^2 = \frac{v^2\tau^2}{18}.$$

Литература

1. Кендалл М. Дж., Стюарт А. Теория распределений. Изд-во «Наука», 1966.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
3. Fagison James. On calculating moments fore some common[probability laws. IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, 11, № 4.
4. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Изд-во «Наука», 1967.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Гостехиздат, 1954.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
7. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. Изд-во «Советское радио», 1962.
8. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд-во «Советское радио», 1966.
9. Абезгауз Г. Г., Тронь А. П., Копенкин Ю. Н., Коровина И. А. Справочник по вероятностным расчетам. Воениздат, 1966.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во «Мир», 1964.
11. Уилкс С. Математическая статистика. Изд-во «Наука», 1967.
12. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1965.
13. Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. ЛГУ, 1967.
14. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Гостехиздат, 1953.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

§ 1. Теоретические сведения

Теория массового обслуживания (иногда теория очередей) исследует количественную сторону процессов в системах массового обслуживания (СМО). Она устанавливает зависимость между характером потока заявок (требований), производительностью отдельного канала (обслуживающего аппарата), числом каналов и эффективностью обслуживания.

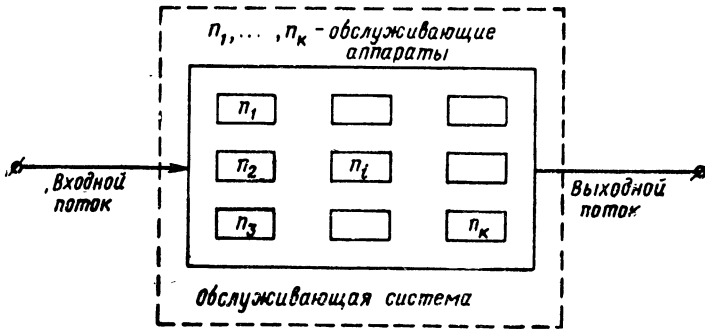


Рис. 4.1. Схематическое изображение системы массового обслуживания.

Система массового обслуживания включает в себя три элемента (рис. 4.1): входной поток, обслуживающую систему с одним или несколькими обслуживающими аппаратами и выходной поток.

В настоящее время хорошо разработаны две системы обслуживания: система с отказами (иначе СМО с потерями) и система с ожиданием. В системе первого типа заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (происходит потеря заявки). В системе с ожиданием заявка, поступившая в систему и заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, когда все поступившие ранее заявки будут обслужены.

Для практики наибольший интерес представляют системы смешанного типа [1], когда на ожидание накладываются различные дополнительные условия, как, например, ограничение времени ожидания в очереди, или общего времени пребывания в системе, или ограничения числа заявок в очереди.

В зависимости от условий задачи и целей исследования количественными оценками качества функционирования СМО могут служить: средний процент заявок, получающих отказ и покидающих систему необслуженными; среднее время ожидания начала обслуживания; средняя длина очереди и ее распределение и т. д.

Так как в общем случае моменты поступления заявок, время их обслуживания являются случайными, то анализ СМО производится вероятностными методами. Случайные процессы, протекающие в системах массового обслуживания, как правило, представляют собой процессы с непрерывным временем, что связано со случайностью потока заявок. Поток заявок (входной поток) — основной фактор, определяющий процессы в СМО. В подавляющем большинстве случаев рассматривается простейший (или стационарный пуассоновский) поток, т. е. такой поток, который обладает тремя специальными свойствами: стационарностью, отсутствием последствия и ординарностью [1—3].

Для простейшего потока число заявок в промежутке времени τ распределено по закону Пуассона

$$P(k, \tau) = \frac{(\nu\tau)^k}{k!} e^{-\nu\tau}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

где ν — плотность (интенсивность) потока (среднее число событий в потоке за единицу времени); $\lambda = \nu\tau$ — среднее число событий в потоке, приходящееся на интервал длительностью τ .

В частности, вероятность $P(0, \tau)$ того, что за время τ не поступит ни одной заявки, равна

$$P(0, \tau) = e^{-\nu\tau}. \quad (4.2)$$

Пусть случайная величина T — промежуток времени между произвольными двумя соседними заявками в простейшем потоке. Тогда функция распределения $F_1(t)$, плотность вероятности $W_1(t)$, математическое ожидание m_t и дисперсия σ_t^2 величины T определяются формулами:

$$F_1(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\nu t}, \quad (4.3)$$

$$W_1(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad (4.4)$$

$$m_t = \frac{1}{\nu}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\nu^2}. \quad (4.6)$$

В случае нестационарного пуассоновского потока число заявок, поступающих за интервал времени τ , начинающийся в точке t_0 , равно

$$P(k, \tau, t_0) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (4.7)$$

где λ — математическое ожидание числа заявок на участке от t_0 до $t_0 + \tau$:

$$\lambda = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t) dt. \quad (4.8)$$

Здесь $v(t)$ — мгновенная плотность потока.

Функция распределения и плотность вероятности промежутка времени T между соседними заявками соответственно определяются выражениями

$$F_1(t, t_0) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} v(t) dt}, \quad (4.9)$$

$$W_1(t, t_0) = v(t_0+t) e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} v(t) dt}, \quad t > 0. \quad (4.10)$$

Выходные потоки систем массового обслуживания часто представляют собой так называемые потоки с ограниченным последствием (или потоки Пальма). Ординарный поток однородных событий является потоком с ограниченным последствием, если промежутки времени между последовательными событиями T_1, T_2, \dots представляют собой независимые случайные величины. Простейший поток, в котором независимые случайные величины T_1, T_2, \dots распределены по показательному закону, является частным случаем потока Пальма. Если все функции распределения $F_1(t_i)$, за исключением, быть может, $F_1(t_1)$, совпадают, то поток Пальма образует поток восстановления [2, 4, 5].

Примером потоков с ограниченным последствием являются потоки Эрланга, которые образуются «просеиванием» простейшего потока [1].

Плотность вероятности закона Эрланга k -го порядка имеет вид

$$W_1(t) = \frac{v^{k+1}}{\Gamma(k+1)} t^k e^{-vt}, \quad t > 0, \quad (4.11)$$

где $T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i$ — интервал времени между соседними событиями в потоке Эрланга k -го порядка; T_1, T_2, \dots, T_{k+1} — независимые случайные величины, плотностей вероятностей которых одинаковы

$$W_1(t_i) = v e^{-vt_i}, \quad t_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k+1.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины T с плотностью вероятности (4.11) соответственно равны

$$m_t = \frac{k+1}{\nu}, \quad (4.12)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{k+1}{\nu^2}, \quad (4.13)$$

где ν — плотность простейшего потока.

В целях упрощения часто бывает удобно заменить реальный поток заявок с последствием так называемым нормированным потоком Эрланга k -го порядка с примерно теми же математическим ожиданием и дисперсией промежутка между заявками [1]. Плотность вероятности нормированной случайной величины \tilde{T} , распределенной по такому закону, имеет вид

$$\tilde{W}_1(t) = \frac{\nu^{k+1}}{\Gamma(k+1)} (k+1)^{k+1} t^k e^{-\nu(k+1)t}, \quad t > 0, \quad (4.14)$$

где

$$\tilde{T} = \frac{T}{k+1}. \quad (4.15)$$

Математическое ожидание \tilde{m}_t и дисперсия $\tilde{\sigma}_t^2$ величины T равны

$$\tilde{m}_t = \frac{1}{\nu}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{1}{\nu^2(k+1)}, \quad (4.17)$$

где ν — плотность потока, совпадающая при любом k с плотностью исходного простейшего потока заявок.

Функционирование СМО во многом определяется временем обслуживания одной заявки $T_{об}$, которое характеризует пропускную способность системы. В общем случае $T_{об}$ — случайная величина.

При теоретических исследованиях и практических расчетах чаще всего предполагается, что величина $T_{об}$ распределена по показательному закону, когда функция распределения и плотность вероятности определяются соответственно выражениями

$$F_1(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (4.18)$$

$$W_1(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad (4.19)$$

где параметр μ — величина, обратная среднему времени обслуживания одной заявки:

$$\mu = \frac{1}{m_{t_{об}}}, \quad m_{t_{об}} = M(T_{об}). \quad (4.20)$$

При показательном распределении времени обслуживания задача допускает простое решение, которое с удовлетворительной для практики точностью описывает ход процесса в СМО.

Пусть имеется СМО с n обслуживающими аппаратами (n -канальная система), на вход которой поступает простейший поток заявок с плотностью ν . Время обслуживания одной заявки одним аппаратом подчинено показательному закону с параметром μ .

В этом случае основные характеристики эффективности функционирования СМО с отказами (потерями) определяются следующими выражениями.

1. Вероятность P_k того, что в системе занято k обслуживающих аппаратов (в обслуживающей системе находится точно k заявок):

$$P_k = P_n(k) = \frac{P_0}{k!} \left(\frac{\nu}{\mu} \right)^k = \frac{P_0}{k!} \alpha^k, \quad (4.21)$$

где P_0 — вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\nu}{\mu} \right)^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}; \quad (4.22)$$

α — среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки (приведенная плотность потока заявок [1]):

$$\alpha = \frac{\nu}{\mu} = \nu m_{t_{об}}. \quad (4.23)$$

Подставив (4.22) в (4.21), получим

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}. \quad (4.24)$$

Формула (4.24) называется формулой Эрланга.

2. Вероятность $P_{отк}$ отказа очередной заявке в обслуживании:

$$P_{отк} = P_n = \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{\nu}{\mu} \right)^n}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\nu}{\mu} \right)^k} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}. \quad (4.25)$$

3. Среднее число занятых обслуживающих аппаратов

$$m_k = M(K) = \sum_{k=1}^n k P_k = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{(k-1)!} P_0. \quad (4.26)$$

Система массового обслуживания с ожиданием при ограниченном времени ожидания $T_{ож}$, распределенном по показательному закону с параметром γ , в установившемся режиме обслуживания описывается следующими выражениями [1] .

1. Вероятность P_k того, что занято точно k обслуживающих аппаратов (очереди нет):

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \quad 0 < k \leq n. \quad (4.27)$$

2. Вероятность P_{n+s} того, что все n аппаратов заняты, s заявок стоят в очереди:

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!}}{s \prod_{m=1}^s (n+m\beta)} P_0, \quad s \geq 1. \quad (4.28)$$

3. Вероятность P_0 того, что все аппараты свободны:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}. \quad (4.29)$$

4. Средняя длина очереди m_s :

$$m_s = M(S) = \sum_{s=1}^{\infty} s P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}. \quad (4.30)$$

5. Вероятность P_H того, что заявка покинет систему необслуженной:

$$P_H = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}. \quad (4.31)$$

В формулах (4.27) — (4.31) n — число обслуживающих аппаратов в системе,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\nu}{\mu} = \nu m_{т\text{об}}, \\ \beta &= \frac{\gamma}{\mu} = \gamma m_{т\text{ож}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.31a)$$

где ν — плотность простейшего потока заявок; μ — параметр показательного времени обслуживания; $\gamma = 1/m_{т\text{ож}}$ — параметр показательного времени ожидания (величина, обратная среднему сроку ожидания).

При $\beta \rightarrow \infty$ система переходит в СМО с отказами, а при $\beta \rightarrow 0$ — в «чистую» систему с ожиданием, когда заявки вообще не уходят из очереди. Каждая из заявок рано или поздно будет обслужена.

В последней системе предельный стационарный режим существует только при $\alpha < n$. При $\alpha \geq n$ число заявок в очереди с течением времени неограниченно возрастает.

Для СМО с неограниченным временем ожидания при $\alpha < n$ справедливы формулы:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad (4.32)$$

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.33)$$

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad (4.34)$$

$$m_s = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \quad (4.35)$$

Если имеется СМО с ожиданием и на длину очереди наложено ограничение, то при простейшем потоке заявок и показательном распределении времени обслуживания формулы для P_k и P_{n+s} соответственно имеют вид:

$$P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad (4.36)$$

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad (4.37)$$

где m — число заявок, которым ограничена очередь.

§ 2. Примеры

Пример 4.1. В контрольно-поверочную лабораторию поступает пуассоновский поток измерительных приборов с плотностью 4 прибора в час.

Определить: а) вероятность того, что за час в лабораторию поступит k приборов, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; б) вероятность того, что за время проверки прибора, на которую в среднем затрачивается 30 мин, в лабораторию поступит не менее трех приборов.

Решение. По условию задачи поток приборов, поступающих в контрольно-измерительную лабораторию, пуассоновский. Поэтому вероятность того, что за время τ в лабораторию поступит ровно k приборов, определяется формулой (4.1):

$$P(k, \tau) = \frac{(v\tau)^k}{k!} e^{-v\tau}.$$

а) В данном случае $v = 4$, $\tau = 1$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Воспользовавшись таблицей (см. приложение IV), получим:

$$P(0,1) = \frac{1}{1} e^{-4} \approx 0,0183; \quad P(1,1) = \frac{4}{1!} e^{-4} \approx 0,0733;$$

$$P(2,1) \approx 0,147; \quad P(3,1) \approx 0,195; \quad P(4,1) \approx 0,195;$$

$$P(5,1) \approx 0,156; \quad P(6,1) \approx 0,104; \quad P(7,1) \approx 0,0595.$$

б)

$$P\left(k \geq 3, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=3}^{\infty} P\left(k, \frac{1}{2}\right) = 1 - \sum_{k=0}^2 P\left(k, \frac{1}{2}\right).$$

Найдя по таблице (см. приложение V) значение суммы

$$\sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

получим

$$\sum_{k=0}^2 P\left(k, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0,677,$$

где

$$\lambda = \nu\tau = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Следовательно,

$$P\left(k \geq 3, \frac{1}{2}\right) = 0,323.$$

Пример 4.2. На вход системы обслуживания поступает простейший поток заявок с плотностью $\nu = 4$ заявки в час. Время обслуживания распределено по показательному закону, причем среднее время обслуживания одной заявки $m_{t_{об}} = 15$ мин.

Определить: а) необходимое количество обслуживающих аппаратов, чтобы вероятность отказа в обслуживании заявки не превышала 0,01; б) среднее число занятых аппаратов; в) вероятность $P(k \geq 3)$ того, что будет занято не менее трех аппаратов.

Решение. Имеем

$$\mu = \frac{1}{m_{t_{об}}} = \frac{1}{0,25} = 4, \quad \alpha = \frac{\nu}{\mu} = 1.$$

а) По формуле (4.25) вероятность отказа в обслуживании равна

$$P_{отк} = \frac{\alpha^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \right]^{-1} = \frac{1}{n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}.$$

Необходимо найти такое число n , чтобы вероятность $P_{отк}$ не превосходила 0,01.

При $n = 4$ имеем

$$P_{отк} = \frac{1}{4! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right)} \approx 0,0154,$$

при $n = 5$ получим

$$P_{отк} = \frac{1}{5! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right)} \approx 0,00306.$$

Таким образом, чтобы выполнить условие $P_{отк} \leq 0,01$ необходимо иметь 5 обслуживающих аппаратов.

б) Согласно (4.26) имеем

$$m_k = P_0 \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = 0,368 \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(k-1)!} =$$

$$= 0,368 \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \approx 0,996.$$

в)

$$P(k \geq 3) = P_3 + P_4 + P_5,$$

$$P_3 = \frac{\alpha^3}{3!} P_0 = \frac{1}{3!} 0,368 = 0,0614,$$

$$P_4 = 0,0153, \quad P_5 = 0,00306.$$

Следовательно,

$$P(k \geq 3) = 0,0798.$$

Пример 4.3. Для уничтожения вновь обнаруживаемых воздушной разведкой наземных целей выделен наряд из пяти батарей. Число обслуживаемых целей представляет собой простейший поток с плотностью $\nu = 8$. Время обслуживания подчинено показательному закону. Среднее время обработки одной батареей одной цели $m_{тоб} = 30$ мин.

Определить: а) наличие установившегося режима работы СМО; б) вероятность того, что при поступлении очередной заявки на обстрел все пять батарей будут свободными; в) среднюю длину очереди.

Решение: а) По условию $m_{тоб} = 30$ мин. Следовательно,

$$\mu = \frac{1}{m_{тоб}} = 2, \quad \alpha = \frac{\nu}{\mu} = 4.$$

Так как $\alpha < n$, то установившийся режим существует.

б) По формуле (4.32) находим

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^5 \frac{4^k}{k!} + \frac{4^6}{5!(5-4)}} = \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!}} = 0,0129.$$

в) Используя формулу (4.35), получим

$$m_s = \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2} P_0 = \frac{4^6}{5 \cdot 5! \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} 0,0129 = 2,2.$$

Пример 4.4 [1]. На станцию текущего ремонта автомашин поступает простейший поток заявок с плотностью $\nu = 0,5$ машины в час. Имеется одно помещение для ремонта. Во дворе станции могут одновременно находиться, ожидая очереди, не более трех машин. Среднее время ремонта одной машины $m_{тоб} = 2$ час.

Определить: а) пропускную способность системы; б) среднее время простоя станции; в) насколько изменятся эти характеристики, если оборудовать второе помещение для ремонта.

Решение. Имеем $\nu = 0,5$; $\mu = 0,5$; $\alpha = 1$; $m = 3$.

а) По формуле (4.37), полагая $n = 1$, находим вероятность того, что пришедшая заявка покинет систему необслуженной:

$$P_{\text{н}} = P_{1+3} = \frac{1}{1+1+3} = 0,20.$$

Относительная пропускная способность системы

$$q = 1 - P_{\text{н}} = 0,8.$$

Абсолютная пропускная способность

$$Q = \nu q = 0,4 \text{ машины в час.}$$

б) Среднюю долю времени, которое система будет простаивать, найдем по формуле (4.36):

$$P_0 = \frac{1}{5} = 0,20.$$

в) Полагая $n = 2$, найдем

$$P_{\text{н}} = P_{2+3} = \frac{\frac{1}{16}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} = \frac{1}{47} = 0,021,$$

$$q = 1 - P_{\text{н}} = 0,979,$$

т. е. удовлетворяться будет около 98% всех заявок,

$$Q = \nu q = 0,49 \text{ машины в час.}$$

Относительное время простоя

$$P_0 = \frac{16}{47} = 0,34,$$

т. е. оборудование будет простаивать полностью около 34% всего времени.

§ 3. Задачи и ответы

4.1. Число самолетов, пролетающих через данную зону, образует простейший поток с плотностью два самолета в минуту.

Определить закон распределения вероятностей числа пролетающих через зону самолетов в минуту и изобразить его график.

Ответ:

| | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-----|
| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| $P(k, 1)$ | 0,135 | 0,271 | 0,271 | 0,180 | 0,0902 | 0,0361 | ... |

4.2. Написать дифференциальное уравнение для вероятности $P(0, t)$ безотказной работы прибора до момента $t_0 + t$, если он работал безотказно в момент t_0 и если число отказов прибора образует простейший поток с интенсивностью ν .

Ответ:

$$\frac{d}{dt}P(0, t) = -\nu P(0, t).$$

4.3. На систему массового обслуживания поступает простейший поток заявок с плотностью ν .

Требуется: а) определить, при каком значении t вероятность поступления в СМО точно k заявок за интервал времени t достигает наибольшего значения; б) построить зависимость $P(k, t)$ при $\nu = 1$ и $k = 0, 1, 2, 3$.

Ответ:

$$t = \frac{k}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4.4. Поток отказов радиотехнической системы является простейшим с интенсивностью 0,02 отказа в час.

Найти вероятность того, что за 10 час работы в системе: а) не появится ни одного отказа; б) появится хотя бы один отказ; в) появится один, два, три отказа.

Ответ: а) $P(0,10) = 0,819$; б) $P(k \geq 1,10) = 0,181$; в) $P(1,10) = 0,164$; $P(2,10) = 0,0164$; $P(3,10) = 0,00109$.

4.5. Число элементарных частиц, попадающих в аппаратурный отсек космической ракеты за время ее полета t , представляет собой простейший поток с плотностью ν . Условная вероятность для каждой из частиц попасть в уязвимый блок равна p .

Определить вероятность попадания в уязвимый блок: а) ровно k частиц; б) хотя бы одной частицы.

Ответ [6]:

$$\text{а) } P(k, t) = \frac{(\nu t p)^k}{k!} e^{-\nu t p},$$

$$\text{б) } P(k \geq 1, t) = 1 - e^{-\nu t p}.$$

4.6. Опыт показал, что в электронной вычислительной машине происходит в среднем одна ошибка за 10 час работы, а поток ошибок можно считать простейшим.

Вычислить вероятности правильного решения задачи на машине, если продолжительность решения составляет: а) 1 час, б) 10 час.

Ответ: а) 0,095; б) 0,632.

4.7. На вход обслуживающей системы поступает простейший поток заявок с плотностью ν . Случайная величина T — промежуток времени между смежными заявками.

Доказать, что функция распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсия величины T определяются формулами:

$$F_1(t) = 1 - e^{-\nu t}, \quad W_1(t) = \nu e^{-\nu t},$$
$$m_t = \frac{1}{\nu}, \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{\nu^2}.$$

4.8. Число отказов радиотехнической системы представляет собой простейший поток с интенсивностью 0,005 ^{1/час}.

Вычислить: а) вероятность безотказной работы системы за $t = 20$ час; б) математическое ожидание и дисперсию времени безотказной работы системы.

Ответ: а) $P(0, t) = 0,905$; б) $m_t = 200$ час; $\sigma_t^2 = 4 \cdot 10^4$ час².

4.9. Показать, что поток заявок, у которого интервалы T между заявками взаимно независимы и распределены по одному и тому же показательному закону

$$W_1(t) = \nu e^{-\nu t},$$

является пуассоновским.

4.10. Проектируемое радиотехническое устройство должно включать три последовательно соединенных блока. Расчеты показали, что интенсивности отказов первого и второго блоков составят $\nu_1 = 0,008$ ^{1/час} и $\nu_2 = 0,032$ ^{1/час} соответственно. Время безотказной работы каждого из блоков распределено по показательному закону.

Определить необходимую величину интенсивности отказов третьего блока, чтобы вероятность безотказной работы устройства в течение времени $t = 1$ час равнялась 0,95.

Ответ: $\nu_3 = 0,0113$ ^{1/час}.

4.11. Показать, что для нестационарного пуассоновского потока заявок функция распределения и плотность вероятности случайной величины T (интервал времени между соседними заявками) имеют вид:

$$F_1(t, t_0) = 1 - \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_0+t} v(t) dt \right\},$$

$$W_1(t, t_0) = v(t_0 + t) \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_0+t} v(t) dt \right\},$$

где t_0 — параметр распределения — момент появления первой из двух соседних заявок.

4.12. Мгновенная плотность $v(t)$ нестационарного пуассоновского входного потока заявок представляет собой линейную функцию времени

$$v(t) = a + bt.$$

Определить плотность вероятности случайной величины T — промежутка времени между соседними заявками.

Ответ [1]:

$$W_1(t, t_0) = [a + b(t_0 + t)] \exp \left(-at - bt_0 t - \frac{bt^2}{2} \right).$$

4.13. Нестационарный пуассоновский поток вызовов на телефонную станцию имеет мгновенную плотность вида

$$v(t) = v(1 - \cos 2at).$$

Найти среднюю плотность потока вызовов за промежуток времени от t_0 до $t_0 + t$.

Ответ [2]:

$$v(t, t_0) = v \left[1 - \frac{\sin a(t-t_0)}{a(t-t_0)} \cos a(t+t_0) \right].$$

4.14. На вход обслуживающей системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью v и интервалами между заявками $T_1, T_2, \dots, T_k, T_{k+1}, \dots$, которые являются независимыми случайными величинами.

Показать, что плотность вероятности интервала $T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i$ определяется выражением

$$W_1(t) = \frac{v^{k+1}}{\Gamma(k+1)} t^k e^{-vt}, \quad t > 0.$$

4.15. Доказать, что при показательном законе распределения времени обслуживания распределение длительности оставшейся части работы по обслуживанию не зависит от того, сколько оно уже продолжалось.

4.16. В результате анализа системы массового обслуживания установлено, что функцию распределения $F_1(t)$ времени обслуживания $T_{об}$ можно описать выражением

$$F_1(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2},$$

где t — время в минутах.

Определить: а) вероятность P_1 того, что время обслуживания заявки не превзойдет 5 мин; б) среднее время обслуживания одной заявки; в) вероятность P_2 того, что за это время обслуживание очередной заявки будет закончено.

Ответ: а) $P_1 = 0,972$; б) $m_{t_{об}} = 1$ мин; в) $P_2 = 0,75$.

4.17. Группа из n самолетов производит поиск малоразмерного объекта. Каждый самолет действует независимо от других. Поиск прекращается, как только объект будет обнаружен одним из самолетов.

Пусть закон распределения времени поиска каждым самолетом — показательный, причем среднее время поиска для каждого самолета соответственно равно $1/\mu_1, 1/\mu_2, \dots, 1/\mu_n$. Показать, что: а) функция распределения времени поиска всеми n самолетами имеет вид

$$F_1(t) = 1 - \exp\{-(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)t\};$$

б) математическое ожидание и дисперсия времени поиска при $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$ соответственно равны

$$m_{t_{об}} = \frac{1}{n\mu}, \quad \sigma_{t_{об}}^2 = \frac{1}{(n\mu)^2}.$$

4.18. В счетчике Гейгера — Мюллера для подсчета космических частиц частица, попавшая в счетчик, вызывает разряд, длящийся время τ (τ постоянно). Попавшие в этот промежуток времени в счетчик новые частицы счетчиком не регистрируются.

Считая, что распределение числа частиц, попавших в счетчик, подчиняется закону Пуассона, найти вероятность того, что счетчик за время $t > 0$ сосчитает все попавшие в него частицы.

Ответ [7]:

$$P(t) = e^{-\nu t} \left[1 + \sum_{k=0}^n \frac{\nu^{k+1} (t - k\tau)^{k+1}}{(k+1)!} \right],$$

где ν — среднее число частиц, попавших в счетчик за единицу времени.

4.19. В автопарк, рассчитанный на n мест, прибывает простейший поток машин с интенсивностью ν до тех пор, пока имеются свободные места.

Найти дифференциальные уравнения для вероятностей $P_k(t)$ того, что ровно k мест заняты.

Ответ [8]:

$$\frac{d}{dt} P_k(t) = -(\nu + k\mu) P_k(t) + \nu P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t),$$

$$1 \leq k \leq n-1;$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -n\mu P_n(t) + \nu P_{n-1}(t).$$

4.20. Сколько оборонительных комплексов n должна иметь оборонительная система, чтобы вероятность ее прорыва противником не превышала 0,02, если на данном направлении действует простейший поток целей противника с плотностью $\nu = 4$, время обстрела одной цели одним оборонительным комплексом распределено по показательному закону с параметром $\mu = 2$, а вероятность поражения цели при одном выстреле (залпе) равна единице.

Ответ: $n = 6$.

4.21. На станции n телефонов-автоматов, обслуживающих в среднем N человек. Вероятности одновременного разговора k человек распределены по закону Пуассона

$$P(k, \tau) = \frac{(\nu\tau)^k}{k!} e^{-\nu\tau}.$$

Найти среднее значение числа лиц, стоящих в очередях к автоматам.

Ответ:

$$m = \sum_{k=n+1}^N (k-n) \frac{(\nu\tau)^k}{k!} e^{-\nu\tau} =$$

$$= P(n, \tau) \left[\frac{\nu\tau}{n+1} + \frac{2(\nu\tau)^2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{(N-n)(\nu\tau)^{N-n}}{(n+1)(n+2)\dots N} \right],$$

где

$$P(n, \tau) = \frac{(\nu\tau)^n}{n!} e^{-\nu\tau}.$$

4.22. Узел связи обслуживает 1 000 абонентов, каждый из которых в среднем занимает линию связи в течение 6 минут за час.

Какое число каналов n надо иметь, чтобы исключить длительные ожидания (вероятность того, что максимальное число одновременно поступивших вызовов превысит число каналов, не должна превышать 0,3%)?

Ответ: $n = 128$.

4.23. Покупатели приходят в магазин случайно и независимо друг от друга, причем число покупателей, приходящих в магазин в течение единицы времени, подчиняется закону Пуассона со средним m ($0 < m < 1$). Покупатели обслуживаются одним продавцом, который не может заниматься одновременно более чем с одним покупателем. Время обслуживания каждого покупателя — единица времени. Если в магазине окажется более одного покупателя, образуется очередь.

Определить: а) производящую функцию $\varphi(u)$ распределения вероятностей длины очереди s и с ее помощью — вероятности P_s того, что в данный момент очередь имеет длину $s = 0, 1, 2, \dots$; б) математическое ожидание m_s длины очереди и среднее время ожидания $m_{t_{ож}}$ вновь пришедшим, пока он не достигнет начала очереди.

Ответ [7]:

$$\text{а) } \varphi(u) = \frac{(1-m)(1-u)}{1-u \cdot \exp\{m(1-u)\}}, \quad P_s = \frac{1}{s!} \left[\frac{d^s}{du^s} \varphi(u) \right]_{u=0};$$

$$\text{б) } m_s = 1 - \frac{m}{2}, \quad m_{t_{ож}} = \frac{m}{2(1-m)}.$$

4.24. Для охраны района выделено 10 кораблей, ремонт которых обеспечивают два дока. Каждый док может одновременно принять для ремонта один корабль. В док корабль ставится тогда, когда он не может нести охрану и нуждается в ремонте. Вероятность того, что корабль за время t потребует ремонта, равна

$$F(t) = 1 - \exp(-0,02t),$$

где t — время в месяцах.

Предполагая, что в среднем на ремонт одного корабля затрачивается 2 месяца, а время ремонта подчиняется показательному закону, определить: а) среднее число кораблей, находящихся в ремонте; б) вероятность того, что для охраны района будет не менее 8 исправных кораблей.

Ответ [9]: а) $m_k = 0,395$; б) $P(k \geq 8) = 0,99$.

4.25. В систему с одним обслуживающим аппаратом поступает простейший поток заявок с плотностью $\nu = 9,8$ заявки в минуту. Число обслуженных заявок подчиняется закону Пуассона, причем среднее число обслуженных заявок в 1 мин равно 10.

Определить: а) математическое ожидание длины очереди; б) вероятности того, что в очереди находится 0, 1, 2 заявки; в) вероятность того, что вновь поступившей заявке совсем не придется ждать; г) среднее время ожидания.

Ответ: а) $m_s = 49$; б) $P_0 = 0,02$; $P_1 = 0,0196$; $P_2 = 0,0192$; в) $P_0 = 0,02$; г) $m_{t_{ож}} = 4,9$ мин.

Литература

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд-во «Наука», 1966.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
4. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Изд-во «Советское радио», 1965.
5. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. Изд-во «Советское радио», 1967.
6. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1965.
Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. ЛГУ, 1967.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. I и II. Изд-во «Мир», 1967.
9. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания? Изд-во «Советское радио», 1962.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

5. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ

§ 1. Теоретические сведения

Случайный процесс $\xi(t)$, зависящий от одного действительного параметра t (времени), считается определенным на интервале времени $[0, T]$, если при произвольном числе n и для любых t_1, t_2, \dots, t_n из этого интервала известна n -мерная плотность вероятности $W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ или n -мерная характеристическая функция

$$\Theta_n(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) = \int \dots \int W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \times \\ \times \exp\{j\Omega_1 \xi_1 + j\Omega_2 \xi_2 + \dots + j\Omega_n \xi_n\} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n, \quad (5.1)$$

где $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2)$, ..., $\xi_n = \xi(t_n)$.

Плотность вероятности должна удовлетворять следующим условиям [1—4]:

1) условию положительной определенности

$$W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \geq 0, \quad (5.2)$$

2) условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) p_{\xi_1} d\xi_2 \dots d\xi_n = 1, \quad (5.3)$$

3) условию симметрии — функция $W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ должна быть симметричной относительно своих аргументов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, т. е. не должна изменяться при любой перестановке этих аргументов;

4) условию согласованности — при любом $m < n$

$$W_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \int \dots \int W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) d\xi_{m+1} \dots d\xi_n. \quad (5.4)$$

Поскольку характеристическая функция (5.1) является преобразованием Фурье от соответствующей плотности вероятности, то для нее также справедливо условие симметрии, а условия нормировки (5.3) и согласованности (5.4) принимают вид

$$\Theta_n(0, 0, \dots, 0) = 1, \quad (5.5)$$

$$\Theta_m(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m) = \Theta_n(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m, 0, \dots, 0). \quad (5.6)$$

Для нормального случайного процесса, часто встречающегося в различных радиофизических задачах, плотность вероятности и характеристическая функция определяются формулами [1]

$$W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Delta}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \Delta_{\mu\nu} [\xi_\mu - M_1(t_\mu)] [\xi_\nu - M_1(t_\nu)]\right\}, \quad (5.7)$$

$$\Theta_n(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) = \\ = \exp\left\{j \sum_{\mu=1}^n M_1(t_\mu) \Omega_\mu + \frac{1}{2} j^2 \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n K_2(t_\mu, t_\nu) \Omega_\mu \Omega_\nu\right\}. \quad (5.8)$$

Здесь $M_1(t_\mu)$ — среднее значение случайной величины $\xi_\mu = \xi(t_\mu)$; $K_2(t_\mu, t_\nu)$ — функция корреляции для $\xi_\mu = \xi(t_\mu)$ и $\xi_\nu = \xi(t_\nu)$; $\Delta = \|K_2(t_\mu, t_\nu)\|$ — определитель n -го порядка, составленный из функций корреляций; $\Delta_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $K_2(t_\mu, t_\nu)$ этого определителя.

Важным классом случайных процессов являются стационарные случайные процессы. Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в узком смысле, если все его плотности вероятности $W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ произвольного порядка n не меняются при одновременном сдвиге всех точек t_1, t_2, \dots, t_n вдоль оси времени на любое τ . Стационарным в широком смысле называется случайный процесс $\xi(t)$, среднее значение которого не зависит от времени, т. е. $M_1(t_\mu) = m$, а функция корреляции $K_2(t_\mu, t_\nu)$ зависит лишь от расстояния $\tau_{\mu\nu} = |t_\mu - t_\nu|$ между двумя рассматриваемыми моментами времени. Для нормального процесса оба эти понятия стационарности совпадают, поскольку стационарный нормальный процесс полностью определяется средним значением и корреляционной функцией и для его плотности вероятности и характеристической функции справедливы соотношения

$$\omega_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{(2\pi)^n D}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 D} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n D_{\mu\nu} (\xi_\mu - m) (\xi_\nu - m)\right\}, \quad (5.7a)$$

$$\Theta_n(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) = \exp \left\{ jm \sum_{\mu=1}^n \Omega_\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n R(\tau_{\mu\nu}) \Omega_\mu \Omega_\nu \right\}, \quad (5.8a)$$

где σ^2 — дисперсия процесса $\xi(t)$; $D = \|R(\tau_{\mu\nu})\|$ — определитель n -го порядка из коэффициентов корреляции

$$R(\tau_{\mu\nu}) = R(|t_\mu - t_\nu|) = \sigma^{-2} k(|t_\mu - t_\nu|) = \sigma^{-2} \langle [\xi(t_\mu) - m][\xi(t_\nu) - m] \rangle.$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают операцию статистического усреднения (т. е. усреднения по ансамблю реализаций). Применительно к двумерному случаю формулы (5.7a) и (5.8a) принимают вид

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-R^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 [1-R^2(\tau)]} [(\xi_1 - m)^2 - 2R(\tau)(\xi_1 - m)(\xi_2 - m) + (\xi_2 - m)^2] \right\}, \quad (5.7b)$$

$$\Theta_2(\Omega_1, \Omega_2) = \exp \left\{ jm(\Omega_1 + \Omega_2) - \frac{1}{2} \sigma^2 [\Omega_1^2 + 2R(\tau)\Omega_1\Omega_2 + \Omega_2^2] \right\}. \quad (5.8b)$$

Многомерные плотности вероятностей являются наиболее полными характеристиками случайных процессов. Однако в ряде случаев для решения практически важных задач оказывается достаточным рассмотрение более простых характеристик, в частности моментных и корреляционных функций [5,6].

Под моментными функциями случайного процесса $\xi(t)$, заданного на некотором интервале, понимаются функции $M_{i_1}(t)$, $M_{i_1, i_2}(t_1, t_2)$, ..., $M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, симметричны относительно всех своих аргументов, определяемые соотношениями:

$$M_{i_1}(t) = \langle \xi^{i_1}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{i_1} W_1(\xi, t) d\xi, \quad (5.9)$$

$$M_{i_1, i_2}(t_1, t_2) = \langle \xi^{i_1}(t_1) \xi^{i_2}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

.....

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle \xi^{i_1}(t_1) \xi^{i_2}(t_2) \dots \xi^{i_n}(t_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1, t_2, \dots, t_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Моментная функция $M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, зависящая от n несовпадающих аргументов t_1, t_2, \dots, t_n , называется n -мерной моментной функцией $(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ -го порядка. Вместо моментных функций $M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, называемых начальными, можно рассматривать центральные моментные функции, которые определяются соотношением

$$\begin{aligned} \mu_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \langle [\xi(t_1) - M_1(t_1)]^{i_1} [\xi(t_2) - \\ &- M_1(t_2)]^{i_2} \dots [\xi(t_n) - M_1(t_n)]^{i_n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t_1) - M_1(t_1)]^{i_1} \times \\ &\times [\xi(t_2) - M_1(t_2)]^{i_2} \dots [\xi(t_n) - M_1(t_n)]^{i_n} W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \times \\ &\times d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Если случайный процесс $\xi(t)$ задан n -мерной характеристической функцией, моментные функции удобно вычислять путем ее дифференцирования. Используя определение характеристической функции (5.1) и раскладывая входящую в (5.1) функцию $\exp\{z\}$ в ряд Тейлора, можно показать, что для n -мерного начального момента справедливо соотношение [2,3]

$$\begin{aligned} M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= j^{-(i_1+i_2+\dots+i_n)} \times \\ &\times \left[\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial \Omega_1^{i_1} \partial \Omega_2^{i_2} \dots \partial \Omega_n^{i_n}} \Theta_n(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) \right]_{\Omega_i=0}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Корреляционные функции $K_1(t_1), K_2(t_1, t_2), \dots, K_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ определяются разложением в ряд Маклорена логарифма многомерных характеристических функций. Можно показать [2,6], что для первых трех корреляционных функций справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} K_1(t) &= M_1(t) = \langle \xi(t) \rangle, \\ K_2(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_1) - M_1(t_1)] [\xi(t_2) - M_1(t_2)] \rangle = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \\ &- \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle = M_2(t_1, t_2) - M_1(t_1) M_1(t_2), \\ K_3(t_1, t_2, t_3) &= M_3(t_1, t_2, t_3) - M_1(t_1) K_2(t_2, t_3) - M_1(t_2) K_2(t_1, t_3) - \\ &- M_1(t_3) K_2(t_1, t_2) + 2M_1(t_1) M_1(t_2) M_1(t_3). \end{aligned} \quad (5.12)$$

По моментным и корреляционным функциям можно восстановить характеристическую функцию и, следовательно, плотность вероятности [1]:

$$\Theta_n(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) = 1 + j \sum_{\mu=1}^n M_1(t_\mu) \Omega_\mu + \frac{j^2}{2!} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n M_2(t_\mu, t_\nu)$$

$$t_\nu) \Omega_\mu \Omega_\nu + \frac{j^3}{3!} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n M_3(t_\mu, t_\nu, t_\lambda) \Omega_\mu \Omega_\nu \Omega_\lambda + \dots,$$

$$\Theta_n(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) = \exp \left\{ j \sum_{\mu=1}^n K_1(t_\mu) \Omega_\mu + \frac{j^2}{2!} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n K_2(t_\mu, t_\nu) \times \right.$$

$$\left. \times \Omega_\mu \Omega_\nu + \frac{j^3}{3!} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n K_3(t_\mu, t_\nu, t_\lambda) \Omega_\mu \Omega_\nu \Omega_\lambda + \dots \right\}.$$

Особо важную роль в теории случайных функций играют одномерный момент

$$M_1(t) = \langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi W_1(\xi, t) d\xi, \quad (5.13)$$

называемый математическим ожиданием (средним значением) процесса $\xi(t)$, и его корреляционная функция $K_2(t_1, t_2)$, совпадающая с двумерным центральным моментом второго порядка:

$$K_2(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - M_1(t_1)] [\xi(t_2) - M_1(t_2)] \rangle = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle -$$

$$- M_1(t_1) M_1(t_2) = \mu_2(t_1, t_2). \quad (5.14)$$

Для стационарных случайных процессов формулы (5.13) и (5.14) приводятся к виду

$$M_1(t) = \langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi W_1(\xi) d\xi = m, \quad (5.13a)$$

$$K_2(t_1, t_2) = k_2(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - m] [\xi(t_2) - m] \rangle = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - m^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_1 - m) (\xi_2 - m) W_2(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 = k(\tau). \quad (5.14a)$$

Функция корреляции (5.14) или (5.14a) между значениями одного случайного процесса в два различных момента времени называется автокорреляционной. Аналогичным образом определяются и взаимные корреляционные функции, характеризующие статистическую зависимость между значениями двух случайных процессов в два совпадающих или различных момента времени. Так, к примеру, для двух стационарных случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ со средними значениями m_ξ и m_η взаимные корреляционные функции имеют вид

$$k_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - m_\xi] [\eta(t_2) - m_\eta] \rangle,$$

$$k_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \langle [\eta(t_1) - m_\eta] [\xi(t_2) - m_\xi] \rangle. \quad (5.15)$$

Если функции корреляции (5.15) зависят лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$, то процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются стационарно связанными и для них справедливо соотношение

$$k_{\xi\eta}(t_1, t_2) = k_{\xi\eta}(\tau) = k_{\eta\xi}(-\tau). \quad (5.16)$$

Весьма распространенной характеристикой стационарного случайного процесса является его спектральная плотность $S(\omega)$, связанная с корреляционной функцией (5.14а) преобразованием Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (5.17)$$

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (5.18)$$

Используя свойство четности автокорреляционной функции $k(\tau)$, соотношения (5.17) и (5.18) можно привести к виду

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (5.17а)$$

$$k(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (5.18а)$$

В формулах (5.17) и (5.18), называемых формулами Винера — Хинчина, спектральная плотность $S(\omega)$ определена для положительных и отрицательных значений круговой частоты ω , причем $S(\omega) = S(-\omega)$. Если же вместо такого спектра, называемого двухсторонним, ввести одностороннюю «физическую» спектральную плотность

$$S(f) = [S(\omega) + S(-\omega)] = 2S(\omega),$$

отличную от нуля лишь при $f \geq 0$, то формулы (5.17) и (5.18) будут иметь вид

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} k(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau, \quad (5.17б)$$

$$k(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f\tau df. \quad (5.18б)$$

Соотношения, аналогичные (5.17) и (5.18), справедливы и для взаимных корреляционных и спектральных функций.

Среди различных задач статистической радиотехники наиболее часто встречаются задачи, связанные с линейным или нелинейным

преобразованием случайных процессов. В ряде случаев успешное их решение связано с возможностью представления плотностей вероятностей случайных процессов в виде быстро сходящегося ряда, члены которого выражаются через табулированные функции. Рассмотрим некоторые из таких разложений, базирующихся на представлении соответствующих плотностей вероятностей в виде ряда по ортогональным полиномам.

Используя соотношение (5.1), представим двумерную нормальную плотность вероятности $\omega_2(\xi_1, \xi_2)$ в виде обратного преобразования Фурье от характеристической функции (5.8б):

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_2(\Omega_1, \Omega_2) \exp\{-j(\Omega_1 \xi_1 + \Omega_2 \xi_2)\} d\Omega_1 d\Omega_2.$$

Подставляя сюда значение $\Theta_2(\Omega_1, \Omega_2)$, определяемое соотношением (5.8б), и используя разложение

$$\exp\{-\sigma^2 R \Omega_1 \Omega_2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\sigma^2 R \Omega_1 \Omega_2)^n,$$

получим

$$\begin{aligned} \omega_2(\xi_1, \xi_2) = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1^n \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^2 \Omega_1^2 - j\Omega_1 \xi_1\right\} d\Omega_1 \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_2^n \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^2 \Omega_2^2 - j\Omega_2 \xi_2\right\} d\Omega_2 \right] \sigma^{2n} \frac{R^n}{n!}. \end{aligned}$$

Сделав далее замену переменных $\lambda_1 = \sigma \Omega_1$, $\lambda_2 = \sigma \Omega_2$, и воспользовавшись интегральным представлением производных от интеграла вероятности

$$\Phi^{(n+1)}(z) = \frac{1}{2\pi} (-j)^n \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \exp\left\{-\frac{1}{2} \lambda^2 - j\lambda z\right\} d\lambda,$$

нетрудно получить следующее выражение для двумерной нормальной плотности вероятности

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \sigma^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) \frac{R^n}{n!}, \quad (5.19)$$

называемое разложением Крамера [7]. Аналогичным образом могут быть получены разложения и для нормальных плотностей вероятностей более высоких порядков [1]:

$$\omega_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma^{-3} \sum_{k, l, m=0}^{\infty} \Phi^{(k+l+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) \Phi^{(k+m+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) \times$$

$$\times \Phi^{(t+m+1)}\left(\frac{\xi_3}{\sigma}\right) \frac{R_{12}^k R_{13}^l R_{23}^m}{k! l! m!}, \quad (5.20)$$

$$\omega_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \sigma^{-4} \sum_{k, l, \dots, \nu=0}^{\infty} \Phi^{(k+l+m+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) \Phi^{(k+n+\mu+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) \times \\ \times \Phi^{(l+n+\nu+1)}\left(\frac{\xi_3}{\sigma}\right) \Phi^{(m+\mu+\nu+1)}\left(\frac{\xi_4}{\sigma}\right) \frac{R_{12}^k R_{13}^l R_{14}^m R_{23}^n R_{24}^\mu R_{34}^\nu}{k! l! m! n! \mu! \nu!}. \quad (5.21)$$

Если воспользоваться выражением производных от интеграла вероятности через ортогональные полиномы Эрмита

$$\Phi^{(n+1)}(z) = (-1)^n \Phi'(z) H_n(z), \quad (5.22)$$

где $H_n(z)$ — полиномы Эрмита, определяемые соотношениями

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \begin{cases} n! \sqrt{2\pi} & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n, \end{cases} \quad (5.24)$$

разложения (5.19) — (5.21) можно представить в виде рядов по ортогональным полиномам.

Во многих практически важных задачах приходится иметь дело с плотностями вероятностей $W_1(\xi)$, не очень сильно отличающимися от нормальной. Характерные особенности таких функций состоят в следующем:

- 1) они являются одновершинными (т. е. имеют один максимум),
- 2) по обе стороны от вершины они имеют ветви, достаточно быстро приближающиеся к нулю по мере роста абсолютного значения аргумента.

Одномерные плотности вероятностей такого типа обычно аппроксимируют при помощи ряда Эджворта [7, 8]:

$$W_1(\xi) = \omega_1(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{b_n}{\sigma_0^n} H_n\left(\frac{\xi - m_0}{\sigma_0}\right), \quad (5.25)$$

где $\omega_1(\xi)$ — нормальная плотность вероятности

$$\omega_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(\xi - m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}; \quad (5.26)$$

$H_n(z)$ — полиномы Эрмита (5.23); m_0 и σ_0 — постоянные величины, а коэффициенты b_n , называемые квазимоментами, определяются формулой

$$b_n = \sigma_0^n \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(x) H_n\left(\frac{x - m_0}{\sigma_0}\right) dx = \sigma_0^n \left\langle H_n\left(\frac{x - m_0}{\sigma_0}\right) \right\rangle. \quad (5.27)$$

Практически функцию $W_1(\xi)$ нужно знать с некоторой конечной точностью, поэтому вместо (5.25) можно взять конечную сумму, причем число слагаемых N будет зависеть от требуемой точности аппроксимации и от выбора величин m_0 и σ_0^2 . В большинстве практически интересных случаев наилучшее приближение при заданном N будет тогда, когда m_0 и σ_0^2 выбраны равными среднему значению m и дисперсии σ^2 , а разложение произойдет по полиномам $H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right)$. При этом

$$b_0 = 1, \quad b_1 = b_2 = 0,$$

в соответствии с чем из (5.25) получаем

$$W_1(\xi) \approx \omega_1(\xi) \left[1 + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n!} \frac{b_n}{\sigma^n} H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) \right]. \quad (5.28)$$

Если в формуле (5.28) перейти от полиномов Эрмита к производным от интеграла вероятности (5.22), то получим разложение $W_1(\xi)$ в виде одномерного ряда Эджворта:

$$W_1(\xi) \approx \frac{1}{\sigma} \left[\Phi'\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) - \frac{\gamma_1}{3!} \Phi^{(4)}\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_2}{4!} \Phi^{(5)}\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) + \dots \right], \quad (5.29)$$

где γ_1 и γ_2 — коэффициенты асимметрии и эксцесса, определяемые соотношениями

$$\gamma_1 = \frac{b_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}; \quad \gamma_2 = \frac{b_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (5.30)$$

Для разложения многомерных плотностей вероятностей в многомерный ряд Эджворта необходимо использовать многомерные полиномы Эрмита [9]. В частности, для двумерной плотности вероятности, не очень сильно отличающейся от нормальной, при $m_\xi = 0$ и $\sigma_\xi^2 = 1$ справедливо разложение [1]

$$W_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \varphi(\xi_1, \xi_2)\right\} \times \\ \times \sum_{\substack{n=0 \\ (m+l=n)}}^{\infty} \frac{b_{ml}(\xi_1, \xi_2)}{m! l!} G_{ml}(\xi_1, \xi_2), \quad (5.31)$$

где

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^2 - 2R\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{1-R^2},$$

$G_{ml}(\xi_1, \xi_2)$ — двумерные полиномы Эрмита:

$$G_{ml}(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{m+l} \exp\left\{\frac{1}{2} \Phi(\xi_1, \xi_2)\right\} \times \\ \times \frac{\partial^{m+l}}{\partial \xi_1^m \partial \xi_2^l} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2} \Phi(\xi_1, \xi_2)\right\} \right], \quad (5.32)$$

а $b_{ml}(\xi_1, \xi_2)$ — квазимоментные функции, представляющие собой средние значения сопряженных полиномов Эрмита

$$H_{ml}(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{m+l} \exp\left\{\frac{1}{2} \Psi(x_1, x_2)\right\} \times \\ \times \frac{\partial^{m+l}}{\partial x_1^m \partial x_2^l} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2} \Psi(x_1, x_2)\right\} \right], \quad (5.33)$$

где после выполнения дифференцирования надо положить

$$x_1 = \frac{\xi_1 - R\xi_2}{1 - R^2}, \quad x_2 = \frac{\xi_2 - R\xi_1}{1 - R^2}.$$

Входящая в $H_{ml}(\xi_1, \xi_2)$ функция $\Psi(x_1, x_2)$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму, сопряженную с $\Phi(\xi_1, \xi_2)$:

$$\Psi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2R x_1 x_2 + x_2^2.$$

Для двумерных полиномов Эрмита справедливо соотношение

$$G_{ml}(\xi_1, \xi_2) = G_{lm}(\xi_2, \xi_1). \quad (5.34)$$

Значения некоторых из полиномов, вычисленные по формулам (5.32) — (5.34), приведены в табл. 5.1 и 5.2.

Если плотность вероятности $W_1(\xi)$ при отрицательных значениях аргумента равна нулю, ряд Эджворта (5.25) сходится медленно. В подобных случаях более подходящей является аппроксимация $W_1(\xi)$ рядом Лагерра [10—13]:

$$W_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\xi} \xi^\alpha L_n^{(\alpha)}(\xi), \quad (5.35)$$

где $L_n^{(\alpha)}(\xi)$ — обобщенный полином Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(z) = e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}), \quad \alpha > -1;$$

c_n — коэффициент разложения, равный

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(\xi) W_1(\xi) d\xi.$$

Таблица 5.1

Полиномы Эрмита $G_{ml}(\xi_1, \xi_2)$

| $l \backslash m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------------------|------------------------------|--|--|------------------------------|
| 0 | 1 | x_1 | $x_1^2 - \frac{1}{1-R^2}$ | $x_1^3 - \frac{3x_1}{1-R^2}$ |
| 1 | x_2 | $x_1 x_2 + \frac{R}{1-R^2}$ | $x_1^2 x_2 + \frac{2R x_1}{1-R^2} - \frac{x_2}{1-R^2}$ | |
| 2 | $x_2^2 - \frac{1}{1-R^2}$ | $x_2^2 x_1 + \frac{2R x_2}{1-R^2} - \frac{x_1}{1-R^2}$ | | |
| 3 | $x_2^3 - \frac{3x_2}{1-R^2}$ | | | |

Таблица 5.2

Сопряженные полиномы Эрмита $H_{ml}(\xi_1, \xi_2)$

| $l \backslash m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------------------|--------------------|------------------------------------|------------------------------------|--------------------|
| 0 | 1 | ξ_1 | $\xi_1^2 - 1$ | $\xi_1^3 - 3\xi_1$ |
| 1 | ξ_2 | $\xi_1 \xi_2 - R$ | $\xi_1^2 \xi_2 - 2R \xi_1 - \xi_2$ | |
| 2 | $\xi_2^2 - 1$ | $\xi_2^2 \xi_1 - 2R \xi_2 - \xi_1$ | | |
| 3 | $\xi_2^3 - 3\xi_2$ | | | |

Входящий в (5.35) параметр α представляет собой произвольную постоянную, выбор которой зависит от соотношения между средним значением m_ξ и дисперсией σ_ξ^2 процесса $\xi(t)$. Если, к примеру, $m_\xi = \sigma_\xi^2$, то целесообразно принять $\alpha = m_\xi - 1$. При этом

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad c_2 = c_3 = 0,$$

и разложение (5.35) с учетом первых его трех членов приводится к гамма-распределению:

$$W_1(\xi) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \xi^\alpha e^{-\xi}. \quad (5.35a)$$

§ 2. Примеры

Пример 5.1. Найти одномерную $W_1(\xi, t)$ и двумерную $W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)$ плотности вероятностей процесса

$$\xi(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t,$$

где ω — постоянная угловая частота; α и β — взаимно независимые нормальные случайные величины с нулевыми средними значениями $m_\alpha = m_\beta = 0$ и дисперсиями $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$.

Решение [14]. Случайная величина $\xi = \xi(t)$ при любом фиксированном значении t представляет собой линейную комбинацию нормальных случайных величин и в силу этого также является нормальной. Таким образом, для определения плотностей вероятностей $W_1(\xi, t)$ и $W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)$ процесса $\xi(t)$ необходимо определить его среднее значение и корреляционную функцию.

В соответствии с (5.13) среднее значение равно

$$M_1(t) = \langle \xi(t) \rangle = \langle \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \rangle = \langle \alpha \rangle \cos \omega t + \langle \beta \rangle \sin \omega t.$$

Поскольку по условию примера

$$\langle \alpha \rangle = m_\alpha = 0, \quad \langle \beta \rangle = m_\beta = 0,$$

находим, что

$$M_1(t) = 0.$$

При этом для корреляционной функции (5.14) получаем

$$K_2(t_1, t_2) = \langle [\alpha \cos \omega t_1 + \beta \sin \omega t_1] [\alpha \cos \omega t_2 + \beta \sin \omega t_2] \rangle.$$

Учитывая, что по условию

$$\langle \alpha \beta \rangle = \langle \beta \alpha \rangle = 0,$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} K_2(t_1, t_2) &= \sigma^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \sigma^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 = \sigma^2 \cos \omega (t_1 - t_2) = \\ &= k_\xi(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2. \end{aligned}$$

Таким образом, искомые плотности вероятностей имеют вид

$$\begin{aligned} w_1(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right\}, \\ w_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - \cos^2 \omega \tau}} \exp \left\{ -\frac{\xi_1^2 - 2\xi_1 \xi_2 \cos \omega \tau + \xi_2^2}{2\sigma^2 (1 - \cos^2 \omega \tau)} \right\}. \end{aligned}$$

Пример 5.2. Определить характеристическую функцию $\Theta_1(\Omega)$ и коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 для стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с плотностью вероятности

$$W_1(\xi) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha\xi}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Решение. На основании (5.1) одномерная характеристическая функция $\Theta_1(\Omega)$ равна

$$\Theta_1(\Omega) = \langle \exp \{ j\Omega\xi \} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega\xi} W_1(\xi) d\xi = \alpha \int_0^{\infty} e^{j\Omega\xi - \alpha\xi} d\xi = \frac{\alpha}{\alpha - j\Omega}.$$

Коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 определяются формулами (5.30) и для их вычисления необходимо найти среднее значение m_ξ , дисперсию σ_ξ^2 и центральные моменты μ_3 и μ_4 процесса $\xi(t)$.

Используя (5.13а) и (5.14а), находим

$$m_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi W_1(\xi) d\xi = \alpha \int_0^{\infty} \xi e^{-\alpha\xi} d\xi = \frac{1}{\alpha},$$

$$\sigma_\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_\xi)^2 W_1(\xi) d\xi = \alpha \int_0^{\infty} \left(\xi - \frac{1}{\alpha} \right)^2 e^{-\alpha\xi} d\xi = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Аналогичным образом, используя соотношение (5.10), для центральных моментов μ_3 и μ_4 получим

$$\mu_3 = \frac{2}{\alpha^3}; \quad \mu_4 = \frac{9}{\alpha^4}.$$

Таким образом, искомые коэффициенты γ_1 и γ_2 равны

$$\gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 6.$$

Пример 5.3. Найти корреляционную функцию $k(\tau)$ и спектральную плотность $S(\omega)$ для случайного сигнала

$$\xi(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_m и ω_0 — постоянные амплитуда и угловая частота; φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$.

Решение. По определению (5.14а) корреляционной функции имеем

$$k(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle_\varphi - m^2.$$

Поскольку

$$m = \langle \xi(t) \rangle_\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} A_m \sin(\omega_0 t + \varphi) W_1(\varphi) d\varphi = 0,$$

то

$$k(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle_{\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} A_m^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) \times \\ \times W_1(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_m^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) d\varphi.$$

Учитывая, что

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

находим

$$k(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Спектральная плотность вычисляется по формуле Винера-Хинчина:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau = \\ = \frac{A_m^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{-j(\omega_0 + \omega)\tau}] d\tau.$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\tau = \delta(\omega),$$

окончательно получим

$$S(\omega) = \frac{\pi A_m^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$$

Пример 5.4. Найти функцию корреляции $k_{OM}(\tau)$ и спектральную плотность $S_{OM}(\omega)$ однополосного амплитудно-модулированного сигнала с подавленной несущей, имеющего вид

$$s(t) = \frac{M_A}{\sqrt{2}} \lambda(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + \frac{M_A}{\sqrt{2}} \hat{\lambda}(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (5.36)$$

где M_A и ω_0 — постоянные величины; $\hat{\lambda}(t)$ — преобразование Гильберта от функции $\lambda(t)$ [1]:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(x)}{t-x} dx. \quad (5.37)$$

Предполагается, что $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} + \alpha\lambda(t) = n_{\lambda}(t), \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = n_{\varphi}(t). \quad (5.38)$$

Здесь $n_\lambda(t)$ и $n_\varphi(t)$ — независимые стационарные нормальные белые шумы с нулевыми средними значениями и корреляционными функциями

$$k_{n_\lambda}(t_1, t_2) = \langle n_\lambda(t_1) n_\lambda(t_2) \rangle = \frac{N_\lambda}{2} \delta(t_2 - t_1),$$

$$k_{n_\varphi}(t_1, t_2) = \langle n_\varphi(t_1) n_\varphi(t_2) \rangle = \frac{N_\varphi}{2} \delta(t_2 - t_1).$$

Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ считается неизвестной, т. е. случайной, и равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$.

Решение. Так как среднее значение сигнала (5.36) равно нулю, то его корреляционная функция $k_{\text{ОМ}}(\tau)$ в соответствии с (5.14) равна

$$\begin{aligned} k_{\text{ОМ}}(\tau) = \langle s(t)s(t+\tau) \rangle = \frac{M_A^2}{2} \{ & k_\lambda(\tau) \langle \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \cos[\omega_0(t+\tau) + \\ & + \varphi(t+\tau)] \rangle + \langle \hat{\lambda}(t) \hat{\lambda}(t+\tau) \rangle \langle \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \sin[\omega_0(t+\tau) + \\ & + \varphi(t+\tau)] \rangle + \langle \lambda(t) \hat{\lambda}(t+\tau) \rangle \langle \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \sin[\omega_0(t+\tau) + \\ & + \varphi(t+\tau)] \rangle + \langle \lambda(t+\tau) \hat{\lambda}(t) \rangle \langle \cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi(t+\tau)] \times \\ & \times \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \rangle \}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для преобразования (5.37) справедливы соотношения [14]

$$k_\lambda(\tau) = \langle \lambda(t) \lambda(t+\tau) \rangle = \langle \hat{\lambda}(t) \hat{\lambda}(t+\tau) \rangle = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (5.39)$$

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{1}{4\alpha} N_\lambda;$$

$$\begin{aligned} k_{\lambda \hat{\lambda}}(\tau) = \langle \lambda(t) \hat{\lambda}(t+\tau) \rangle &= -\langle \hat{\lambda}(t) \lambda(t+\tau) \rangle = -k_{\hat{\lambda} \lambda}(\tau) = \\ &= \frac{\sigma_\lambda^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y+\tau} e^{-\alpha|y|} dy, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} k_{\text{ОМ}}(\tau) = \frac{M_A^2}{2} \{ & k_\lambda(\tau) \langle \cos[\omega_0 \tau + \Delta\varphi(\tau)] \rangle + k_{\hat{\lambda} \lambda}(\tau) \langle \sin[\omega_0 \tau + \\ & + \Delta\varphi(\tau)] \rangle \}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

где

$$\Delta\varphi(\tau) = \varphi(t+\tau) - \varphi(t).$$

Как следует из второго уравнения (5.38), приращение фазы $\varphi(t)$ за время τ равно

$$\Delta\varphi(t) = \int_t^{t+\tau} n_\varphi(x) dx.$$

Поскольку по условию задачи $n_\varphi(t)$ представляет собой стационарный нормальный белый шум, приращение $\Delta\varphi(\tau)$ на фиксированном интервале τ представляет собой нормальную случайную величину, среднее значение которой равно нулю, а дисперсия $\sigma_\varphi^2(\tau)$ определяется соотношением (см. задачу 8.14)

$$\sigma_\varphi^2(\tau) = \langle \Delta\varphi^2(\tau) \rangle = \frac{1}{2} N_\varphi |\tau|. \quad (5.41)$$

Таким образом, плотность вероятности приращения $\Delta\varphi(\tau)$ равна

$$\omega_1(\Delta\varphi(\tau)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varphi(\tau)} \exp \left\{ -\frac{\Delta\varphi^2(\tau)}{2\sigma_\varphi^2(\tau)} \right\}.$$

Учитывая, что в соответствии с этим

$$\langle \sin \Delta\varphi(\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \Delta\varphi(\tau) \omega_1(\Delta\varphi(\tau)) d\Delta\varphi(\tau) = 0,$$

$$\langle \cos \Delta\varphi(\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \Delta\varphi(\tau) \omega_1(\Delta\varphi(\tau)) d\Delta\varphi(\tau) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_\varphi^2(\tau) \right\},$$

находим

$$\begin{aligned} \langle \cos [\omega_0 \tau + \Delta\varphi(\tau)] \rangle &= \cos \omega_0 \tau \langle \cos \Delta\varphi(\tau) \rangle - \sin \omega_0 \tau \langle \sin \Delta\varphi(\tau) \rangle = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_\varphi^2(\tau) \right\} \cos \omega_0 \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sin [\omega_0 \tau + \Delta\varphi(\tau)] \rangle &= \sin \omega_0 \tau \langle \cos \Delta\varphi(\tau) \rangle + \cos \omega_0 \tau \langle \sin \Delta\varphi(\tau) \rangle = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_\varphi^2(\tau) \right\} \sin \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Подставляя (5.42) в (5.40) и учитывая соотношения (5.39) и (5.41), получаем следующее выражение для функции корреляции однополосного сигнала (5.36):

$$\begin{aligned} k_{\text{ОМ}}(\tau) &= \frac{1}{2} \sigma_A^2 \left[e^{-(\alpha + \frac{1}{4} N_\varphi)|\tau|} \cos \omega_0 \tau + e^{-\frac{1}{4} N_\varphi|\tau|} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} \frac{dx}{x+\tau} \right) \sin \omega_0 \tau \right], \end{aligned} \quad (5.43)$$

где

$$\sigma_A^2 = M_A^2 \sigma_\lambda^2.$$

Спектральная плотность $S_{OM}(\omega)$ сигнала (5.36) на основании формулы (5.17) равна

$$S_{OM}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{OM}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ = \frac{1}{2} \sigma_A^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha + \frac{1}{4} N_\varphi) |\tau| - j\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4} N_\varphi |\tau| - j\omega\tau} \times \right. \\ \left. \times \sin \omega_0 \tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |x|} \frac{dx}{x + \tau} \right].$$

Учитывая, что

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta |\tau| - j\omega\tau} \sin \omega_0 \tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |x|} \frac{dx}{x + \tau} = \\ = \begin{cases} -\pi (\alpha + \beta) \left[\frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right], & \omega < -\omega_0, \\ -\pi (\alpha + \beta) \left[\frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right], & -\omega_0 < \omega < \omega_0, \\ \pi (\alpha + \beta) \left[\frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right], & \omega > \omega_0, \end{cases}$$

получаем следующее выражение для односторонней спектральной плотности однополосного сигнала (5.36):

$$S_{OM}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sigma_A^2}{\alpha} \frac{1 + \frac{1}{2} D_\varphi}{\left(1 + \frac{1}{2} D_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2}, & \omega \geq \omega_0, \\ 0, & \omega < \omega_0, \end{cases} \quad (5.43a)$$

где

$$D_\varphi = \frac{1}{2\alpha} N_\varphi.$$

Как следует из (5.43a), наличие фазовых флуктуаций $\varphi(t)$ не нарушает однополосного характера сигнала (5.36). В частном случае отсутствия фазовых флуктуаций ($N_\varphi = D_\varphi = 0$) формулы (5.43) и (5.43a) приводятся к виду

$$k_{OM}(\tau) = \frac{1}{2} \sigma_A^2 \left[e^{-\alpha |\tau|} \cos \omega_0 \tau + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |x|} \frac{dx}{x + \tau} \right) \sin \omega_0 \tau \right],$$

$$S_{\text{ОМ}}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sigma^2}{\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2}, & \omega \geq \omega_0, \\ 0, & \omega < \omega_0. \end{cases}$$

Пример 5.5. Выяснить разницу между спектральными плотностями случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с корреляционными функциями

$$k_{\xi_1}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

$$k_{\xi_2}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Решение. Функция корреляции $k_{\xi_1}(\tau)$ является частным случаем корреляционной функции $k_{\xi_2}(\tau)$. Поэтому вначале найдем спектральную плотность $S_{\xi_2}(\omega)$, соответствующую $k_{\xi_2}(\tau)$, а затем из $S_{\xi_2}(\omega)$ получим $S_{\xi_1}(\omega)$.

Согласно формуле Винера—Хинчина имеем

$$\begin{aligned} S_{\xi_2}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_{\xi_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau = \\ &= \sigma^2 \left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}),$$

получаем

$$\begin{aligned} S_{\xi_2}(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{[-\alpha - j(\omega - \omega_0)]\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{[-\alpha - j(\omega + \omega_0)]\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-[\alpha + j(\omega - \omega_0)]\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-[\alpha + j(\omega + \omega_0)]\tau} d\tau \right] = \\ &= \alpha \sigma^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение функции $S_{\xi_2}(\omega)$.

1. $S_{\xi_2}(\omega) \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$.
2. При $3\omega_0^2 < \alpha^2$ у функции $S_{\xi_2}(\omega)$ нет максимума, она монотонно убывает с ростом $|\omega|$ (рис. 5.1, а).
3. Если $3\omega_0^2 > \alpha^2$, функция $S_{\xi_2}(\omega)$ имеет максимум в точке (рис. 5.1, б)

$$|\omega| = (\alpha^2 + \omega_0^2)^{1/4} \sqrt{2\omega_0 - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}.$$

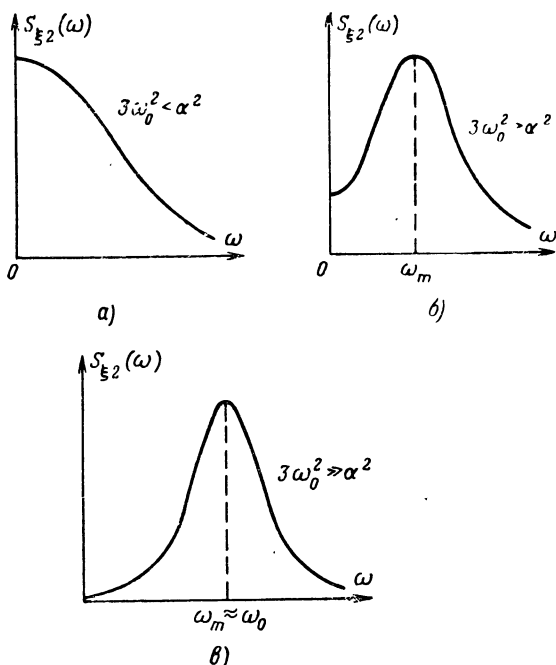


Рис. 5.1. Спектральные плотности при различных соотношениях между α и ω_0 .

4. При $3\omega_0^2 \gg \alpha^2$ спектральная плотность $S_{\xi_2}(\omega)$ также имеет максимум в точке $|\omega| \approx \omega_0$ (рис. 5.1, в).

Суммирование спектральных плотностей $S_{\xi_2}(\omega)$ с различными весами при соответствующим образом выбранных α и ω_0 позволяет аппроксимировать сложные спектральные плотности. Так, к примеру, путем сложения изображенных на рис. 5.1 функций $S_{\xi_2}(\omega)$ можно получить спектральные плотности $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ (рис. 5.2), совпадающие с энергетическими спектрами распределения скоростей в атмосферном турбулентном потоке.

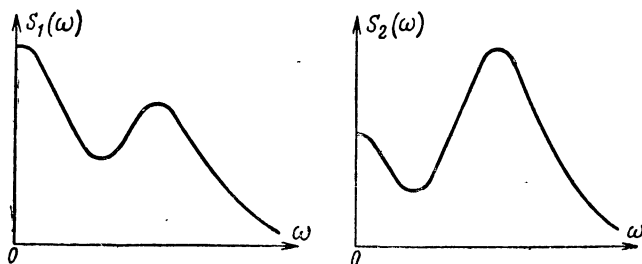


Рис. 5.2. Сложные спектральные плотности.

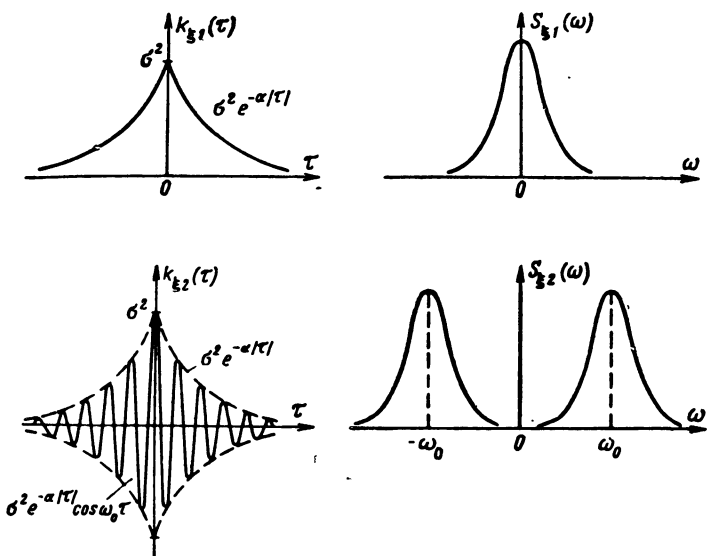


Рис. 5.3. Корреляционные функции и соответствующие им спектральные плотности.

Полагая в $S_{\xi_2}(\omega)$ $\omega_0 = 0$, найдем спектральную плотность $S_{\xi_1}(\omega)$, соответствующую корреляционной функции $k_{\xi_1}(\tau)$:

$$S_{\xi_1}(\omega) = \sigma^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Графики функций $k_{\xi_1}(\tau)$ и $k_{\xi_2}(\tau)$ и соответствующих им спектральных плотностей $S_{\xi_1}(\omega)$ и $S_{\xi_2}(\omega)$ приведены на рис. 5.3.

Пример 5.6. Найти функцию корреляции $k_{\xi}(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ со спектральной плотностью (рис. 5.4)

$$S_{\xi}(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1, \\ \frac{N_0}{2}, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

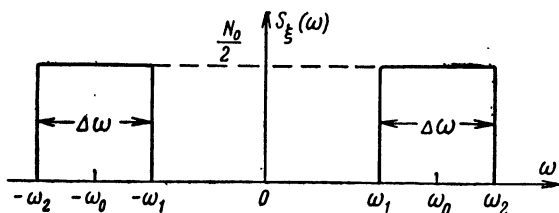


Рис. 5.4. Равномерная в полосе частот спектральная плотность.

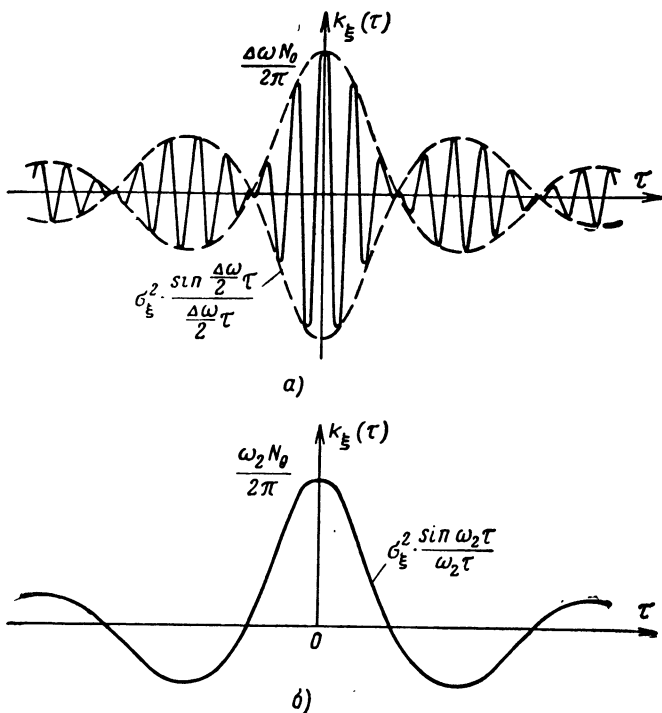


Рис. 5.5. Корреляционные функции узкополосного (а) и широкополосного (б) случайных процессов со спектральными плотностями, равномерными в полосе частот.

Для частного случая $\omega_1 = 0$ определить величину интервала $\Delta = t_{k+1} - t_k$, при котором значения $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ и $\xi_k = \xi(t_k)$ некоррелированы.

Решение. По формуле Винера—Хинчина находим

$$k_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega\tau d\omega = \frac{N_0}{2\pi\tau} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau).$$

Так как

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

корреляционную функцию $k_\xi(\tau)$ можно представить в виде (рис. 5.5, а)

$$k_\xi(\tau) = \sigma_1^2 \rho_1(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

где

$$\sigma_1^2 = \frac{\Delta \omega N_0}{2\pi}; \quad \rho_1(\tau) = \frac{\sin \frac{\Delta \omega}{2} \tau}{\frac{\Delta \omega}{2} \tau}; \quad \Delta \omega = \omega_2 - \omega_1; \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Для частного случая $\omega_1 = 0$ функция корреляции $k_\xi(\tau)$ имеет вид (5.5, б)

$$k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2\pi\tau} \sin \omega_2 \tau = \frac{N_0 \omega_2}{2\pi} \frac{\sin \omega_2 \tau}{\omega_2 \tau} = \sigma_2^2 \rho_2(\tau),$$

где

$$\sigma_2^2 = \frac{N_0 \omega_2}{2\pi}; \quad \rho_2(\tau) = \frac{\sin \omega_2 \tau}{\omega_2 \tau}.$$

Величину интервала $\Delta = t_{k+1} - t_k$, при котором значения (отсчеты) $\xi_k = \xi(t_k)$ и $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ будут некоррелированы, можно определить, приравняв нулю значения коэффициента корреляции $\rho_2(\Delta)$. Отсюда находим

$$\frac{\sin \omega_2 \Delta}{\omega_2 \Delta} = 0, \quad \Delta = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{1}{2F_2},$$

где $F_2 = \omega_2/2\pi$ — верхняя частота спектра $S_\xi(\omega)$.

Таким образом, в реализации $\xi(t)$ длительностью T содержится $N = T/\Delta = 2F_2T$ некоррелированных отсчетов.

Пример 5.7. Спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид (рис. 5.6)

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

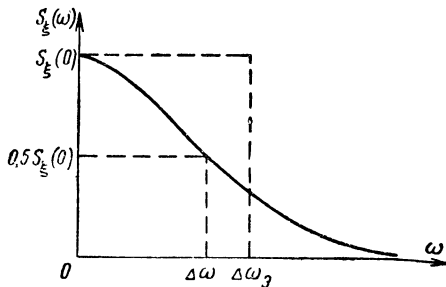


Рис. 5.6. Определение энергетической полосы случайного процесса.

Определить соотношение между энергетической полосой $\Delta \omega_2$ процесса $\xi(t)$ и шириной его спектральной плотности $\Delta \omega$ на уровне $0,5S_\xi(0)$.

Решение. Энергетическая полоса $\Delta\omega_0$ процесса $\xi(t)$ определяется соотношением

$$\Delta\omega_0 = \frac{1}{S_\xi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega.$$

После подстановки $S_\xi(\omega)$ находим

$$\Delta\omega_0 = \frac{\alpha}{4} \int_0^{\infty} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \alpha \cdot \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Ширина спектральной плотности $\Delta\omega$ на уровне $0,5 S_\xi(0)$ находится из формулы

$$S_\xi(\Delta\omega) = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + (\Delta\omega)^2} = 0,5 S_\xi(0) = 0,5 \frac{4\alpha}{\alpha^2},$$

откуда

$$\Delta\omega = \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\Delta f_0}{\Delta f} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 5.8. Найти двумерную плотность вероятности $W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)$ стационарного случайного процесса

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где A_m и ω — постоянные амплитуда и угловая частота, а φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$. Двумерная характеристическая функция $\Theta_2(\Omega_1, \Omega_2)$ процесса $\xi(t)$ имеет вид [15]

$$\begin{aligned} \Theta_2(\Omega_1, \Omega_2) &= \langle \exp \{j\Omega_1 \xi_1 + j\Omega_2 \xi_2\} \rangle = \\ &= J_0 \left(A_m \sqrt{\Omega_1^2 + 2\Omega_1 \Omega_2 \cos \omega\tau + \Omega_2^2} \right), \end{aligned}$$

где $\xi_1 = A_m \cos(\omega t_1 + \varphi)$; $\xi_2 = A_m \cos(\omega t_2 + \varphi)$; $\tau = t_2 - t_1$.

Решение [16]. В соответствии с (5.1) можем написать

$$W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_2(\Omega_1, \Omega_2) \exp \{-j\Omega_1 \xi_1 - j\Omega_2 \xi_2\} d\Omega_1 d\Omega_2$$

Подставляя сюда $\Theta_2(\Omega_1, \Omega_2)$ и используя теорему сложения для бесселевых функций, согласно которой [17]

$$J_0 \left(A_m \sqrt{\Omega_1^2 + 2\Omega_1 \Omega_2 \cos \omega\tau + \Omega_2^2} \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \epsilon_m J_m(A_m \Omega_1) J_m(A_m \Omega_2) \cos m\omega t,$$

где ϵ_m — множитель Неймана:

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 2 & \text{при } m \geq 1, \end{cases}$$

находим

$$W_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \epsilon_m \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_m(A_m \Omega_1) e^{-j\Omega_1 \xi_1} d\Omega_1 \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_m(A_m \Omega_2) e^{-j\Omega_2 \xi_2} d\Omega_2 \right] \cos m\omega t.$$

Сделав замену переменных

$$\lambda_1 = A_m \Omega_1, \quad \lambda_2 = A_m \Omega_2$$

и пользуясь интегральным представлением функций

$$\Psi_m^{(m)}(z) = \frac{1}{2} (j)^m \int_{-\infty}^{\infty} J_m(\lambda) e^{-j\lambda z} d\lambda,$$

получим

$$W_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=0}^{\infty} (\pi A_m)^{-2} \Psi_m^{(m)}\left(\frac{j\xi_1}{A_m}\right) \Psi_m^{(m)}\left(\frac{j\xi_2}{A_m}\right) \epsilon_m \cos m\omega t.$$

Функции $\Psi_m^{(m)}(z)$ могут быть выражены через полиномы Чебышева $T_m(z)$:

$$\Psi_m^{(m)}(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(z),$$

$$T_m(z) = \frac{1}{2} \{ [z + j\sqrt{1-z^2}]^m + [z - j\sqrt{1-z^2}]^m \}.$$

При этом имеем [16]

$$W_2(\xi_1, \xi_2) = W_1(\xi_1) W_1(\xi_2) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m T_m\left(\frac{j\xi_1}{A_m}\right) T_m\left(\frac{j\xi_2}{A_m}\right) \cos m\omega t,$$

где

$$W_1(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{A_m^2 - \xi^2}}, \quad \xi < A_m.$$

Таким образом, полученное выражение для $W_2(\xi_1, \xi_2)$ дает разложение двумерной плотности вероятности гармонического колебания со случайной начальной фазой в ряд по ортогональным полиномам Чебышева.

§ 3. Задачи и ответы

5.1. Найти одномерную плотность вероятности процесса

$$\xi(t) = \alpha + \beta t,$$

где α и β — взаимно независимые случайные величины с плотностями вероятностей $W_\alpha(\alpha)$ и $W_\beta(\beta)$.

Ответ [14]:

$$W_1(\xi, t) = \frac{1}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(\xi - \beta) W_\beta\left(\frac{\beta}{t}\right) d\beta.$$

5.2. Найти одномерную характеристическую функцию нормального процесса $\xi(t)$, имеющего плотность вероятности

$$\omega_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Ответ:

$$\Theta_\xi(\Omega) = e^{jm\Omega - \frac{1}{2}\sigma^2\Omega^2}.$$

5.3. Найти одномерную плотность вероятности случайного сигнала

$$\xi(t) = A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

в котором случайные функции $A(t) \geq 0$ и $\varphi(t)$ предполагаются независимыми в один и тот же момент времени, причем случайная фаза $\varphi(t)$ считается распределенной равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$, а амплитуда $A(t)$ имеет плотность вероятности $W_A(A)$.

Ответ:

$$W_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{W_A(A)}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} dA = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_A(|\xi| \operatorname{ch} x) dx.$$

5.4. Найти плотность вероятности случайного сигнала $\xi(t)$, указанного в предыдущей задаче, в том частном случае, когда

$$W_A(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad A \geq 0.$$

Ответ:

$$W_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

5.5. Найти одномерную плотность вероятности гармонического колебания

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

имеющего постоянные амплитуду A_m и угловую частоту ω_0 , но случайную начальную фазу, равномерно распределенную на интервале $[-\pi, \pi]$.

Ответ:

$$W_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A_m^2 - \xi^2}} & \text{при } |\xi| < A_m, \\ 0 & \text{при } |\xi| > A_m. \end{cases}$$

5.6. Найти плотность вероятности суммы (разности) $\zeta(t) = \xi(t) \pm \eta(t)$ двух некоррелированных нормальных стационарных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, имеющих средние значения и дисперсии, равные соответственно m_ξ и m_η , σ_ξ^2 и σ_η^2 .

Ответ:

$$W_1(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)}} \exp \left\{ -\frac{[\zeta - (m_\xi \pm m_\eta)]^2}{2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)} \right\}.$$

5.7. Вычислить плотность вероятности суммы $\zeta(t)$ двух независимых случайных процессов: гармонического колебания $\eta(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с равномерно распределенной случайной фазой φ на интервале $[-\pi, \pi]$ и нормального стационарного шума $\xi(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 :

$$\zeta(t) = \eta(t) + \xi(t).$$

Ответ:

$$W_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(\zeta - A_m \cos \psi)^2}{2\sigma^2} \right\} d\psi.$$

5.8. Два нормальных некоррелированных случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют средние значения и дисперсии, равные соответственно m_ξ и m_η , σ_ξ^2 и σ_η^2 . Записать совместную плотность вероятности $W_2(\xi, \eta)$.

Ответ:

$$W_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} \exp \left\{ -\frac{(\xi - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{(\eta - m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2} \right\}.$$

5.9. Имеется два случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t) = \alpha\xi(t)$, где α — постоянный коэффициент. Считая процесс $\xi(t)$ нормальным с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , записать совместную плотность вероятности $W_2(\xi, \eta)$.

Ответ:

$$W_2(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} \delta(\eta - \alpha\xi),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

5.10. Написать совместную плотность вероятности для гармонического колебания со случайной начальной фазой (равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$)

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

и его производной $\dot{\xi}(t)$ в тот же момент времени.

Ответ:

$$W_2(\dot{\xi}, \xi) = \frac{1}{2\pi \sqrt{A_m^2 - \xi^2}} \left[\delta\left(\dot{\xi} - \omega_0 \sqrt{A_m^2 - \xi^2}\right) + \delta\left(\dot{\xi} + \omega_0 \sqrt{A_m^2 - \xi^2}\right) \right], \quad |\xi| \leq A_m.$$

5.11. Требуется записать совместную плотность вероятности для стационарного процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot{\xi}(t)$ в один и тот же момент времени. Предполагается, что процесс $\xi(t)$ является нормальным, имеет нулевое среднее значение и дифференцируемую функцию корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$, где σ^2 — дисперсия.

Ответ:

$$W_2(\dot{\xi}, \xi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{-R''(0)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\xi^2 - \frac{\dot{\xi}^2}{R''(0)}\right]\right\},$$

$$R''(0) = \left. \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

5.12. Для нормального стационарного шума $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$ записать двумерный момент вида $\langle \xi^2(t) \xi^2(t + \tau) \rangle$.

Ответ:

$$\langle \xi^2(t) \xi^2(t + \tau) \rangle = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)].$$

5.13. Написать выражение четырехмерного момента $\langle n(t_1) \times n(t_2) n(t_3) n(t_4) \rangle$ для белого нормального стационарного шума $n(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \langle n(t) n(t + \tau) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Ответ:

$$\langle n(t_1) n(t_2) n(t_3) n(t_4) \rangle = \frac{N_0^2}{4} [\delta(t_2 - t_1) \delta(t_4 - t_3) + \delta(t_3 - t_1) \delta(t_4 - t_2) + \delta(t_4 - t_1) \delta(t_3 - t_2)].$$

5.14. Найти общую формулу для одномерных моментов нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Ответ:

$$m_\mu = \langle \xi^\mu(t) \rangle = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (\mu - 1) \sigma^\mu & \text{при } \mu \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } \mu \text{ нечетном.} \end{cases}$$

5.15. Найти общую формулу для двумерных моментных функций нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ [1]:

$$m_{\mu\nu}(\tau) = \langle \xi^\mu(t) \xi^\nu(t + \tau) \rangle = \sigma^{\mu+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} N_{\mu, k} N_{\nu, k} \frac{R^k(\tau)}{k!},$$

где

$$N_{i, k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \Phi^{(k+1)}(x) dx.$$

Значения коэффициентов $N_{i, k}$ приведены в табл. 5.3.

Т а б л и ц а 5.3

Значения коэффициентов $N_{i, k}$

| $k \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|-------|--------|---------|----------|-----------|------------|-------------|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2·1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -3·1 | 0 | -3·2·1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 3·1 | 0 | 4·3·1 | 0 | 4·3·2·1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | -5·3·1 | 0 | -5·4·3·1 | 0 | -5·4·3·2·1 | 0 |
| 6 | 5·3·1 | 0 | 6·5·3·1 | 0 | 6·5·4·3·1 | 0 | 6·5·4·3·2·1 |

5.16. Вычислить трехмерную моментную функцию

$$m_{\mu\nu\lambda}(\tau_1, \tau_2) = \langle \xi^\mu(t) \xi^\nu(t + \tau_1) \xi^\lambda(t + \tau_2) \rangle$$

для стационарного нормального случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ [1]:

$$m_{\mu\nu\lambda}(\tau_1, \tau_2) = \sigma^{\mu+\nu+\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{\mu, k+l} N_{\nu, k+m} \times \\ \times N_{\lambda, l+m} \frac{R^k(\tau_1) R^l(\tau_2) R^m(\tau_2 - \tau_1)}{k! l! m!}.$$

5.17. Вычислить среднее значение, дисперсию, коэффициент асимметрии γ_1 и коэффициент эксцесса γ_2 стационарного случайного процесса $A(t)$, распределенного по закону Релея:

$$W_1(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad A \geq 0.$$

Ответ:

$$m_A = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \sigma_A^2 = \sigma^2 \frac{4-\pi}{2}; \quad \gamma_1 = 0,63; \quad \gamma_2 = 0,23.$$

5.18. По известным вероятностным характеристикам системы случайных функций $x_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, определить среднее значение и функцию корреляции случайного процесса

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t).$$

Ответ:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle x_j(t) \rangle; \quad K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^n K_{x_j}(t_1, t_2) + \\ &+ \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq j)}}^n \sum_{j=1}^n K_{x_l x_j}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

5.19. Определить, при каких условиях случайный процесс

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_m , ω_0 — неслучайные, стационарен и нестационарен в узком смысле.

Ответ. Процесс $\xi(t)$ стационарен, если случайная фаза φ равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$. В противном случае процесс $\xi(t)$ нестационарен.

5.20. Случайные величины A и Φ независимы. Среднее значение и дисперсия первой из них равны соответственно 0 и σ^2 ; вторая подчиняется закону равномерного распределения на интервале $[-\pi, \pi]$.

Доказать, что случайный процесс $\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$ стационарен (ω_0 — неслучайная величина).

Ответ. Процесс $\xi(t)$ стационарен в широком смысле, так как его среднее значение постоянно ($m_\xi = 0$), а корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_\xi(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \sigma^2 \cos \omega_0(t_2 - t_1) = k_\xi(\tau).$$

5.21. Показать, что случайный процесс

$$\xi(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$$

является стационарным в широком смысле только в том случае, когда случайные величины X и Y взаимно некоррелированы и имеют нулевые средние значения $m_X = m_Y = 0$ и равные дисперсии $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.

5.22. Определить, при каких условиях случайный процесс

$$\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + n(t),$$

где A_m, ω_0 — постоянные, $n(t)$ — шум, стационарен в узком смысле.

Ответ: Процесс $\xi(t)$ стационарен, если стационарен шум $n(t)$ и случайная начальная фаза φ распределена равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$.

5.23. Имеется стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}.$$

Выполняется ли для такого процесса условие эргодичности?

Ответ: Выполняется.

5.24. Известны средние значения, корреляционные и взаимные корреляционные функции процессов $x(t)$ и $y(t)$. Определить среднее значение и функцию корреляции случайного процесса

$$z(t) = x(t) + y(t).$$

Ответ:

$$\langle z(t) \rangle = \langle x(t) \rangle + \langle y(t) \rangle, \quad K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + K_{xy}(t_1, t_2) + K_{yx}(t_1, t_2).$$

5.25. Определить автокорреляционную функцию $K_\eta(t_1, t_2)$ случайного процесса

$$\eta(t) = \xi(t + \tau) - \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с автокорреляционной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$.

Ответ:

$$K_\eta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1 + \tau, t_2 + \tau) - K_\xi(t_1 + \tau, t_2) - K_\xi(t_1, t_2 + \tau) + K_\xi(t_1, t_2).$$

5.26. Доказать, что

$$а) |K_\xi(t_1, t_2)| \leq \sigma_{\xi_1} \sigma_{\xi_2}, \quad \xi_1 = \xi(t_1), \quad \xi_2 = \xi(t_2),$$

$$б) |K_\xi(t_1, t_2)| \leq \frac{1}{2} (\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2).$$

Доказать, что

$$|K_{\xi\eta}(t_1, t_2)| \leq \sigma_{\xi_1} \sigma_{\eta_2}, \quad \xi_1 = \xi(t_1), \quad \eta_2 = \eta(t_2).$$

5.27. Найти функцию корреляции сигнала

$$s(t) = A_m \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с известной функцией корреляции $k_\xi(\tau)$, A_m и ω_0 — постоянные величины, а φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$ и не зависящая от $\xi(t)$.

Ответ:

$$k_s(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 k_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

5.28. Определить автокорреляционную функцию случайного процесса

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{j\omega_i t},$$

где ω_i — постоянная угловая частота, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — взаимно некоррелированные случайные величины с нулевыми средними значениями $m_i = 0$ и дисперсиями σ_i^2 .

Ответ:

$$k_\xi(\tau) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 e^{j\omega_i \tau}.$$

5.29. Решить задачу 5.28 для случая, когда

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cos \omega_i t + \beta_i \sin \omega_i t),$$

где α_i и β_i — взаимно некоррелированные случайные величины с нулевыми средними значениями $m_{\alpha_i} = m_{\beta_i} = 0$ и дисперсиями $\sigma_{\alpha_i}^2 = \sigma_{\beta_i}^2 = \sigma_i^2$.

Ответ:

$$k_\xi(\tau) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cos \omega_i \tau.$$

5.30. Определить спектральную плотность $S_\xi(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$k_\xi(\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & |\tau| \leq \tau_0, \\ 0 & \text{при других } \tau. \end{cases}$$

Ответ:

$$S_\xi(\omega) = 2\sigma^2 \tau_0 \frac{\sin \omega \tau_0}{\omega \tau_0}.$$

5.31. Вычислить спектральную плотность $S_{\xi}(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией (рис. 5.7)

$$k_{\xi}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \frac{\tau_0 + \tau}{\tau_0 - \tau_1}, & -\tau_0 \leq \tau < -\tau_1, \\ \sigma^2, & |\tau| \leq \tau_1, \\ \sigma^2 \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 - \tau_1}, & \tau_1 < \tau \leq \tau_0, \\ 0 & \text{при других } \tau. \end{cases}$$

Ответ:

$$S_{\xi}(\omega) = \sigma^2 (\tau_0 + \tau_1) \frac{\sin \frac{\omega (\tau_0 + \tau_1)}{2}}{\frac{\omega (\tau_0 + \tau_1)}{2}} \frac{\sin \frac{\omega (\tau_0 - \tau_1)}{2}}{\frac{\omega (\tau_0 - \tau_1)}{2}}.$$

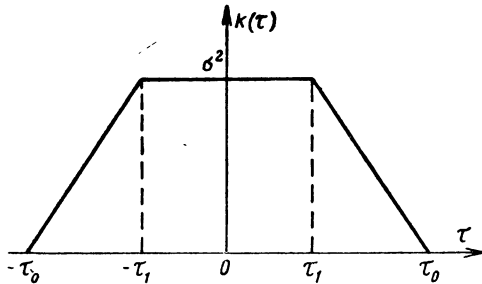


Рис. 5.7. Корреляционная функция.

5.32. Определить спектральную плотность стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$k_{\xi}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} |\tau| \right), & |\tau| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\tau| > \varepsilon. \end{cases}$$

Ответ:

$$S_{\xi}(\omega) = \sigma^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega \varepsilon}{2}}{\frac{\omega \varepsilon}{2}} \right)^2.$$

5.33. Решить задачу 5.32 для процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$k_{\xi}(\tau) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cos \omega_i \tau.$$

Ответ:

$$S_{\xi}(\omega) = \pi \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 [\delta(\omega + \omega_i) + \delta(\omega - \omega_i)].$$

5.34. Показать, что физическая спектральная плотность случайного сигнала

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

у которого случайны лишь фазы φ_i , причем φ_i и φ_k при $i \neq k$ независимы и равномерно распределены на интервале $[-\pi, \pi]$, равна

$$S(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i^2 \delta(f - f_i).$$

5.35. Найти физическую спектральную плотность случайного процесса

$$\xi(t) = A_m n(t) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $n(t)$ — стационарный белый шум с функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

A_m — постоянная амплитуда, а φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$.

Ответ:

$$S_{\xi}(f) = \frac{1}{2} N_0 A_m^2, f \geq 0.$$

5.36. Найти энергетическую ширину физического спектра случайного процесса с функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 \exp\{-\alpha |\tau|\}.$$

Ответ:

$$\Delta f_{\sigma} = \frac{\alpha}{4}.$$

5.37. Пусть стационарный нормальный шум $\xi(t)$ имеет равномерную спектральную плотность в низкочастотной полосе шириной F :

$$S(f) = \begin{cases} N & \text{при } 0 \leq f \leq F, \\ 0 & \text{при } f < 0, f > F. \end{cases}$$

Доказать, что значения случайной функции в точках отсчета, отстоящих друг от друга на интервал времени $\Delta t_n = n/2F$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, статистически независимы.

Ответ: Функция корреляции нормального шума $\xi(t)$

$$k(\tau) = NF \frac{\sin 2\pi F\tau}{2\pi F\tau}$$

обращается в нуль в точках $\tau = \Delta t_n = n/2F$.

5.38. Показать, что для нормального стационарного шума $\xi(t)$ с ограниченным, но неравномерным спектром вида

$$S(f) = \begin{cases} C \cdot \cos 2\pi fC & \text{при } 0 \leq f \leq F = \frac{1}{4C}, \\ 0 & \text{при } f < 0, f > F, \end{cases}$$

значения $\xi(t)$ в точках отсчета $\Delta t_n = 2nC$, $n = 1, 2, 3, \dots$, зависимы.

Ответ: Из выражения для функции корреляции

$$k(\tau) = \int_0^F S(f) \cos 2\pi f\tau df = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \frac{\pi\tau}{2C}}{1 - \left(\frac{\tau}{C}\right)^2}$$

следует, что $k(\Delta t_n) \neq 0$.

5.39. Найти корреляционную функцию $k_x(\tau)$ стационарного случайного процесса

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t,$$

где ω_0 — постоянная угловая частота, а $A(t)$ — стационарный случайный процесс, определяемый соотношением

$$A(t) = \begin{cases} A_m \sqrt{1 - \xi^2(t)} & \text{при } |\xi| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Здесь $\xi(t)$ — стационарный нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Ответ [1]:

$$k_x(\tau) = \frac{1}{16} A_m^2 \sigma^{-2} e^{-\frac{1}{\sigma^2}} \cos \omega_0 \tau \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m} \Gamma^2 \left(m + \frac{1}{2} \right) \times \\ \times {}_1F_1 \left(\frac{3}{2} - m; 2; \frac{1}{2\sigma^2} \right) \frac{R^{2m}(\tau)}{(2m)!}.$$

5.40. Вычислить корреляционную функцию стационарного случайного процесса

$$\eta(t) = A_m \cos \left[\omega_0 t + \chi_0 \int_0^t \xi(t) dt \right],$$

представляющего собой гармоническое колебание, модулированное по частоте стационарным нормальным шумом $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ:

$$k_\eta(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \chi^2 \sigma^2 \int_0^\tau \int_0^\tau R(x-y) dx dy \right\} \cos \omega_0 \tau.$$

5.41. Решить задачу 5.40 для случая, когда корреляционная функция $k_\xi(\tau)$ модулирующего стационарного нормального шума $\xi(t)$ равна:

- 1) $k_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp \{-\alpha |\tau|\}$,
- 2) $k_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp \{-\alpha^2 \tau^2\}$.

Ответ:

- 1) $k_\eta(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \exp \left\{ -\frac{\chi^2 \sigma^2}{\alpha^2} (\alpha |\tau| + e^{-\alpha |\tau|} - 1) \right\} \cos \omega_0 \tau,$
- 2) $k_\eta(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \exp \left\{ -\frac{\chi^2 \sigma^2}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} [e^{-\alpha^2 \tau^2} - 1] + \alpha |\tau| \sqrt{\pi} \times \right. \right.$
 $\left. \times \left[\Phi(\sqrt{2} \alpha |\tau|) - \frac{1}{2} \right] \right\}.$

5.42. Определить корреляционную функцию $k_{AM}(\tau)$ и одностороннюю ($\omega > 0$) спектральную плотность $S_{AM}(\omega)$ амплитудно-модулированного сигнала

$$s(t) = [A_m + M_A \lambda(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где A_m , M_A и ω_0 — постоянные величины.

Предполагается, что $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} + \alpha \lambda(t) = n_\lambda(t), \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = n_\varphi(t). \quad (5.44)$$

Здесь $n_\lambda(t)$ и $n_\varphi(t)$ — независимые стационарные нормальные белые шумы с нулевыми средними значениями и корреляционными функциями

$$k_{n_\lambda}(t_1, t_2) = \langle n_\lambda(t_1) n_\lambda(t_2) \rangle = \frac{N_\lambda}{2} \delta(t_2 - t_1),$$

$$k_{n_\varphi}(t_1, t_2) = \langle n_\varphi(t_1) n_\varphi(t_2) \rangle = \frac{N_\varphi}{2} \delta(t_2 - t_1). \quad (5.45)$$

Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ считается случайной и равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$.

Ответ:

$$k_{AM}(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 (1 + m^2 e^{-\alpha |\tau|}) e^{-\frac{1}{4} N_\varphi |\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

$$m = \frac{\sigma_A}{A_m}, \quad \sigma_A^2 = \sigma_\lambda^2 M_A^2 = \frac{1}{4\alpha} N_\lambda M_A^2;$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha} \left[\frac{\frac{1}{2} D_\varphi}{\left(\frac{1}{2} D_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2} + \frac{m^2 \left(1 + \frac{1}{2} D_\varphi\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} D_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2} \right], \quad \omega > 0,$$

$$D_\varphi = \frac{1}{2\alpha} N_\varphi.$$

Графики функции $S_{AM}(\omega)$ приведены на рис. 5.8.

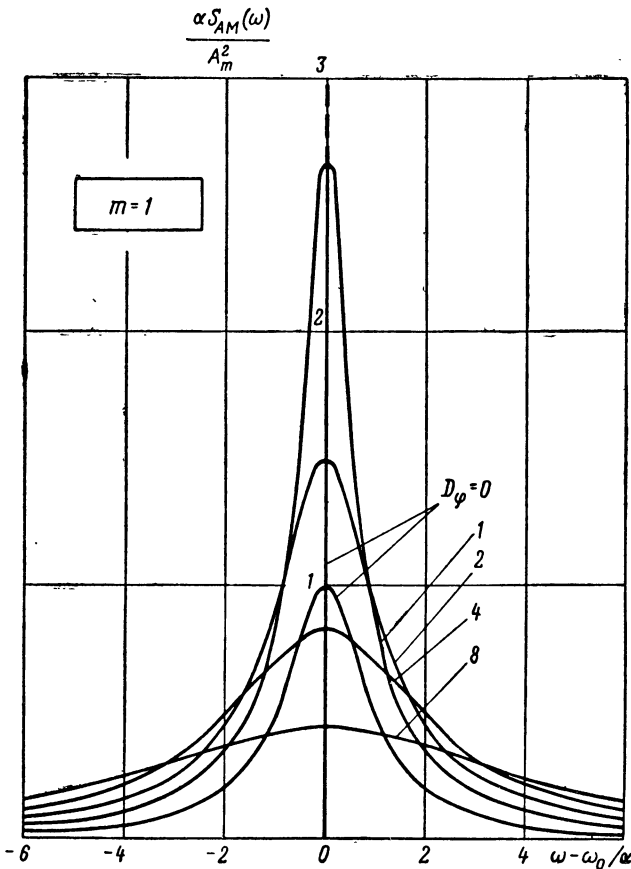


Рис. 5.8. Спектральная плотность амплитудно-модулированного сигнала.

5.43. Решить задачу 5.42 для частного случая отсутствия в сигнале $s(t)$ фазовых флуктуаций ($N_\varphi = 0$).

Ответ:

$$k_{AM}(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 (1 + m^2 e^{-\alpha |\tau|}) \cos \omega_0 \tau,$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha} \left[\pi \delta\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{m^2}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2} \right], \quad \omega > 0.$$

5.44. Найти корреляционную функцию $k_{DM}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{DM}(\omega)$ двухполосного амплитудно-модулированного сигнала с подавленной несущей

$$s(t) = M_A \lambda(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где M_A и ω_0 — постоянные величины, а $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (5.44).

Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ считается случайной и равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$.

Ответ:

$$k_{DM}(\tau) = \frac{1}{2} \sigma_A^2 e^{-(\alpha + \frac{1}{4} N_\varphi) |\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad \sigma_A^2 = \frac{1}{4\alpha} N_\lambda M_A^2;$$

$$S_{DM}(\omega) = \frac{\sigma_A^2}{\alpha} \frac{1 + \frac{1}{2} D_\varphi}{\left(1 + \frac{1}{2} D_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2}, \quad \omega > 0,$$

$$D_\varphi = \frac{1}{2\alpha} N_\varphi.$$

Графики функции $S_{DM}(\omega)$ представлены на рис. 5.9.

5.45. Вычислить корреляционную функцию $k_{FM}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{FM}(\omega)$ фазо-модулированного сигнала

$$s(t) = A_m \cos [\omega_0 t + M_\Phi \lambda(t) + \varphi(t)],$$

где A_m , ω_0 и M_Φ — постоянные величины, а $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (5.44).

Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ случайна и равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$.

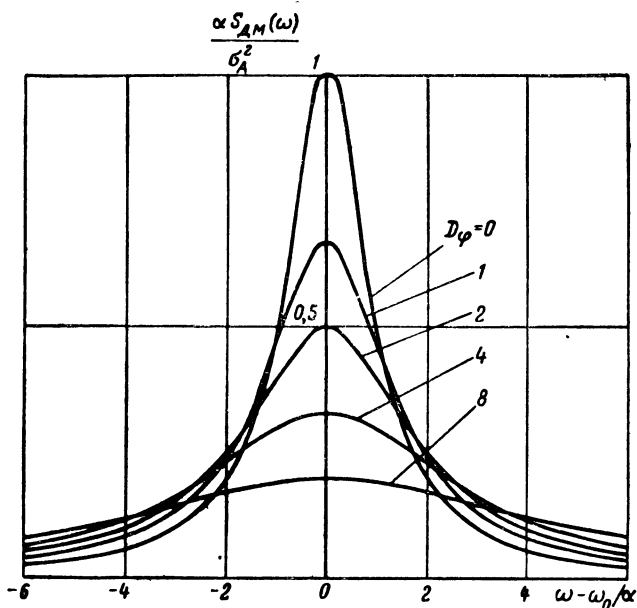


Рис. 5.9. Спектральная плотность амплитудно-модулированного сигнала с подавленной несущей.

Ответ:

$$k_{\Phi M}(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 \exp \left\{ -\sigma_{\Phi}^2 (1 - e^{-\alpha |\tau|}) - \frac{1}{4} N_{\varphi} |\tau| \right\} \cos \omega_0 \tau =$$

$$= \frac{1}{2} A_m^2 e^{-\sigma_{\Phi}^2} \left[e^{-\frac{1}{2} D_{\varphi} \alpha |\tau|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\Phi}^{2n}}{n!} e^{-\alpha (n + \frac{1}{2} D_{\varphi}) |\tau|} \right] \cos \omega_0 \tau,$$

$$\sigma_{\Phi}^2 = \frac{1}{4\alpha} N_{\lambda} M_{\Phi}^2, \quad D_{\varphi} = \frac{1}{2\alpha} N_{\varphi};$$

$$S_{\Phi M}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha} e^{-\sigma_{\Phi}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{\Phi}^{2n} \left(n + \frac{1}{2} D_{\varphi} \right)}{n! \left[\left(n + \frac{1}{2} D_{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2 \right]}, \quad \omega > 0.$$

Графики функции $S_{\Phi M}(\omega)$ приведены на рис. 5.10.

5.46. Решить задачу 5.45 для частного случая отсутствия в сигнале $s(t)$ фазовых флуктуаций ($N_{\varphi} = 0$).

Ответ:

$$k_{\Phi M}(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 \exp \left\{ -\sigma_{\Phi}^2 (1 - e^{-\alpha |\tau|}) \right\} \cos \omega_0 \tau =$$

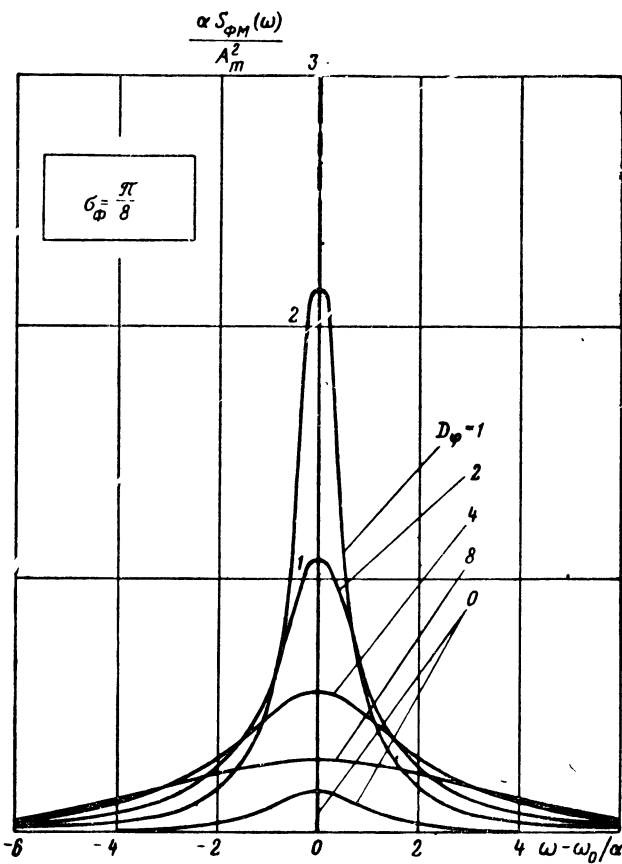


Рис. 5.10. Спектральная плотность фазо-модулированного сигнала.

$$= \frac{1}{2} A_m^2 e^{-\sigma_{\Phi}^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\Phi}^{2n}}{n!} e^{-\alpha n |\tau|} \right] \cos \omega_0 \tau;$$

$$S_{\Phi M}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha} e^{-\sigma_{\Phi}^2} \left[\pi \delta \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\Phi}^{2n}}{(n-1)! \left[n^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2 \right]} \right],$$

$\omega > 0.$

5.47. Определить функцию корреляции $k_{\text{ЧМ}}(\tau)$ и одностороннюю спектральную плотность $S_{\text{ЧМ}}(\omega)$ частотно-модулированного сигнала

$$s(t) = A_m \cos \left[\omega_0 t + M_{\text{ч}} \int_0^t \lambda(t) dt + \varphi(t) \right],$$

где A_m , ω_0 и $M_{\text{ч}}$ — постоянные величины, $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (5.44).

Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$ случайна и равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$.

Ответ:

$$k_{\text{ЧМ}}(\tau) = \frac{1}{2} A_m^2 \exp \left\{ \beta_{\text{ЧМ}}^2 (1 - e^{-\alpha |\tau|}) - \left(\beta_{\text{ЧМ}}^2 + \frac{1}{2} D_{\varphi} \right) \alpha |\tau| \right\} \cos \omega_0 \tau =$$

$$= \frac{1}{2} A_m^2 e^{\beta_{\text{ЧМ}}^2 - \left(\beta_{\text{ЧМ}}^2 + \frac{1}{2} D_{\varphi} \right) \alpha |\tau|} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_{\text{ЧМ}}^{2n}}{n!} e^{-\alpha n |\tau|} \right\} \cos \omega_0 \tau,$$

$$\beta_{\text{ЧМ}}^2 = \frac{\sigma_{\lambda}^2}{\alpha^2} M_{\text{ч}}^2, \quad D_{\varphi} = \frac{1}{2\alpha} N_{\varphi};$$

$$S_{\text{ЧМ}}(\omega) = \frac{A_m^2}{\alpha} e^{\beta_{\text{ЧМ}}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_{\text{ЧМ}}^{2n} \left(n + \beta_{\text{ЧМ}}^2 + \frac{1}{2} D_{\varphi} \right)}{n! \left[\left(n + \beta_{\text{ЧМ}}^2 + \frac{1}{2} D_{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2 \right]}, \quad \omega > 0.$$

Графики функции $S_{\text{ЧМ}}(\omega)$ даны на рис. 5.11.

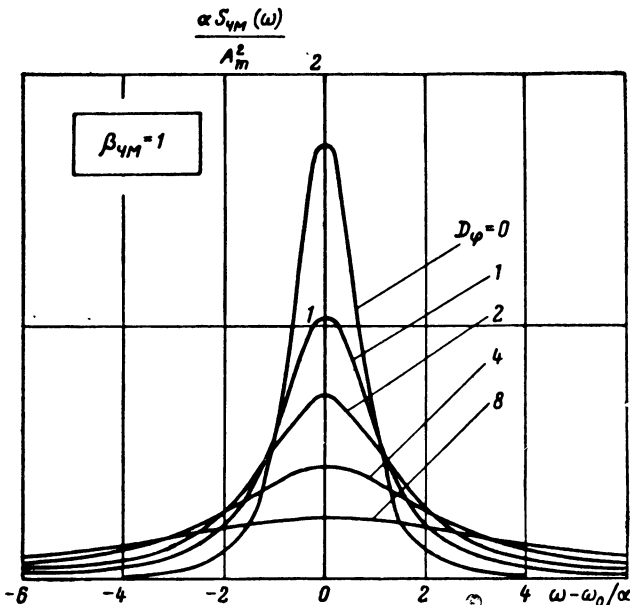


Рис. 5.11. Спектральная плотность частотно-модулированного сигнала.

5.48. Определить корреляционную функцию $k_{\text{АФМ}}(\tau)$ амплитудно-фазо-модулированного сигнала

$$s(t) = M_A \lambda(t) \cos [\omega_0 t + M_\Phi \lambda(t) + \varphi(t)],$$

где M_A , M_Φ и ω_0 — постоянные величины, а $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (5.44).

Ответ:

$$k_{\text{АФМ}}(\tau) = \frac{1}{2} M_A^2 \sigma_\lambda^2 [M_\Phi^2 \sigma_\lambda^2 + (1 - 2M_\Phi^2 \sigma_\lambda^2) e^{-\alpha|\tau|} + \\ + M_\Phi^2 \sigma_\lambda^2 e^{-2\alpha|\tau|}] \exp \left\{ -\frac{1}{4} N_\varphi |\tau| - M_\Phi^2 \sigma_\lambda^2 (1 - e^{-\alpha|\tau|}) \right\} \cos \omega_0 \tau, \\ \sigma_\lambda^2 = \frac{1}{4\alpha} N_\lambda.$$

5.49. Вычислить корреляционную функцию $k_{\text{АЧМ}}(\tau)$ амплитудно-частотно-модулированного сигнала

$$s(t) = M_A \lambda(t) \cos \left[\omega_0 t + M_\chi \int_0^t \lambda(x) dx + \varphi(t) \right],$$

где M_A , M_χ и ω_0 — постоянные величины, а $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные процессы, заданные уравнениями (5.44).

Начальная фаза $\varphi_0 = \varphi(0)$, как и в предыдущих задачах, предполагается случайной и равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$.

Ответ:

$$k_{\text{АЧМ}}(\tau) = \frac{1}{2} \sigma_\lambda^2 M_A^2 e^{-\frac{1}{4} N_\varphi |\tau|} \left[e^{-\alpha|\tau|} - \frac{\sigma_\lambda^2 M_\chi^2}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha|\tau|})^2 \right] \times \\ \times e^{-\frac{M_\chi^2}{4\mu} \cos \omega_0 \tau}, \\ \sigma_\lambda^2 = \frac{1}{4\alpha} N_\lambda, \quad \mu = \frac{\alpha^2}{4\sigma_\lambda^2} \frac{1}{\alpha|\tau| - 1 + e^{-\alpha|\tau|}}.$$

5.50. Дана двумерная плотность вероятности

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{\xi_1^2 - 2R\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2}{2\sigma^2(1-R^2)} \right\}$$

стационарного нормального случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Найти разложение $\omega_2(\xi_1, \xi_2)$ в ряд по ортогональным полиномам Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\}.$$

Ответ [16]:

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) H_n\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) \frac{R^n(\tau)}{n!}.$$

5.51. Дана двумерная плотность вероятности Релея [15]

$$W_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1 \xi_2}{\sigma^4 (1-R^2)} \exp\left\{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\sigma^2 (1-R^2)}\right\} I_0\left(\frac{R\xi_1 \xi_2}{\sigma^2 (1-R^2)}\right).$$

Найти ее разложение в ряд по ортогональным полиномам Лагерра

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Ответ [16]:

$$W_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4\sigma^4} e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n\left(\frac{\xi_1}{2\sigma^2}\right) L_n\left(\frac{\xi_2}{2\sigma^2}\right) R^{2n}(\tau).$$

Литература

1. Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на нелинейные радиотехнические устройства. Докторская диссертация. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1956.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд-во «Советское радио», 1966.
4. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. I. Изд-во «Советское радио», 1961.
5. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, т. 14, № 2.
6. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, т. 14, № 4.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
8. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Гостехиздат, 1949.
9. Аррелл Р., Камрède F. et I. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Paris, 1926.
10. Лезин Ю. С. О распределении случайных напряжений на выходе некогерентного накопительного устройства с экспоненциальной весовой функцией. «Известия вузов», Радиотехника, 1960, № 6.
11. Магсум J. I. A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar. IRE Trans. on Inform. Theory, 1960, v. IT-6, № 2.
12. Бородин В. С. Приближенный расчет функции распределения нормального процесса на выходе типового радиотехнического звена. «Радиотехника», 1961, т. 16, № 2.

13. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Изд-во «Советское радио», 1965.
14. Пароулис А. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, New-York, 1965.
15. Rice S. O. Mathematical Analysis of Random Noise. «Bell Syst. Tech. Journ», 1945, v. 24, № 1.
16. Barrett J. F., Lampard D. G. An Expansion for Some Second-Order Probability Distributions and Its Application to Noise Problems. IRE Trans. on Inform. Theory, 1955, IT-1, № 1.
17. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд-во иностранной литературы, 1949.

6. ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Теоретические сведения

Импульсный случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой последовательность импульсов в общем случае разной формы, следующих друг за другом через некоторые промежутки времени. Если форма импульсов известна, то случайными могут быть отдельные параметры импульсов: высота или «амплитуда» A_i , длительность τ_i , время появления t_i и др. (рис. 6.1).

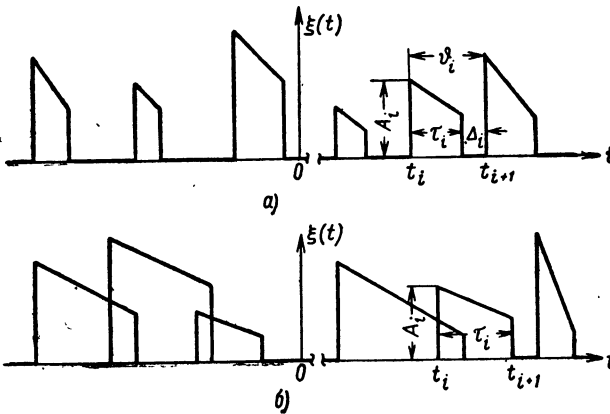


Рис. 6.1. Случайная последовательность неперекрывающихся (а) и перекрывающихся (б) импульсов.

Рассмотрим какую-либо реализацию импульсного случайного процесса $\xi(t)$ на временном интервале $(-T/2, T/2)$, содержащем $(2N + 1)$ импульсов. Пронумеруем отдельные импульсы в порядке их следования на оси времени. Если t_i — момент времени начала i -го импульса, то

$$-T/2 \leq t_{-N} < t_{-(N-1)} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_{(N-1)} < t_N \leq T/2.$$

Произвольный одиночный импульс последовательности обозначим через $A_i f(t - t_i, \tau_i)$, где

$$f(t - t_i, \tau_i) = \begin{cases} f(t, \tau_i), & t_i \leq t \leq t_i + \tau_i \\ 0, & t < t_i, \quad t > t_i + \tau_i. \end{cases} \quad (6.1)$$

Предполагается, что максимальное значение $f_{\max}(t, \tau_i) = 1$.

Случайные импульсы могут быть неперекрывающимися и перекрывающимися. Под перекрытием импульсов понимается возможность частичного наложения разных импульсов друг на друга.

Если в случайной импульсной последовательности никакие два импульса не налагаются друг на друга, то это есть последовательность неперекрывающихся импульсов (рис. 6.1, а). В последовательности неперекрывающихся импульсов отдельные импульсы должны иметь конечную длительность τ_i . Условие отсутствия перекрытия импульсов можно определить неравенством

$$t_{i-1} + \tau_{i-1} \leq t_i, \quad (6.2)$$

где $i = -N, -(N-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (N-1), N$.

Очевидно, что если неперекрывающиеся импульсы воздействуют на какую-либо инерционную систему, то на выходе системы, как правило, получаются перекрывающиеся импульсы.

В случайной последовательности перекрывающихся импульсов (рис. 6.1, б) для всех или для части импульсов условие (6.2) не выполняется, т. е.

$$t_{i-k} + \tau_{i-k} > t_i, \quad k < i. \quad (6.3)$$

При рассмотрении импульсных случайных процессов форму отдельных импульсов часто предполагают известной. При этом статистическое исследование неперекрывающихся импульсов обычно сводится к решению двух задач:

1) нахождению плотностей вероятностей для отдельных параметров импульсов («амплитуд», длительностей, моментов появления),

2) вычислению спектральной плотности (функции корреляции).

Применительно к перекрывающимся импульсам в дополнение к указанным двум задачам часто рассматривают еще третью задачу — вычисление плотностей вероятностей для мгновенных значений результирующего процесса, представляющего сумму налагающихся импульсов. Основные результаты решения этой задачи будут приведены лишь для пуассоновских импульсов.

Решение первой задачи обычно связано с физическим анализом конкретного устройства или механизма, генерирующего случайную последовательность импульсов. В дальнейшем эта задача не рассматривается. Предполагается, что необходимые статистические характеристики заранее известны.

Спектральная плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов. Если не пользоваться интегралом Фурье — Стильтьеса, то спектральную плотность стационарной случайной последовательности неперекрывающихся импульсов следует вычислять согласно формуле [1, 2]

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |F(\omega)|^2 \rangle, \quad (6.4)$$

где $F(\omega)$ — спектральная функция усеченной реализации $\xi(t)$, т. е. реализации $\xi(t)$ на конечном интервале времени $(-T/2, T/2)$:

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.5)$$

Статистическое усреднение в формуле (6.4) должно выполняться по всем случайным параметрам, от которых зависит спектральная функция $F(\omega)$.

Представим рассматриваемую реализацию $\xi(t)$ случайных неперекрывающихся импульсов в виде суммы

$$\xi(t) = \sum_{i=-N}^N A_i f(t-t_i, \tau_i). \quad (6.6)$$

Подставив (6.6) в (6.5), имеем

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{i=-N}^N A_i f(t-t_i, \tau_i) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=-N}^N A_i F_1(\omega, \tau_i) e^{-j\omega t_i}. \quad (6.7)$$

Здесь $F_1(\omega, \tau_i)$ — спектр типового импульса последовательности

$$F_1(\omega, \tau_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_i, \tau_i) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \tau_i) e^{-j\omega x} dx, \quad (6.8)$$

Очевидно, что квадрат модуля спектральной функции $F(\omega)$ равен

$$\begin{aligned} |F(\omega)|^2 &= F(\omega) F^*(\omega) = \sum_{i=-N}^N \sum_{k=-N}^N A_i A_k F_1^*(\omega, \tau_i) \times \\ &\times F_1(\omega, \tau_k) e^{j\omega(t_i-t_k)}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где F^* и F_1^* — функции, комплексно-сопряженные F и F_1 .

Запишем двойную сумму (6.9) иначе. Обозначим $i - k = n$. Для рассматриваемых усеченных реализаций A_i и A_k равны нулю при $|i|, |k| > N$. Поэтому

$$|F(\omega)|^2 = \sum_{\substack{n=-2N \\ -N \leq (k+n) \leq N}}^{2N} \sum_{k=-N}^N A_k A_{k+n} F_1(\omega, \tau_k) F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{j\omega(t_{k+n}-t_k)}. \quad (6.10)$$

В правой части этого равенства общее число слагаемых равно $(2N + 1)^2$, а число слагаемых с каким-либо фиксированным индексом n равно $(2N + 1)$.

До сих пор на случайную импульсную последовательность не накладывалось никаких ограничений. Предположим теперь, что случайный импульсный процесс является стационарным. Это означает, что средние значения отдельных слагаемых, входящих в $\langle |F(\omega)|^2 \rangle$, зависят только от разности индексов n . При каждом фиксированном значении n в двойной сумме будет $(2N + 1)$ одинаковых слагаемых, соответствующих разным значениям индекса k . Поэтому для стационарной последовательности можем написать

$$\begin{aligned} \langle |F(\omega)|^2 \rangle &= \sum_{n=-2N}^{2N} \sum_{k=-N}^N \langle A_k A_{k+n} F_1(\omega, \tau_k) \times \\ &\times F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{j\omega(t_{k+n} - t_k)} \rangle = \\ &= (2N + 1) \sum_{n=-2N}^{2N} \langle A_k A_{k+n} F_1(\omega, \tau_k) F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{j\omega(t_{k+n} - t_k)} \rangle. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь в результате суммирования по n должно получиться $(2N + 1)$ членов.

При подстановке выражения (6.11) в основную формулу (6.4) учтем следующее обстоятельство. Для рассматриваемой стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов число импульсов $(2N + 1)$ растет с увеличением T и, следовательно, нельзя независимо и произвольно задавать величины T и N . Если считать число случайных импульсов $(2N + 1)$ фиксированным, то при статистическом усреднении в общем случае необходимо учитывать различные длительности T разных реализаций. Наоборот, если задать постоянной длительностью реализаций $T = \text{const}$, то будет случайным образом изменяться число случайных импульсов $(2N + 1)$.

Будем считать число импульсов $(2N + 1)$ постоянным. Имея в виду, что в дальнейшем нас интересует предельный переход при $T \rightarrow \infty$, в формуле (6.4) интервал T можно заменить его средним значением $\langle T \rangle$, которое определим следующим образом [3].

Выделим из всего множества рассматриваемых реализаций лишь те, для которых на интервале $(-T/2, T/2)$ появляется точно $(2N + 1)$ случайных импульсов. Пусть для выделенных реализаций $\mathcal{W}_{2T}(t_i, t_{i+1})$ есть совместная плотность вероятности моментов времени t_i и t_{i+1} ; вне интервала $(-T/2, T/2)$ плотность вероятности $\mathcal{W}_{2T}(t_i, t_{i+1})$ равна нулю.

Обозначим интервал между началами двух соседних импульсов через

$$\vartheta_i = t_{i+1} - t_i. \quad (6.12)$$

Плотность вероятности для ϑ_i равна

$$W_T(\vartheta_i) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{2T}(t_i, t_i + \vartheta_i) dt_i.$$

Выразим теперь величину $\langle T \rangle$ через средний интервал между соседними импульсами $\langle \vartheta \rangle$. В каждой из выделенных реализаций число импульсов, имеющих интервал от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, в среднем равно $(2N + 1) W_T(\vartheta) d\vartheta$, а суммарная длительность всех таких интервалов составляет $(2N + 1)\vartheta W_T(\vartheta) d\vartheta$. Поэтому средняя длительность реализаций равна

$$\langle T \rangle = (2N + 1) \int_0^{\infty} \vartheta W_T(\vartheta) d\vartheta = (2N + 1) \langle \vartheta_T \rangle.$$

Переходя здесь к пределу при $T \rightarrow \infty$ (т. е. $N \rightarrow \infty$) и учитывая стационарность случайной импульсной последовательности, можем написать $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vartheta_T \rangle = \langle \vartheta \rangle$. Следовательно, почти для всех реализаций множества можно приближенно полагать

$$T \simeq \langle T \rangle = (2N + 1) \langle \vartheta \rangle, \quad N \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

С учетом соотношений (6.11) и (6.13) формула (6.4) принимает вид

$$S(\omega) = \frac{1}{\langle \vartheta \rangle} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle A_k A_{k+n} F_1(\omega, \tau_k) F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{i\omega(t_{k+n} - t_k)} \rangle. \quad (6.14)$$

Таким образом, задача нахождения спектральной плотности сведена к вычислению суммы, фигурирующей в правой части формулы (6.14). Эти вычисления могут быть выполнены, если заданы конкретные статистические характеристики случайной импульсной последовательности.

Рассмотрим три важных, но частных вида случайных последовательностей импульсов: аperiodических, периодических и квазипериодических.

1. Аperiodические взаимно независимые импульсы. Пусть в рассматриваемой импульсной последовательности отсутствуют какие-либо периодичности, а амплитуды, длительности и моменты появления разных импульсов независимы, т. е. случайные величины A_i, τ_i, t_i и A_k, τ_k, t_k при $i \neq k$ взаимно независимы.

Выразим разность между моментами появления $(k + n)$ -го и k -го импульсов через интервалы ϑ между импульсами. Нетрудно убедиться (см. рис. 6.1, а), что

$$t_{k+n} - t_k = \begin{cases} \sum_{\nu=k}^{k+n-1} \vartheta_{\nu}, & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \\ -\sum_{\nu=k+n}^{k-1} \vartheta_{\nu}, & n \leq -1. \end{cases} \quad (6.15)$$

Чтобы в выражении (6.14) расщепить независимые множители с разными индексами, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_k(\omega) &= A_k F_1(\omega, \tau_k) e^{j\omega\vartheta_k}, \\ b_{k+n}(\omega) &= A_{k+n} F_1(\omega, \tau_{k+n}), \quad \Theta(\omega) = \langle e^{j\omega\vartheta} \rangle. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Здесь $\Theta(\omega)$ — характеристическая функция для интервалов между началами двух соседних импульсов.

Теперь сумму (6.14) можно записать в виде трех слагаемых, соответствующих $n = 0$, $n \geq 1$ и $n \leq -1$:

$$S(\omega) = S_0(\omega) + S_1(\omega) + S_{-1}(\omega), \quad (6.17)$$

где

$$\begin{aligned} S_0(\omega) &= \frac{1}{\langle \vartheta \rangle} \langle a(\omega) b^*(\omega) e^{-j\omega\vartheta} \rangle, \\ S_1(\omega) &= \frac{1}{\langle \vartheta \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \langle a(\omega) \rangle \langle b^*(\omega) \rangle \Theta^{k-1}(\omega), \\ S_{-1}(\omega) &= \frac{1}{\langle \vartheta \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \langle a^*(\omega) \rangle \langle b(\omega) \rangle \Theta^{*k-1}(\omega). \end{aligned} \quad (6.18)$$

При записи двух последних выражений использовано известное положение, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций отдельных слагаемых. Кроме этого, при написании $S_{-1}(\omega)$ было учтено, что

$$a^*(\omega) = A_{k+n} F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{-j\omega\vartheta_{k+n}}, \quad b(\omega) = A_k F_1(\omega, \tau_k).$$

Если подставить соотношения (6.18) в (6.17) и просуммировать получающуюся геометрическую прогрессию, то при $\Theta(\omega) \neq 1$ придем к формуле

$$S(\omega) = \frac{1}{\langle \vartheta \rangle} \left[\langle a(\omega) b^*(\omega) e^{-j\omega\vartheta} \rangle + 2\operatorname{Re} \frac{\langle a(\omega) \rangle \langle b^*(\omega) \rangle}{1 - \Theta(\omega)} \right], \quad (6.19)$$

где $\operatorname{Re} z$ обозначает действительную часть комплексного числа z .

Эта формула неприменима в тех случаях, когда характеристическая функция интервалов $\Theta(\omega) = 1$. В большинстве случайных импульсных последовательностей, встречающихся на практике,

$\vartheta > 0$. Для таких последовательностей в отсутствие каких-либо периодичностей $\Theta(\omega) = 1$ лишь при $\omega = 0$. Следовательно, формула (6.19) не позволяет получить интенсивность дискретной линии на нулевой частоте. Эта дискретная линия обусловлена возможным наличием в рассматриваемой случайной последовательности $\xi(t)$ постоянной составляющей. Последнюю можно выразить через спектр типового импульса (6.8), который входит в формулу (6.19).

Действительно, полагая в выражении (6.5) $\omega = 0$ и статистически усреднив обе части получающегося равенства, с учетом стационарности процесса и соотношения (6.7) можем написать

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{T} \langle F(0) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{-N}^N \langle A_i F_1(0, \tau_i) \rangle.$$

Подставив сюда значение T из (6.13), получим

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{\langle \vartheta \rangle} \langle A F_1(0, \tau) \rangle. \quad (6.20)$$

Очевидно, что дискретная спектральная линия на нулевой частоте равна

$$\langle \xi(t) \rangle^2 \delta(f) = \langle \xi(t) \rangle^2 2\pi \delta(\omega). \quad (6.21)$$

Следовательно, суммируя выражения (6.19) и (6.21), получаем окончательную формулу для спектральной плотности стационарной последовательности неперекрывающихся аperiodических взаимно независимых импульсов

$$S(\omega) = \frac{1}{\langle \vartheta \rangle} \left[\langle \bar{a}(\omega) b^*(\omega) e^{-j\omega\vartheta} \rangle + 2\text{Re} \frac{\langle a(\omega) \rangle \langle b^*(\omega) \rangle}{1 - \Theta(\omega)} \right] + \frac{1}{\langle \vartheta \rangle^2} \langle A F_1(0, \tau) \rangle^2 2\pi \delta(\omega). \quad (6.22)$$

Рассмотрим случай прямоугольных импульсов и вместо интервала ϑ введем промежуток между импульсами

$$\Delta_i = \vartheta_i - \tau_i. \quad (6.23)$$

Тогда формула (6.22) примет следующий вид:

$$S(\omega) = \frac{2}{\omega^2 \langle \tau + \Delta \rangle} \left[\langle A^2 \text{Re}(1 - e^{j\omega\tau}) \rangle + \text{Re} \frac{\langle A e^{j\omega\Delta} (e^{j\omega\tau} - 1) \rangle \langle A (1 - e^{j\omega\tau}) \rangle}{1 - \langle e^{j\omega\tau} \cdot e^{j\omega\Delta} \rangle} \right] + \frac{\langle A\tau \rangle^2}{\langle \tau + \Delta \rangle^2} 2\pi \delta(\omega). \quad (6.24)$$

Если в дополнение к условиям (стационарность и взаимная независимость параметров разных импульсов), при которых справедлива формула (6.22), предположить, что случайные величины

A_i , τ_i и Δ_i для одного импульса также взаимно независимы, то из (6.24) получим следующий частный результат [4]:

$$S(\omega) = \frac{2}{\omega^2 (\langle \tau \rangle + \langle \Delta \rangle)} \left\{ \langle A^2 \rangle \operatorname{Re} [1 - \Theta_1(\omega)] + \langle A \rangle^2 \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Re} \frac{\Theta_2(\omega) [1 - \Theta_1(\omega)] [\Theta_1(\omega) - 1]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)} \right\} + \langle A \rangle^2 \left(\frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \Delta \rangle} \right)^2 2\pi \delta(\omega). \quad (6.25)$$

Здесь $\Theta_1(\omega) = \langle e^{i\omega\tau} \rangle$ — характеристическая функция длительностей прямоугольных импульсов; $\Theta_2(\omega) = \langle e^{i\omega\Delta} \rangle$ — характеристическая функция промежутков между двумя соседними импульсами.

В том частном случае, когда независимые прямоугольные импульсы имеют одинаковую амплитуду ($A_i = A_0 = \text{const}$), справедливо равенство $\langle A^2 \rangle = \langle A \rangle^2 = A_0^2$. При этом формула (6.25) упрощается и оказывается симметричной относительно характеристических функций $\Theta_1(\omega)$ и $\Theta_2(\omega)$:

$$S(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2 (\langle \tau \rangle + \langle \Delta \rangle)} \operatorname{Re} \frac{[1 - \Theta_1(\omega)] [1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)} + \\ + A_0^2 \left(\frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \Delta \rangle} \right)^2 2\pi \delta(\omega). \quad (6.26)$$

2. Периодически повторяющиеся импульсы. Рассмотрим случай, когда импульсы заданной формы $f(t, \tau_0)$ имеют постоянный период повторения $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, постоянную длительность $\tau = \tau_0 = \text{const}$ ($\tau_0 \leq \vartheta_0$), но случайные и коррелированные амплитуды A_i (рис. 6.3, а).

Такое задание параметров импульсов характерно для амплитудно-импульсной модуляции. При амплитудно-импульсной модуляции периодически, через тактовый интервал ϑ_0 , берутся выборки $\zeta(t - i\vartheta_0)$, $-N \leq i \leq N$, случайного процесса $\zeta(t)$, которые затем превращаются в периодическую последовательность импульсов $A_i f(t - i\vartheta_0, \tau_0)$ со случайными амплитудами $A_i = \zeta(t - i\vartheta_0)$ (рис. 6.2). Считаем, как и ранее, $f_{\max}(t, \tau_0) = 1$.

Предположим, что случайный процесс $\zeta(t)$ является стационарным, имеет среднее значение $m_\zeta = \langle \zeta(t) \rangle$ и функцию корреляции $k_\zeta(\tau) = \sigma_\zeta^2 R_\zeta(\tau)$, где $R_\zeta(\tau)$ — коэффициент корреляции.

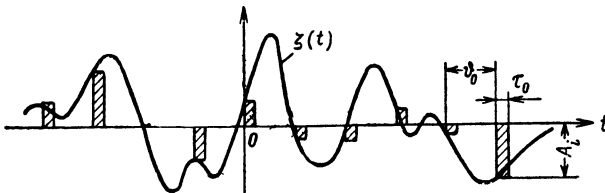


Рис. 6.2. Модулирующие случайные импульсы при амплитудно-импульсной модуляции.

Применительно к данному случаю в основной формуле (6.14) нужно положить

$$\begin{aligned} \tau_k &= \tau_{k+n} = \tau_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad t_{k+n} - t_k = n\vartheta_0, \\ A_k &= \zeta(t - k\vartheta_0), \quad A_{k+n} = \zeta(t - (k+n)\vartheta_0), \\ \langle A_k A_{k+n} \rangle &= k_\zeta(n\vartheta_0) + m_\zeta^2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

При этом получим

$$S(\omega) = \frac{|F_1(\omega, \tau_0)|^2}{\vartheta_0} \left\{ m_\zeta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n \vartheta_0} + \sigma_\zeta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_\zeta(n\vartheta_0) e^{j\omega n \vartheta_0} \right\}. \quad (6.28)$$

Первую сумму в фигурных скобках можно выразить через сумму дельта-функций. Известно [5], что разложение в ряд Фурье периодической последовательности дельта-функций

$\delta(x - ml)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, с периодом l имеет вид

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - ml) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n x / l}.$$

Полагая здесь $l = 1/\vartheta_0$, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n x \vartheta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2\pi n x \vartheta_0 = \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{m}{\vartheta_0}\right), \quad (6.29)$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n \neq 0$.

Используя это соотношение, формулу (6.28) можно представить в следующем окончательном виде:

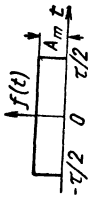
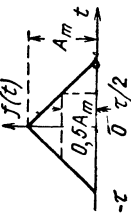
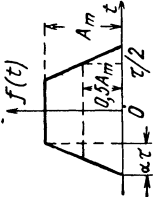
$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{m_\zeta^2 |F_1(\omega, \tau_0)|^2}{\vartheta_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + \\ &+ \frac{\sigma_\zeta^2 |F_1(\omega, \tau_0)|^2}{\vartheta_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_\zeta(n\vartheta_0) e^{j\omega n \vartheta_0}, \quad \omega = 2\pi f. \end{aligned} \quad (6.30)$$

В этой формуле можно перейти от функции корреляции $k_\zeta(\tau) = \sigma_\zeta^2 R_\zeta(\tau)$ процесса $\zeta(t)$ к его спектральной плотности $S_\zeta(\omega)$.

Подставив известное соотношение

$$\sigma_\zeta^2 R_\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega') e^{j\omega' \tau} d\omega'$$

Различные формы импульсов $f(t)$ и их спектры $F(\omega, \tau)$ Таблица 6.1

| Тип импульса | График | $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega, \tau) e^{j\omega t} d\omega$ | $F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ |
|----------------|---|---|--|
| Прямоугольный |  | <p>Математическая запись</p> $\begin{cases} A_m, & t \leq \frac{1}{2} \tau, \\ 0, & t > \frac{1}{2} \tau \end{cases}$ | <p>Математическое выражение спектра</p> $A_m \tau \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \omega \tau\right)}{\frac{1}{2} \omega \tau}$ |
| Треугольный |  | $\begin{cases} \frac{A_m}{\tau} (t + \tau), & -\tau \leq t \leq 0, \\ -\frac{A_m}{\tau} (t - \tau), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau \end{cases}$ | $A_m \tau \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} \right)^2$ |
| Тrapeцидальный |  | $\begin{cases} \frac{A_m}{\alpha \tau} \left[t + (1 + \alpha) \frac{\tau}{2} \right], \\ -(1 + \alpha) \frac{\tau}{2} \leq t \leq -(1 - \alpha) \frac{\tau}{2}, \\ A_m, & t \leq (1 - \alpha) \frac{\tau}{2}, \\ -\frac{A_m}{\alpha \tau} \left[t - (1 + \alpha) \frac{\tau}{2} \right], \\ (1 - \alpha) \frac{\tau}{2} \leq t \leq (1 + \alpha) \frac{\tau}{2}, \\ 0, & t > (1 + \alpha) \frac{\tau}{2} \end{cases}$ | $A_m \frac{\sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha \omega \tau}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha \omega \tau}{2}\right)}$ |

Продолжение табл. 6.1

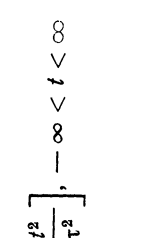
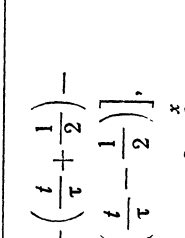
| Тип импульса | $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \tau) e^{j\omega t} d\omega$ | $F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ |
|-----------------------|---|---|
| График | | Математическое выражение спектра |
| Математическая запись | | |
| Гауссов |  | $A_m \exp \left[-4 (\ln 2) \frac{t^2}{\tau^2} \right], \quad -\infty < t < \infty$ |
| Функция ошибок |  | $A_m \tau \frac{\sin \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)}{\left(\frac{\omega \tau}{2} \right)} \times \exp \left(-\frac{\alpha^2 \omega^2 \tau^2}{4\pi} \right)$ |

Таблица 6.2

Различные плотности вероятности $W_1(x)$

| Тип | Математическая запись $W_1(x)$ | График $W_1(x)$ | Среднее значение $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x) dx$ | Дисперсия $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \times W_1(x) dx$ |
|---------------------------|--|-----------------|---|--|
| «Синусоидальная» | $\begin{cases} \left[\frac{\pi}{\sqrt{x_0^2 - (x - m_x)^2}} \right]^{-1}, & x - m_x < x_0, \\ 0, & x - m_x > x_0 \end{cases}$ | | m_x | $\frac{1}{2} x_0^2$ |
| Нормальная | $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2} \right]$ $-\infty < x < \infty$ | | m_x | σ^2 |
| Равномерная | $\begin{cases} \frac{1}{2x_0}, & x - m_x \leq x_0, \\ 0, & x - m_x > x_0 \end{cases}$ | | m_x | $\frac{1}{3} x_0^2$ |
| Сумма двух дельта-функций | $A_1 \delta(x - x_1) + (1 - A_1) \delta(x - x_2)$ | | $A_1(x_1 - x_2) + x_2$ | $A_1(1 - A_1)(x_1 - x_2)^2$ |

во второй член в правой части (6.30), можем написать

$$\sigma_{\zeta}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\zeta}(n\vartheta_0) e^{j\omega n\vartheta_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta}(\omega') d\omega' \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega'+\omega)n\vartheta_0}.$$

Но согласно соотношению (6.29)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n\vartheta_0} = \frac{2\pi}{\vartheta_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\vartheta_0}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\zeta}(n\vartheta_0) e^{j\omega n\vartheta_0} &= \frac{1}{\vartheta_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta}(\omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega' + \omega - \frac{2\pi n}{\vartheta_0}\right) d\omega' = \\ &= \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{\zeta}\left(\omega - \frac{2\pi m}{\vartheta_0}\right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что спектральная плотность $S_{\zeta}(\omega)$ является четной функцией.

Следовательно, формулу (6.30) можно записать в следующем виде:

$$S(\omega) = \vartheta_0^{-2} |F_1(\omega, \tau)|^2 \left\{ m_{\zeta}^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{\zeta}\left(\omega - \frac{2\pi m}{\vartheta_0}\right) \right\}. \quad (6.30a)$$

Формулами (6.30) часто пользуются при вычислении спектральных плотностей импульсных случайных процессов, получаемых из непрерывных стационарных процессов при помощи квантования по уровням и периодического «квантования» по времени.

Из формулы (6.30) видно, что спектр состоит из непрерывной части и дискретных спектральных линий при частотах $f = m/\vartheta_0$. Эти дискретные линии имеются только в том случае, когда $m_{\zeta} \neq 0$. Они обусловлены периодическим стробированием постоянной составляющей процесса. При $m_{\zeta} = 0$ спектр является сплошным.

Если период ϑ_0 велик по сравнению с временем корреляции τ_k процесса $\zeta(t)$, то в последней сумме в правой части (6.30) будет отличным от нуля лишь одно слагаемое при $n = 0$. В данном случае формула (6.30) упрощается:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{m_{\zeta}^2 |F_1(\omega, \tau_0)|^2}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + \\ &+ \frac{\sigma_{\zeta}^2 |F_1(\omega, \tau_0)|^2}{\vartheta_0}, \quad \vartheta_0 \gg \tau_k. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Запишем эту формулу иначе:

$$S(\omega) = S_d(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + S_c(\omega), \quad (6.31a)$$

где

$$S_d(\omega) = \frac{m_c^2}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2; \quad S_c(\omega) = \frac{\sigma_c^2}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2. \quad (6.31b)$$

Здесь $S_d(\omega)$ — интенсивность дискретных спектральных линий; $S_c(\omega)$ — непрерывная часть спектральной плотности.

В табл. 6.3 приведены результаты вычислений по формулам (6.31б) для нескольких видов импульсов, указанных в табл. 6.1, и для разных распределений амплитуд импульсов, приведенных в табл. 6.2 [6].

Т а б л и ц а 6.3

Спектральная плотность при модуляции импульсов по амплитуде (АИМ)

| Плотность вероятности амплитуды импульсов | Дискретные спектральные линии $S_d(\omega) \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\vartheta_0},$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ | Непрерывная часть спектра $S_c(\omega)$ |
|---|---|---|
| «Синусоидальная» | $\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} m_x^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2 \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{x_0^2}{2\vartheta_0} F_1(\omega, \tau_0) ^2$ |
| Нормальная | $\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} m_x^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2 \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{\sigma^2}{\vartheta_0} F_1(\omega, \tau_0) ^2$ |
| Равномерная | $\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} m_x^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2 \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{x_0^2}{3\vartheta_0} F_1(\omega, \tau_0) ^2$ |
| Сумма двух дельта-функций | $\frac{2\pi}{\vartheta_0} [A_1(x_1 - x_2) + x_2]^2 \times$ $\times F_1(\omega, \tau_0) ^2 \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_1(1 - A_1)(x_1 - x_2)^2}{\vartheta_0} F_1(\omega, \tau_0) ^2$ |

3. Квазипериодические случайные импульсы. Последовательности квазипериодических случайных импульсов встречаются в различных видах импульсно-временной модуляции. Различают четыре главных вида такой модуляции.

1. Импульсно-фазовая модуляция (ИФМ), когда импульсы имеют постоянную длительность, а их положение от периода к периоду меняется в соответствии с передаваемым сообщением (рис. 6.3, б).

На рис. 6.3 показаны «низкочастотные» импульсы, соответствующие разным видам модуляции, до того, как они воздействуют на колебание несущей частоты. Для простоты изображены прямоугольные импульсы одинаковой амплитуды.

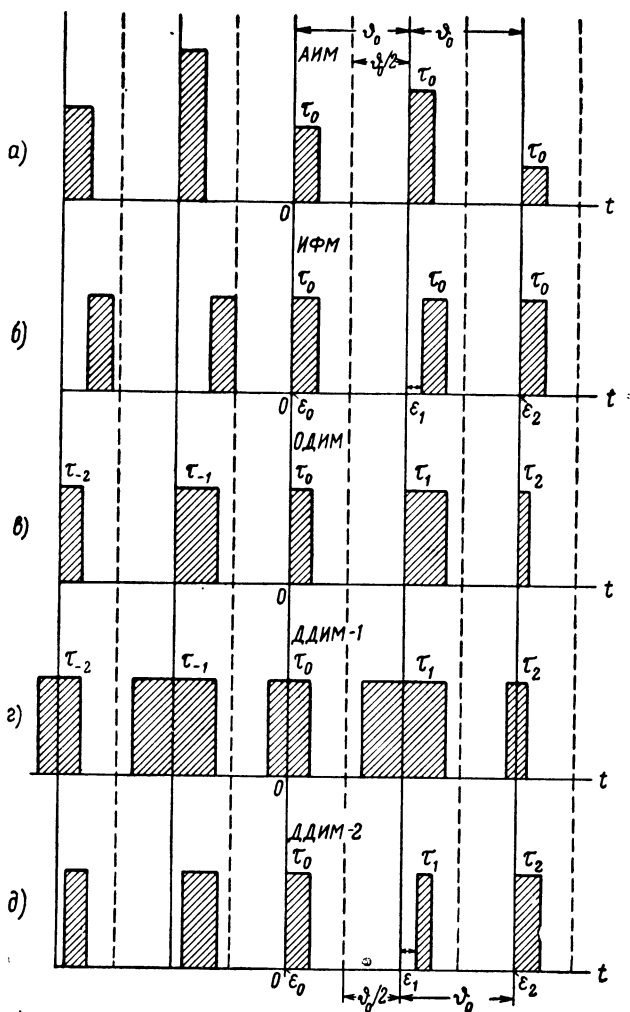


Рис. 6.3. Различные виды импульсной модуляции: а— амплитудно-импульсная модуляция (АИМ); б — импульсно-фазовая модуляция (ИФМ); в — односторонняя модуляция длительности импульсов (ОДИМ); г, д—двухсторонняя модуляция длительности импульсов (ДДИМ-1, ДДИМ-2).

2. Односторонняя модуляция длительности импульсов (ОДИМ), при которой все импульсы начинаются в моменты времени, отстоящие на постоянный период ϑ_0 , а длительность их изменяется в пределах некоторого интервала $(0, \tau_m)$, меньшего ϑ_0 (рис. 6.3, в).

3. Двухсторонняя модуляция длительности импульсов (ДДИМ-1), когда интервал времени между серединами любых двух соседних им-

пульсов одинаков ($\vartheta_0 = \text{const}$), а длительности импульсов случайно изменяются в обе стороны от середины (рис. 6.3, з).

4. Двухсторонняя модуляция длительности импульсов (ДДИМ-2), когда изменяются как длительность, так и положение переднего фронта импульса таким образом, что они не выходят за пределы тактового интервала (рис. 6.3, д).

Во всех четырех видах модуляции не допускается перекрытия импульсов, а положение самих импульсов ограничивается половиной тактового интервала $\vartheta_0/2$.

Рассмотрим несколько обобщенный вариант импульсно-фазовой модуляции. Пусть длительность каждого типового импульса $f(t, \tau_0)$, где $f_{\text{max}}(t, \tau_0) = 1$, постоянна $\tau_i = \tau_0 = \text{const}$, а амплитуды A_i и смещения переднего фронта ε_k случайны, стационарны и независимы как для одного импульса (т. е. при $i = k$), так и для импульсов в разных тактовых интервалах (при $i \neq k$). Для устранения перекрытия импульсов считаем, что сумма длительности импульса τ_0 и максимального смещения ε_{max} не превышает $\vartheta_0/2$.

Применительно к данному случаю в формуле (6.14) нужно положить

$$\left. \begin{aligned} \langle A_k A_{k+n} \rangle &= \langle A^2 \rangle, \quad \tau_k = \tau_{k+n} = \tau_0, \\ \langle \vartheta \rangle &= \vartheta_0, \quad t_k = k\vartheta_0 + \varepsilon_k, \\ t_{k+n} - t_k &= n\vartheta_0 + \varepsilon_{k+n} - \varepsilon_k, \\ \Theta(\omega) &= e^{j\omega\vartheta_0} \langle e^{j\omega(\varepsilon_{k+n} - \varepsilon_k)} \rangle = e^{j\omega\vartheta_0} |\Theta_3(\omega)|^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

где $\Theta_3(\omega) = \langle e^{j\omega\varepsilon} \rangle$ — характеристическая функция смещения ε .

Выделяя члены с $n=0$, $n \geq 1$ и $n \leq -1$, получим

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left\{ \langle A^2 \rangle + \langle A \rangle^2 |\Theta_3(\omega)|^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} (e^{j\omega n\vartheta_0} + e^{-j\omega n\vartheta_0}) \right\} = \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \times \\ &\quad \times \left\{ [\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2] |\Theta_3(\omega)|^2 + \langle A \rangle^2 |\Theta_3(\omega)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \omega n\vartheta_0 \right\}, \quad (6.33) \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n \neq 0$.

Воспользовавшись вторым равенством (6.29), окончательно получим

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left\{ \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 |\Theta_3(\omega)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle A \rangle^2}{\vartheta_0} |\Theta_3(\omega)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \right\}. \quad (6.34) \end{aligned}$$

Отметим, что при $\varepsilon_i = \varepsilon_0 = \text{const}$ рассматриваемая последовательность импульсов будет периодической. В данном случае $|\Theta_3(\omega)| = 1$ и формула (6.34) переходит в (6.31).

Из формулы (6.34) видно, что при $\langle A \rangle \neq 0$ спектр является дискретно-сплошным. Дискретные спектральные линии исчезают при $\langle A \rangle = 0$.

Для импульсно-фазовой модуляции с постоянной амплитудой импульсов $A_i = A_0 = \text{const}$ (рис. 6.3, б) формула (6.34) принимает вид

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left\{ 1 - |\Theta_3(\omega)|^2 + \frac{1}{\vartheta_0} |\Theta_3(\omega)|^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \right\}. \quad (6.35)$$

Спектр по-прежнему остается дискретно-сплошным.¹

Запишем эту формулу аналогично (6.31а):

$$S(\omega) = S_d(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + S_c(\omega), \quad (6.35а)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_d(\omega) &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0^2} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 |\Theta_3(\omega)|^2, \\ S_c(\omega) &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \{1 - |\Theta_3(\omega)|^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.35б)$$

В табл. 6.4 приведены результаты расчетов по формуле (6.35б) для разных форм импульсов (см. табл. 6.1) и разных плотностей вероятностей для смещений моментов появления импульсов $\varepsilon = x$ (см. табл. 6.2) [6]. Амплитуды импульсов считаются одинаковыми, равными A_0 .

Спектральная плотность стационарной последовательности перекрывающихся независимых импульсов. Рассмотрим стационарную последовательность перекрывающихся случайных импульсов (рис. 6.1, б). Как и прежде, запишем какую-либо реализацию $\xi(t)$ на интервале $(0, T)$, содержащем достаточно большое число импульсов $N(T)$, в виде суммы

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{N(T)} A_i f(t - t_i, \tau_i). \quad (6.36)$$

Здесь $f(t - t_i, \tau_i)$ — форма типового импульса, который обращается в нуль вне некоторого интервала $\tau_m \ll T$, $f_{\max}(t, \tau_i) = 1$.

Спектральная плотность при модуляции импульсов по положению (ИФМ)

| Плотность вероятности смещения | Дискретные спектральные линии $S_d(\omega) \delta(\omega - n\omega_0)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{\vartheta_0}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ | Непрерывная часть спектра $S_c(\omega)$ |
|--------------------------------|--|--|
| «Синусоидальная» | $\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} A_0^2 J_0^2(\omega x_0) F_1(\omega, \tau_0) ^2 \times$ $\times \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2}{\vartheta_0} [1 - J_0^2(\omega x_0)]$ |
| Нормальная | $\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} A_0^2 \exp(-\sigma^2 \omega^2) F_1(\omega, \tau_0) ^2 \times$ $\times \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2}{\vartheta_0} [1 - \exp(-\sigma^2 \omega^2)]$ |
| Равномерная | $\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} A_0^2 \left[\frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0} \right]^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2 \times$ $\times \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2}{\vartheta_0} \left[1 - \left\{ \frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0} \right\}^2 \right]$ |
| Сумма двух дельта-функций | $\frac{2\pi}{\vartheta_0^2} \left[1 - 4A_1(1 - A_1) \times \right.$ $\times \sin^2\left(\frac{\omega x_1 - \omega x_2}{2}\right) \left. \right] A_0^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2 \times$ $\times \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2}{\vartheta_0} 4A_1(1 - A_1) \times$ $\times \left[\sin^2\left(\frac{\omega x_1 - \omega x_2}{2}\right) \right]$ |

Отметим, что поскольку в данном случае отдельные импульсы неразрешимы (индивидуально ненаблюдаемы), то нумерация импульсов от $i = 0$ до $N(T)$ имеет теперь условный характер.

С учетом выражения (6.9) запишем исходную формулу (6.4):

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \sum_{i=0}^{N(T)} \sum_{k=0}^{N(T)} A_i A_k F_1^*(\omega, \tau_i) F(\omega, \tau_k) e^{j\omega(t_i - t_k)} \right\rangle. \quad (6.37)$$

Поскольку число импульсов $N(T)$ является случайной величиной, то операция статистического усреднения должна распространяться и на нее. Поэтому можем написать

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\bar{N}(T)} \sum_{k=0}^{\bar{N}(T)} \langle A_i A_k F_1^*(\omega, \tau_i) F(\omega, \tau_k) e^{j\omega(t_i - t_k)} \rangle, \quad (6.38)$$

где $\bar{N}(T) = \langle N(T) \rangle$.

Выделим из суммы (6.38), содержащей $[\bar{N}(T)]^2$ слагаемых, $\bar{N}(T)$ слагаемых с одинаковыми индексами ($i = k$) и остальные $\bar{N}(T) \times [\bar{N}(T) - 1]$ слагаемых с разными индексами ($i \neq k$)

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \sum_{i=0}^{\bar{N}(T)} \langle A_i^2 | F_1(\omega, \tau_i) |^2 \rangle + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^{\bar{N}(T)} \sum_{k=0}^{\bar{N}(T)} \langle A_i A_k F_1^*(\omega, \tau_i) F(\omega, \tau_k) e^{j\omega(t_i - t_k)} \rangle \right\}. \quad (6.39)$$

Предположим, что амплитуды A_i , длительности τ_i и моменты появления t_i для разных импульсов независимы, причем случайные величины A_i , τ_i и t_i стационарны, т. е. соответствующие средние значения не зависят от номера индекса [см. условие (6.43)]. При выполнении этих условий формула (6.39) несколько упрощается

$$S(\omega) = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(T)}{T} \right) \langle A^2 | F_1(\omega, \tau) |^2 \rangle + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(T) [\bar{N}(T) - 1]}{T} \right) \times \\ \times \langle A F_1^*(\omega, \tau) e^{j\omega t_i} \rangle \langle A F_1(\omega, \tau) e^{-j\omega t_k} \rangle. \quad (6.40)$$

Дальнейшие упрощения этой формулы возможны при конкретизации статистических характеристик последовательности перекрывающихся импульсов. Так, например, для случайных импульсов, следующих во времени по закону Пуассона, существуют пределы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(T)}{T} = \lambda, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(T) [\bar{N}(T) - 1]}{T^2} = \lambda^2, \quad (6.41)$$

где λ — среднее число импульсов в единицу времени.

Кроме этого, если в дополнение к взаимной независимости и стационарности импульсов предположить, что амплитуда A_i и длительность τ_i данного импульса не зависят от времени t_i его появления в интервале $(0, T)$, то формула (6.40) примет вид

$$S(\omega) = \lambda \langle A^2 | F_1(\omega, \tau) |^2 \rangle + \lambda^2 \langle A | F_1(\omega, \tau) | \rangle^2 \lim_{T \rightarrow \infty} T | \langle e^{j\omega t_i} \rangle |^2. \quad (6.42)$$

Примем, что моменты появления t_i рассматриваемых импульсов распределены равномерно в интервале $(0, T)$, т. е. имеют плотность вероятности

$$W(t_i) = \frac{1}{T}, \quad 0 \leq t_i \leq T. \quad (6.43)$$

Тогда

$$| \langle e^{j\omega t_i} \rangle |^2 = \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T e^{j\omega t_i} dt_i \right|^2 = 2 \frac{1 - \cos \omega T}{\omega^2 T^2} = \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \right)^2, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} T \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \right)^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 = 2\pi \delta(\omega). \quad (6.44)$$

Последнее соотношение (6.44) написано на том основании, что функция $(\sin \frac{\omega T}{2})^2 / \omega^2 T$ при $T \rightarrow \infty$ всюду равна нулю, за исключением точки $\omega = 0$, однако интеграл от нее имеет конечное значение:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = 2\pi.$$

Введем величину

$$\gamma = \lambda \langle \tau \rangle, \quad (6.45)$$

где $\langle \tau \rangle$ — средняя длительность одного импульса.

Величина γ характеризует «густоту» или плотность импульсов во времени, т. е. число импульсов, приходящихся в среднем на длительность одного импульса. Чем больше γ , тем больше перекрытие импульсов и наоборот.

С учетом соотношений (6.44) и (6.45) формулу (6.42) можно записать в следующем окончательном виде:

$$S(\omega) = \frac{\gamma}{\langle \tau \rangle} \langle A^2 | F_1(\omega, \tau) |^2 \rangle + \frac{\gamma^2}{\langle \tau \rangle^2} \langle A | F_1(\omega, \tau) | \rangle^2 2\pi \delta(\omega). \quad (6.46)$$

Следует иметь в виду, что полученная формула (6.46) справедлива лишь при оговоренных выше допущениях относительно статистических характеристик последовательности перекрывающихся импульсов. При других условиях спектральную плотность нужно вычислять самостоятельно, отправляясь, например, от общей формулы (6.39).

Плотность вероятности пуассоновских импульсов [3]. Так как фактическое вычисление многомерных плотностей вероятностей в большинстве случаев оказывается довольно сложным, ограничимся рассмотрением одномерной плотности вероятности.

Пусть процесс $\xi(t)$ является результатом линейного наложения взаимно независимых случайных импульсов $A_i f(t - t_i, \tau_i)$. Из всего множества реализаций процесса $\xi(t)$ выделим подмножество, которое на достаточно большом интервале $(t_0, t_0 + T)$ содержит точно N импульсов:

$$\xi_N(t) = \sum_{i=0}^N A_i f(t - t_i, \tau_i), \quad t_0 < t < t_0 + T. \quad (6.47)$$

Кроме статистической независимости моментов появления разных импульсов, предположим, что они распределены равномерно на интервале $(t_0, t_0 + T)$. При этих условиях вероятность появления импульсов в интервале длительностью T определяется законом Пуассона [7]

$$P(N, T) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T}, \quad (6.48)$$

где λ — среднее число импульсов в единицу времени.

Пусть $W_1(\xi|N)d\xi$ есть условная вероятность того, что значение случайного процесса $\xi = \xi(t)$, где $t_0 < t < t_0 + T$, попадает в интервал $(\xi, \xi + d\xi)$ при условии, что на всем интервале $(t_0, t_0 + T)$ имеется точно N импульсов. Иначе говоря, $W_1(\xi|N)$ есть плотность вероятности для выделенного подмножества.

Перейдем к безусловной плотности вероятности. Очевидно, что значения процесса, заключенные в интервале $(\xi, \xi + d\xi)$, могут быть получены в разных подмножествах, соответствующих различным N . Так как подмножества «не пересекаются», то разным значениям N соответствуют несовместимые события. Применяя формулу полной вероятности, находим безусловную плотность вероятности

$$W_1(\xi) = \sum_{N=0}^{\infty} P(N, T) W_1(\xi|N). \quad (6.49)$$

Для независимых импульсов легче сначала вычислить характеристическую функцию, а затем по ней найти плотность вероятности. Поэтому целесообразно перейти от плотностей вероятностей к соответствующим характеристическим функциям.

Беря от обеих частей равенства (6.49) преобразование Фурье, получаем соотношение между безусловной и условной характеристическими функциями

$$\Theta_\xi(u) = \sum_{N=0}^{\infty} P(N, T) \Theta_\xi(u|N). \quad (6.50)$$

По определению условная характеристическая функция равна

$$\Theta_\xi(u|N) = \langle \exp [ju\xi_N(t)] \rangle = \left\langle \exp \left[ju \sum_{i=0}^N A_i f(t-t_i, \tau_i) \right] \right\rangle.$$

Здесь статистическое усреднение должно выполняться по всем случайным параметрам (в нашем случае A_i, τ_i, t_i).

Так как в рассматриваемой последовательности отдельные импульсы взаимно независимы, то характеристическая функция суммы N импульсов равна произведению характеристических функций отдельных импульсов, которые для стационарной последовательности одинаковы. Поэтому

$$\Theta_\xi(u|N) = \prod_{i=0}^N \langle \exp [juA_i f(t-t_i, \tau_i)] \rangle = \langle \exp [juA_i f(t-t_i, \tau_i)] \rangle^N.$$

Обозначим совместную плотность вероятности для амплитуды A_i и длительности τ_i типового импульса через $\omega_2(A, \tau)$. Тогда с учетом равномерного закона моментов появления (6.43) можем написать

$$\Theta_\xi(u | N) = \left\{ \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty \omega_2(A, \tau) dA \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{T} \exp[juAf(t-t_i, \tau)] dt_i \right\}^N. \quad (6.51)$$

Подставив выражения (6.48) и (6.51) в формулу (6.50) и воспользовавшись при суммировании ряда известным соотношением

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad (6.52)$$

находим безусловную характеристическую функцию

$$\Theta_\xi(u) = \exp \left(\lambda \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty \omega_2(A, \tau) dA \int_{t_0}^{t_0+T} \{ \exp[juAf(t-t_i, \tau)] - 1 \} dt_i \right). \quad (6.53)$$

Пусть интервал времени T значительно превышает среднюю длительность импульса $\langle \tau \rangle$, и форма импульсов является такой, что фигурирующий в (6.53) интеграл по t_i сходится при любых T . В практических задачах последнее условие выполняется всегда вследствие конечности энергии отдельных импульсов.

При этих условиях пределы интегрирования по t_i можно расширить до $\pm\infty$. Правда теперь будет вноситься ошибка из-за неверного учета небольшого числа импульсов, которые появляются у краев интервала $(t_0, t_0 + T)$ на расстояниях порядка средней длительности импульса. Однако при достаточно больших T эта ошибка будет исчезающе малой.

Учитывая это и переходя в (6.53) от t_i к новой переменной интегрирования $\nu = (t - t_i)/\langle \tau \rangle$, получим

$$\Theta_\xi(u) = \exp \left(\gamma \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty \omega_2(A, \tau) dA \int_{-\infty}^\infty \{ \exp[juAf(\langle \tau \rangle \nu, \tau)] - 1 \} d\nu \right), \quad (6.54)$$

где γ — величина, определенная соотношением (6.45).

Из физических соображений ясно, что параметр γ должен влиять определяющим образом на характеристическую функцию (плотность вероятности) пуассоновских импульсов. Действительно, значение случайного процесса $\xi(t)$ в момент времени t складывается из тех импульсов, которые в основном возникли в интервале времени от $t - \langle \tau \rangle$ до t , так как более ранние импульсы успеют «затухнуть» к моменту времени t . Если импульсы редкие (малое значение γ),

то между последовательными импульсами будут заметны «пустые» промежутки. Поэтому наиболее вероятными будут небольшие значения процесса $\xi(t)$ и отдельные всплески, определяемые амплитудами наиболее часто встречающихся импульсов. Следовательно, при малых γ плотность вероятности будет существенно зависеть от формы отдельных импульсов.

Если параметр γ велик, то значение процесса $\xi(t)$ в момент времени t будет определяться большим числом импульсов. При этом согласно центральной предельной теореме теории вероятностей процесс $\xi(t)$ должен быть близок к нормальному, независимо от формы отдельных импульсов и вида плотности вероятности $\omega_2(A, \tau)$.

Подкрепим эти качественные соображения вычислениями. С этой целью возвратимся от характеристической функции к плотности вероятности, для чего предварительно преобразуем выражение (6.54).

Логарифмируя (6.54), имеем

$$\ln \Theta_{\xi}(u) = \gamma \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(A, \tau) dA \int_{-\infty}^{\infty} \{\exp [juAf(\langle\tau\rangle, \nu, \tau)] - 1\} d\nu.$$

Разложим экспоненту в последнем интеграле в ряд вида (6.52). Поменяв местами операции интегрирования и суммирования, получим

$$\ln \Theta_{\xi}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k, \quad (6.55)$$

где κ_k — кумулянты (семиинварианты):

$$\begin{aligned} \kappa_k &= \gamma \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} A^k \omega_2(A, \tau) dA \int_{-\infty}^{\infty} f^k(\langle\tau\rangle, \nu, \tau) d\nu = \\ &= \lambda \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} A^k \omega_2(A, \tau) dA \int_{-\infty}^{\infty} f^k(z, \tau) dz. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Известно [4], что первый кумулянт κ_1 есть среднее значение m_{ξ} процесса $\xi(t)$, а второй κ_2 — его дисперсия σ_{ξ}^2 . Они равны

$$\begin{aligned} m_{\xi} &= \kappa_1 = \lambda \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} A \omega_2(A, \tau) dA \int_{-\infty}^{\infty} f(z, \tau) dz, \\ \sigma_{\xi}^2 &= \kappa_2 = \lambda \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \omega_2(A, \tau) dA \int_{-\infty}^{\infty} f^2(z, \tau) dz. \end{aligned} \quad (6.57)$$

На основании (6.55) можем представить характеристическую

функцию в следующем виде:

$$\Theta_{\xi}(u) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k \right\}. \quad (6.58)$$

Заметим, что нас интересуют большие значения γ (или λ), когда плотность вероятности $W_1(\xi)$ близка к нормальной. Такие плотности вероятности обычно записывают в виде ряда Эджворта [4]. Для этого достаточно знать кумулянты. К этому же результату можно прийти следующим образом.

Плотность вероятности есть преобразование Фурье от характеристической функции (6.58)

$$W_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\xi}(u) e^{-ju\xi} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -ju\xi + jum_{\xi} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sigma_{\xi}^2 u^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k \right\} du. \quad (6.59)$$

В выражении (6.59) теперь нужно выполнить следующие операции:

1) разложить каждый из экспоненциальных сомножителей (при $k \geq 3$) в степенной ряд

$$\exp \left[\frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k \right\}^m \quad (k \geq 3);$$

2) получающиеся ряды перемножить и сгруппировать члены с одинаковыми степенями u ;

3) воспользоваться известными интегралами [8] и выполнить интегрирование.

После этого придем к следующему результату:

$$W_1(\xi) = \frac{1}{\sigma_{\xi}} \left[\Phi' \left(\frac{\xi - m_{\xi}}{\sigma_{\xi}} \right) - \frac{\kappa_3}{3! \sigma_{\xi}^3} \Phi^{(4)} \left(\frac{\xi - m_{\xi}}{\sigma_{\xi}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_4}{4! \sigma_{\xi}^4} \Phi^{(5)} \left(\frac{\xi - m_{\xi}}{\sigma_{\xi}} \right) + \dots \right], \quad (6.60)$$

где

$$\Phi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \Phi(x); \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} t^2} dt.$$

В формуле (6.60) первый член дает нормальное распределение, а остальные учитывают отклонения от него. Из (6.56) следует, что

кумулянты κ_k пропорциональны λ . Вторым член в квадратных скобках имеет относительно λ порядок $\lambda^{-1/2}$, третий — $\lambda^{-3/2}$ и т. д. Ясно, что с увеличением «частоты» следования импульсов λ роль всех остальных членов по сравнению с первым уменьшается и плотность вероятности $W_1(\xi)$ приближается к нормальной.

Выше мы ограничились приближенным вычислением одномерной плотности вероятности. Все приведенные рассуждения с необходимыми обобщениями применимы также к нахождению многомерных плотностей вероятностей (двумерной, трехмерной и т. д.). Естественно, что при этом все соотношения оказываются более громоздкими и сложными [3].

Можно получить точное интегральное уравнение для одномерной плотности вероятности $W_1(\xi)$ случайного процесса $\xi(t)$, представляющего сумму пуассоновских импульсов [9]. Однако решение уравнения во многих практически интересных случаях оказывается сложным.

Отметим, что выражения для кумулянтов существенно упрощаются, если пуассоновские импульсы имеют одинаковое значение параметра $\tau = \tau_0 = \text{const}$, характеризующего длительность импульсов. В этом частном случае

$$\omega_2(A, \tau) = \omega_1(A) \delta(\tau - \tau_0) \quad (6.61)$$

и из формулы (6.56) получим

$$\kappa_k = \lambda \langle A^k \rangle \int_{-\infty}^{\infty} f(z, \tau_0) dz, \quad (6.62)$$

где $\langle A^k \rangle$ — k -й начальный момент случайной амплитуды импульсов:

$$\langle A^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A^k \omega_1(A) dA. \quad (6.63)$$

§ 2. Примеры

Пример 6.1. Получить выражение спектральной плотности стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов постоянной амплитуды $A = A_0$ и постоянной длительности $\tau = \tau_0$, если временной интервал между началами соседних импульсов $\Phi > \tau_0$ изменяется случайно и независимо от импульса к импульсу. Рассмотреть частный случай прямоугольных импульсов.

Решение. В данном примере выполнены все условия, при которых справедлива формула (6.22). Применительно к рассматриваемому случаю в ней нужно положить

$$\tau = \tau_0, \quad a(\omega) = A_0 F_1(\omega, \tau_0) e^{j\omega\Phi}, \quad b(\omega) = A_0 F_1(\omega, \tau_0).$$

Подставив эти выражения в (6.22), получим

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\Theta(\omega)}{1 - \Theta(\omega)} \right\} + \\
 &+ \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle^2} F_1^2(0, \tau_0) 2\pi\delta(\omega) = \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \operatorname{Re} \left[1 + \frac{2\Theta(\omega)}{1 - \Theta(\omega)} \right] + \\
 &+ \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle^2} F_1^2(0, \tau_0) 2\pi\delta(\omega) = \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \operatorname{Re} \frac{1 + \Theta(\omega)}{1 - \Theta(\omega)} + \\
 &+ \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle^2} F_1^2(0, \tau_0) 2\pi\delta(\omega) = \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \frac{1 - |\Theta(\omega)|^2}{|1 - \Theta(\omega)|^2} + \\
 &+ \frac{A_0^2}{\langle \vartheta \rangle^2} F_1^2(0, \tau_0) 2\pi\delta(\omega). \tag{6.64}
 \end{aligned}$$

Для прямоугольного импульса в (6.64) нужно положить

$$\begin{aligned}
 F_1(\omega, \tau_0) &= \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_0}), \quad |F_1(\omega, \tau_0)|^2 = \\
 &= \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\omega\tau_0}{2} \right), \quad F_1(0, \tau_0) = \tau_0.
 \end{aligned}$$

Тогда получим

$$S(\omega) = \frac{4A_0^2}{\omega^2 \langle \vartheta \rangle} \sin^2 \left(\frac{\omega\tau_0}{2} \right) \frac{1 - |\Theta(\omega)|^2}{|1 - \Theta(\omega)|^2} + \left(\frac{A_0 \tau_0}{\langle \vartheta \rangle} \right)^2 2\pi\delta(\omega). \tag{6.65}$$

Пример 6.2. При передаче двоичных сигналов (телеграфия) применяются случайные импульсы с детерминированным тактовым интервалом следующего вида (рис. 6.4, а). Пауза «0» и посылка «1» независимы, а вероятности их появления на каждом тактовом интервале равны соответственно p_0 и p_1 (обычно $p_0 = p_1 = 0,5$). Найдем спектральную плотность подобной последовательности импульсов, сформулировав задачу так.

Периодически следующие импульсы (с периодом ϑ_0) имеют детерминированную форму $f(t - n\vartheta_0, \tau_0)$, где $\tau_0 = \text{const}$ (рис. 6.4, б). Амплитуды импульсов A_i на разных тактовых интервалах независимы; на каждом интервале амплитуда может принимать лишь два значения: $A_i = U_0$ с вероятностью p_0 и $A_i = U_1$ с вероятностью p_1 , причем $p_0 + p_1 = 1$.

Решение. Применительно к данной задаче формула (6.14) принимает вид

$$S(\omega) = \frac{|F_1(\omega, \tau_0)|^2}{\vartheta_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle A_k A_{k+n} \rangle e^{j\omega n \vartheta_0}. \tag{6.66}$$

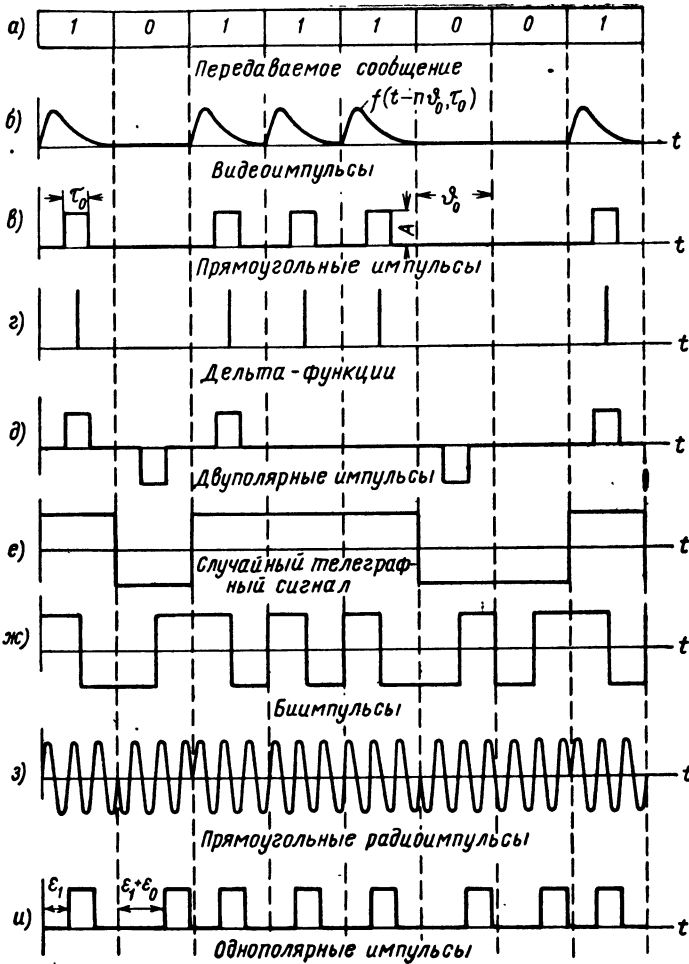


Рис. 6.4. Виды сигналов при разных способах передачи двоичной информации.

Из условия задачи находим

$$\langle A_k A_{k+n} \rangle = \begin{cases} \langle A_k^2 \rangle = \sigma_A^2 + m_A^2 & \text{при } n = 0, \\ \langle A_k \rangle^2 = m_A^2 & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

где

$$m_A = U_0 p_0 + U_1 p_1; \quad \sigma_A^2 = (U_1 - U_0)^2 p_0 p_1. \quad (6.67)$$

Подставив эти выражения в формулу (6.66) и учтя соотношение (6.29), получим

$$S(\omega) = \frac{|F_1(\omega, \tau_0)|^2}{\vartheta_0} \left[\sigma_A^2 + \frac{m_A^2}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \right]. \quad (6.68)$$

Это выражение по виду совпадает с формулой (6.31).

Пример 6.3. Из нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $\sigma_\xi^2 R_\xi(\tau)$

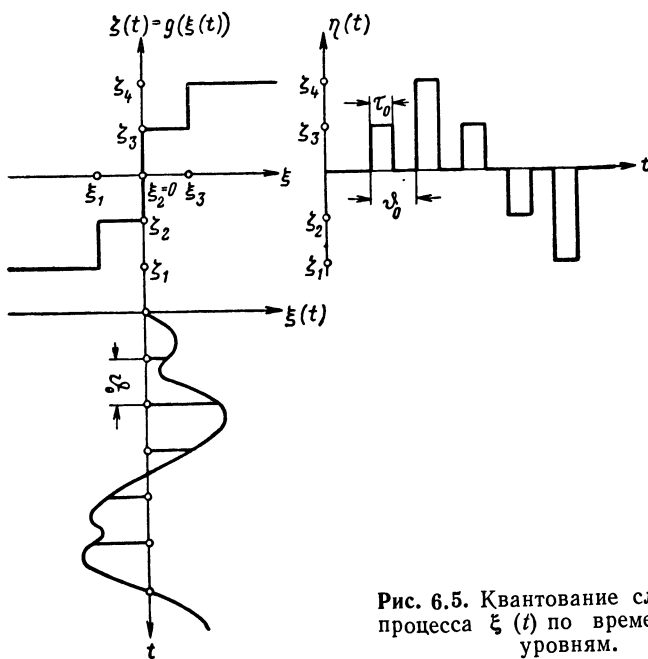


Рис. 6.5. Квантование случайного процесса $\xi(t)$ по времени и по уровням.

берутся периодически (с периодом ϑ_0) отсчеты $\xi(t - i\vartheta_0)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Эти отсчеты при помощи нелинейной ступенчатой функции $\zeta(t) = g(\xi(t))$ подвергаются квантованию по уровням на четыре уровня ζ_m , $m = 1, 2, 3, 4$, причем пороги квантования равны $\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3$ (рис. 6.5). Функция $g(\xi)$ предполагается нечетной, т. е. $g(\xi) = -g(-\xi)$. Получающаяся случайная последовательность значений ζ_m превращается (кодируется) в последовательность прямоугольных импульсов фиксированной длительности $\tau_0 < \vartheta_0$ со случайными амплитудами ζ_m . Нужно вычислить спектральную плотность импульсной последовательности $\eta(t)$, полученной из слу-

чайного процесса $\xi(t)$ при помощи квантования по времени и по уровням.

Решение. К данному примеру применима формула (6.30). При этом получение импульсного процесса $\eta(t)$ целесообразно рассматривать в обратном порядке, а именно, как периодическое (с периодом ϑ_0) временное стробирование прямоугольными импульсами длительностью τ_0 процесса $\zeta(t)$, полученного из исходного процесса $\xi(t)$ при помощи нелинейного преобразования $g(\xi(t))$.

Так как среднее значение процесса $\xi(t)$ равно нулю и функция $g(\xi)$ нечетная, то среднее значение процесса $\zeta(t)$, очевидно, тоже равно нулю, т. е. $m_\zeta = 0$. Поэтому формула (6.30) упрощается

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \sigma_\zeta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_\zeta(n\vartheta_0) \times \\ \times e^{j\omega n\vartheta_0} = \frac{\tau_0^2}{\vartheta_0} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_\zeta(n\vartheta_0) e^{j\omega n\vartheta_0}, \quad (6.69)$$

где $k_\zeta(\tau)$ — функция корреляции процесса $\zeta(t)$.

При написании последнего равенства было учтено, что для прямоугольного импульса единичной высоты и длительности τ_0

$$|F_1(\omega, \tau_0)|^2 = \tau_0^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}} \right)^2.$$

Для определения спектральной плотности $S_\eta(\omega)$ остается вычислить функцию корреляции процесса $\zeta(t)$. Анализируя нелинейное безынерционное преобразование $g(\xi)$ известными методами, можно показать (см. пример 9.7), что

$$k_\zeta(\tau) = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^3 \Delta_m \Phi^{(k)} \left(\frac{\xi_m}{\sigma_\xi} \right) \right]^2 \frac{R_\xi^k(\tau)}{k!}, \quad (6.70)$$

где $\Phi^{(k)}(x)$ — производные от интеграла вероятности; $\Delta_m = \zeta_{m+1} - -\zeta_m$, $m=1, 2, 3$.

Подставив (6.70) в (6.69), получаем окончательный ответ

$$S_\eta(\omega) = \frac{\tau_0^2}{\sigma_\xi^2 \vartheta_0} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n\vartheta_0} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^3 \Delta_m \Phi^{(k)} \left(\frac{\xi_m}{\sigma_\xi} \right) \right]^2 \frac{R_\xi^k(n\vartheta_0)}{k!}. \quad (6.71)$$

Пример 6.4. Вычислить спектральную плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов при односторонней модуляции их по длительности (рис. 6.3, в). Предполагается, что амплитуда импульсов фиксирована ($A_i = A_0 = \text{const}$), моменты появления следуют периодически через интервал ϑ_0 , а длительности импульсов случайны и независимы. Рассмотрим случай прямоугольных импульсов с равномерным распределением длительностей

$$W_1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau_0}, & |\tau - \tau_0| \leq \tau_0 < \vartheta_0, \\ 0, & |\tau - \tau_0| > \tau_0. \end{cases} \quad (6.72)$$

Решение. Полагая в основной формуле (6.14) $A_k = A_{k+n} = A_0$, $\langle \vartheta \rangle = \vartheta_0$, $t_{k+n} - t_k = n\vartheta_0$, имеем

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F_1(\omega, \tau_k) F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) \rangle e^{j\omega n \vartheta_0} = \\ &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \langle F_1(\omega, \tau_k) F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) \rangle e^{j\omega n \vartheta_0} \right\}. \end{aligned}$$

Так как длительности разных импульсов статистически независимы и случайная импульсная последовательность стационарна, то

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle + |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 \left[1 - 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} e^{j\omega n \vartheta_0} \right] \right\} = \\ &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle - |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 + |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n \vartheta_0} \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (6.29), окончательно получим

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle - |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\vartheta_0} |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \right\}. \quad (6.73) \end{aligned}$$

По аналогии с (6.31) запишем эту формулу иначе

$$S(\omega) = S_d(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + S_c(\omega), \quad (6.73a)$$

где

$$S_d(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0^2} |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2; \quad S_c(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle - |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 \}. \quad (6.736)$$

Результаты вычислений по формулам (6.73) для нескольких форм импульсов при различных распределениях длительностей импульсов приведены в табл. 6.5.

Т а б л и ц а 6.5

Спектральная плотность при односторонней модуляции длительности прямоугольных импульсов (ОДИМ-1)

| Плотность вероятности длительности импульсов | Дискретные спектральные линии $S_d(\omega) \delta(\omega - n\omega_0)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{\vartheta_0}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ | Непрерывная часть спектра $S_c(\omega)$ |
|--|--|---|
| «Синусоидальная» | $\frac{2\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2} \left[1 + J_0^2(\omega x_0) - 2J_0(\omega x_0) \cos \omega\tau \right] \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \left[1 - J_0^2(\omega x_0) \right]$ |
| Нормальная | $\frac{2\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2} \left[1 + \exp(-\sigma^2 \omega^2) - 2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2\right) \cos \omega\tau \right] \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} [1 - \exp(-\sigma^2 \omega^2)]$ |
| Равномерная | $\frac{2\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2} \left[1 + \frac{\sin^2(\omega x_0)}{(\omega x_0)^2} - 2 \frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0} \cos \omega\tau \right] \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \left[1 - \frac{\sin^2(\omega x_0)}{(\omega x_0)^2} \right]$ |
| Сумма двух дельта-функций | $\frac{4\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2} \left[1 - A_1 + A_1^2 - A_1 \cos(\omega x_1) - (1 - A_1) \cos(\omega x_2) + A_1(1 - A_1) \times \right. \\ \left. \times \cos\{\omega(x_1 - x_2)\} \right] \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} A_1(1 - A_1) \times \\ \times [1 - \cos\{\omega(x_1 - x_2)\}]$ |

Для прямоугольного импульса с учетом (6.72) можем написать:

$$F_1(\omega, \tau) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}), \quad \langle F_1(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{2\tau_0} \int_0^{2\tau_0} F_1(\omega, \tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega^2 \tau_0} (1 - 2j\omega\tau_0 - e^{-2j\omega\tau_0}),$$

$$|\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 = \frac{1}{\omega^2} \left[1 + \frac{\sin^2 \omega\tau_0}{(\omega\tau_0)^2} - 2 \frac{\sin \omega\tau_0}{\omega\tau_0} \cos \omega\tau_0 \right],$$

$$\langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle = \frac{2}{\omega^2} \left[1 - \frac{\sin \omega\tau_0}{\omega\tau_0} \cos \omega\tau_0 \right].$$

Подставив эти выражения в (6.73б), получим

$$S_d(\omega) = \frac{A_0^2}{(\omega\vartheta_0)^2} \left[1 + \frac{\sin^2 \omega\tau_0}{(\omega\tau_0)^2} - 2 \frac{\sin \omega\tau_0}{\omega\tau_0} \cos \omega\tau_0 \right],$$

$$S_c(\omega) = \frac{A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \left[1 - \frac{\sin^2 \omega\tau_0}{(\omega\tau_0)^2} \right].$$

Пример 6.5. Найдём спектральную плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов при двухсторонней модуляции их по длительности (рис. 6.3, з). Будем считать, что амплитуда импульсов постоянна ($A_i = A_0 = \text{const}$), интервал времени между серединами любых двух соседних импульсов постоянен и равен ϑ_0 , а длительности импульсов случайны и независимы. Выполним вычисления для импульсов прямоугольной формы, когда их длительности распределены по нормальному закону

$$W_1(\tau) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad \sigma \ll \vartheta_0/2. \quad (6.74)$$

Решение. Применительно к рассматриваемому примеру в формуле (6.14) следует положить $A_k = A_{k+n} = A_0$, $t_{k+n} - t_k = n\vartheta_0 +$

$$+ \frac{1}{2} \tau_k - \frac{1}{2} \tau_{k+n}, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{1}{2} \tau_k - \frac{1}{2} \tau_{k+1}, \quad \langle \vartheta \rangle = \vartheta_0.$$

Тогда получим

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F_1(\omega, \tau_k) F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{j\omega(\tau_k - \tau_{k+n})/2} \rangle e^{j\omega n \vartheta_0}.$$

Так как длительности разных импульсов независимы и импульсная последовательность стационарна, то

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle + |\langle F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2} \rangle|^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} e^{j\omega n \vartheta_0} \right\}.$$

Выполнив те же преобразования, что и в предыдущем примере, получим окончательную формулу

$$S(\omega) = S_d(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + S_c(\omega), \quad (6.75)$$

где

$$S_d(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0^2} \langle |F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2}|^2 \rangle; \quad (6.75a)$$

$$S_c(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle - \langle |F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2}|^2 \rangle \}. \quad (6.75b)$$

Здесь $S_d(\omega)$ определяет интенсивность дискретных спектральных линий при частотах $f = m/\vartheta_0$; $S_c(\omega)$ — непрерывная часть спектральной плотности.

Для прямоугольного импульса находим

$$F_1(\omega, \tau) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}), \quad F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2} = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2},$$

$$|F_1(\omega, \tau)|^2 = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega\tau).$$

Воспользовавшись при статистическом усреднении с плотностью вероятности (6.74) известным интегралом [8]

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right), \quad \text{Re } \beta > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \langle F_1(\omega, \tau) e^{j\omega\tau/2} \rangle &= \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau_0}{2} \exp\left(-\frac{1}{8} \sigma^2 \omega^2\right), \quad \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle = \\ &= \frac{2}{\omega^2} \left[1 - \cos \omega\tau_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Подстановка этих соотношений в формулы (6.75) дает выражение спектральной плотности независимых прямоугольных импульсов при двухсторонней модуляции их по длительности

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= A_0^2 \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{4} \sigma^2 \omega^2\right), \quad S_c(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \times \\ &\times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2\right) \cos \omega\tau_0 - 2 \exp\left(-\frac{1}{4} \sigma^2 \omega^2\right) \sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2} \right]. \end{aligned}$$

Результаты вычислений для нескольких форм импульсов при разных распределениях длительностей приведены в табл. 6.6 [6].

Т а б л и ц а 6.6
Спектральная плотность при двухсторонней модуляции длительности импульсов (ДДИМ-2)

| Плотность вероятности импульсов | Дискретные спектральные линии $S_d(\omega) \delta(\omega - n\omega_0)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{\vartheta_0}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ | Непрерывная часть спектра $S_c(\omega)$ |
|---------------------------------|---|---|
| «Синусоидальная» | $2\pi A_0^2 \left(\frac{\tau}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \left[1 - J_0(\omega x_0) \cos(\omega\tau) - 2J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]$ |
| Нормальная | $2\pi A_0^2 \left(\frac{\tau}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \exp\left(-\frac{1-\sigma^2\omega^2}{4}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{1-\sigma^2\omega^2}{2}\right) \cos(\omega\tau) - \right. \\ \left. - 2 \exp\left(-\frac{1-\sigma^2\omega^2}{4}\right) \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]$ |
| Равномерная | $2\pi A_0^2 \left(\frac{\tau}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)^2} \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \left[1 - \frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0} \cos(\omega\tau) - 2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega x_0}{2}\right)^2} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]$ |
| Сумма двух дельта-функций | $\frac{8\pi A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2} \left[A_1 \sin\left(\frac{\omega x_1}{2}\right) + (1 - A_1) \sin\left(\frac{\omega x_2}{2}\right) \right]^2 \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{4A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} A_1 (1 - A_1) \left[\sin\left(\frac{\omega x_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega x_2}{2}\right) \right]^2$ |

| | | |
|--|--|---|
| <p>Плотность вероятности импульсов</p> | <p>Дискретные спектральные линии</p> $S_d(\omega) \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\theta_0}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ | <p>Непрерывная часть спектра</p> $S_c(\omega)$ |
| <p>Нормальная</p> | <p>Гауссов импульс</p> $\frac{\pi^2 A_0^2 \tau^2}{2\theta_0^2 \ln 2} \left[\frac{8 \ln 2}{\sigma^2 \omega^2 + 8 \ln 2} \right]^3 \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{\sigma^2 \omega^2 + 8 \ln 2}\right) \times \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{\pi A_0^2 \tau^2}{4\theta_0 \ln 2} \left[\frac{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^2} \left(1 + \frac{\sigma^2 \omega^2}{4 \ln 2}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma^2 \omega^2}{4 \ln 2}\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{2\sigma^2 \omega^2 + 8 \ln 2}\right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma^2 \omega^2}{8 \ln 2}\right)^3} \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{\sigma^2 \omega^2 + 8 \ln 2}\right) \right]$ |
| <p>Равномерная</p> | $\frac{2\pi}{\theta_0} \left[\frac{A_0^2 \pi 16 \ln 2}{\omega^4 x_0^2} \exp\left(-\frac{\omega^2 \{\tau^2 + x_0^2\}}{8 \ln 2}\right) \times \text{sh}^2\left(\frac{\omega^2 x_0}{8 \ln 2}\right) \right] \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2 \pi}{2\omega^2 \theta_0 x_0} \left[2 \exp\left\{-b^2 \left(\tau^2 + x_0^2\right)\right\} \{\tau \text{sh}(2b^2 \tau x_0) - x_0 \text{ch}(2b^2 \tau x_0)\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \left\{ \text{erf}\left(\frac{\tau + x_0}{b}\right) - \text{erf}\left(\frac{\tau - x_0}{b}\right) \right\} - \frac{4}{b^2 x_0} \exp\left\{-b^2 \left(\tau^2 + x_0^2\right)\right\} \text{sh}^2(b^2 \tau x_0) \right],$ <p style="text-align: center;">$b^2 = \omega^2 / 8 \ln 2$</p> |
| <p>Сумма двух дельта-функций</p> | $\frac{2\pi}{\theta_0} \left[\frac{\pi A_0^2}{4 \ln 2} \right] \left[A_1 x_1 \exp\left(-\frac{\omega^2 x_1}{16 \ln 2}\right) + (1 - A_1) x_2 \exp\left(-\frac{\omega^2 x_2}{16 \ln 2}\right) \right] \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\frac{A_0^2}{\theta_0} \left(\frac{\pi}{4 \ln 2} \right) A_1 (1 - A_1) \times \left[x_1 \exp\left(-\frac{\omega^2 x_1}{16 \ln 2}\right) - x_2 \exp\left(-\frac{\omega^2 x_2}{16 \ln 2}\right) \right]^2$ |

Пример 6.6. Найти спектральную плотность стационарной последовательности модулирующих импульсов постоянной амплитуды ($A_i = A_0 = \text{const}$) при двухсторонней модуляции длительности импульсов (ДДИМ-2, см. рис. 6.3, δ). Предполагается, что длительности импульсов τ_i и смещения ε_i моментов их появления относительно тактового интервала ϑ_0 независимы для любых пар импульсов, причем $0 \leq \tau_i + \varepsilon_i \leq \vartheta_0$ (отсутствие перекрытия). Рассмотрим частный случай прямоугольных импульсов, у которых смещения и длительности независимы и распределены равномерно в интервале $\left(0, \frac{1}{2}\vartheta_0\right)$, т. е.

$$W_1(\tau) = \frac{1}{\tau_0}, \quad W_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad \tau_0 = \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\vartheta_0. \quad (6.76)$$

Решение. Воспользуемся основной формулой (6.14). С учетом равенств (6.32) и сформулированных условий эта формула принимает вид

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F_1(\omega, \tau_k) F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{j\omega(n\vartheta_0 + \varepsilon_{k+n} - \varepsilon_k)} \rangle = \\ &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} e^{j\omega n\vartheta_0} \langle F_1(\omega, \tau_k) e^{-j\omega\varepsilon_k} \rangle \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle F_1^*(\omega, \tau_{k+n}) e^{j\omega\varepsilon_{k+n}} \rangle \right\} = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle |F_1^*(\omega, \tau) e^{j\omega\varepsilon} |^2 \left[1 - 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} e^{j\omega n\vartheta_0} \right] \right\} = \\ &= \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle - \langle |F_1^*(\omega, \tau) e^{j\omega\varepsilon} |^2 \right. \\ &\quad \left. + \langle |F_1^*(\omega, \tau) e^{j\omega\varepsilon} |^2 \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \right\}. \quad (6.77) \end{aligned}$$

Здесь при переходе к сумме дельта-функций была использована формула (6.29).

Если длительности τ_i и смещения ε_k независимы не только для любых двух разных ($i \neq k$) импульсов, но и для одного и того же импульса (т. е. при $i = k$), то формула (6.77) упрощается

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle - \langle |F_1^*(\omega, \tau) \Theta_3(\omega) |^2 \right. +$$

$$+ |\langle F_1^*(\omega, \tau) \rangle \Theta_3(\omega)|^2 \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \Big\}, \quad (6.78)$$

где $\Theta_3(\omega) = \langle e^{j\omega\varepsilon} \rangle$ — характеристическая функция смещения ε .

Для прямоугольного импульса с учетом (6.76) можем написать

$$\begin{aligned} F_1^*(\omega, \tau) &= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega\tau} - 1), \quad \langle F_1^*(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} F_1^*(\omega, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega^2 \tau_0} (1 + j\omega\tau_0 - e^{j\omega\tau_0}), \\ |\langle F_1(\omega, \tau) \rangle|^2 &= \frac{2}{\omega^4 \tau_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} (\omega\tau_0)^2 - \cos \omega\tau_0 - \omega\tau_0 \sin \omega\tau_0 \right], \\ \langle |F_1(\omega, \tau)|^2 \rangle &= \frac{2}{\omega^3 \tau_0} (\omega\tau_0 - \sin \omega\tau_0). \end{aligned}$$

Зная плотность вероятности (6.76) для смещения ε , находим характеристическую функцию

$$\Theta_3(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} e^{j\omega\varepsilon} d\varepsilon = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} (e^{j\omega\varepsilon_0} - 1), \quad |\Theta_3(\omega)|^2 = \frac{2}{(\omega\varepsilon_0)^2} (1 - \cos \omega\varepsilon_0).$$

Известно, что квадрат модуля произведения двух комплексных величин равен произведению квадратов модулей сомножителей. Если учесть, что $\tau_0 = \varepsilon_0 = \vartheta_0/2$ и подставить написанные соотношения в (6.78), то получим выражение для спектральной плотности случайной последовательности независимых прямоугольных импульсов

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{A_0^2 \vartheta_0}{2x^6 \sqrt{\pi}} \left\{ x^3 (x - \sin x) - (x^2 + 2 - 2 \cos x - 2x \sin x) \times \right. \\ &\times (1 - \cos x) + (x^2 + 4 - 4 \cos x - x^2 \cos x - 2x \sin x) \times \\ &\left. \times \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) \right\}, \quad x = \omega\vartheta_0/2. \end{aligned}$$

Укажем, что при записи сомножителя перед суммой дельта-функций было учтено, что дельта-функции отличны от нуля лишь в точках $f = m/\vartheta_0$, т. е. при $\omega\vartheta_0 = 2\pi m$. В этих точках $2 \cos^2 x + 2x \sin x \cos x = (1 + \cos 2x) - x \sin 2x = 2$.

Пример 6.7. Требуется найти функцию корреляции и спектральную плотность случайного телеграфного сигнала $\xi(t)$, принимающего с одинаковыми вероятностями, равными 1/2, лишь два

значения: $+a$ и $-a$ (рис. 6.6). Моменты скачков (перемен знака) распределены по закону Пуассона, т. е. вероятность получения N скачков в интервале $(0, T)$ равна

$$P(N, T) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T}. \quad (6.79)$$

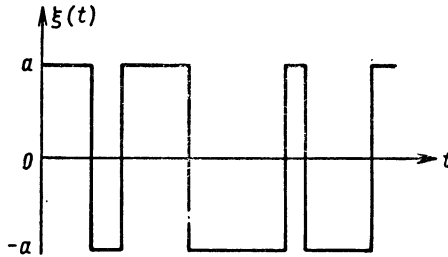


Рис. 6.6. Случайный телеграфный сигнал.

Решение [1]. Очевидно, что среднее значение рассматриваемого импульсного процесса равно нулю ($\langle \xi(t) \rangle = 0$), а среднее значение произведения $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle$ равно a^2 , если $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$ одного знака, и равно $-a^2$, если они противоположного знака. В первом случае в интервале $(t, t + \tau)$ будет четное число перемен знака (включая и нуль), а во втором случае — нечетное число. Поэтому

$$k_{\xi}(\tau) = a^2 P_{\text{чет}} - a^2 P_{\text{неч}},$$

где $P_{\text{чет}}$ и $P_{\text{неч}}$ — вероятности четного и нечетного числа скачков за время $\tau > 0$.

Согласно (6.79) имеем

$$\begin{aligned} P_{\text{чет}} &= P(0, \tau) + P(2, \tau) + \dots = e^{-\lambda\tau} \left[1 + \frac{1}{2!} (\lambda\tau)^2 + \dots \right] = \\ &= e^{-\lambda\tau} \text{ch}(\lambda\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{неч}} &= P(1, \tau) + P(3, \tau) + \dots = e^{-\lambda\tau} \left[\lambda\tau + \frac{1}{3!} (\lambda\tau)^3 + \dots \right] = \\ &= e^{-\lambda\tau} \text{sh}(\lambda\tau). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$k_{\xi}(\tau) = a^2 e^{-\lambda\tau} [\text{ch}(\lambda\tau) - \text{sh}(\lambda\tau)] = a^2 e^{-2\lambda\tau}, \quad \tau > 0.$$

Так как процесс $\xi(t)$ стационарен, то

$$k_{\xi}(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}. \quad (6.80)$$

Зная функцию корреляции, находим спектральную плотность

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} k_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \frac{4a^2 \lambda}{\omega^2 + 4\lambda^2}.$$

§ 3. Задачи и ответы

6.1. Случайная функция $\xi(t)$ образована последовательностью примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов, амплитуды и длительности которых случайны и независимы (рис. 6.7). Плотности вероятности для амплитуд и длительностей заданы:

$$\omega_1(A) = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(A - m_A)^2}{2\sigma_A^2} \right]; W_1(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}, \tau > 0.$$

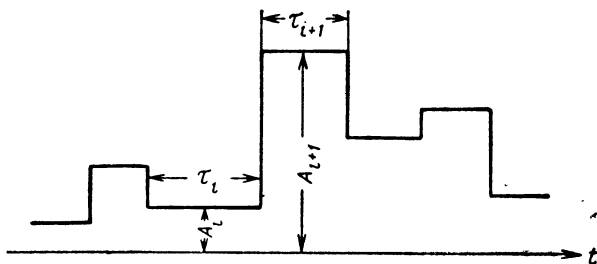


Рис. 6.7. Случайная последовательность примыкающих прямоугольных импульсов.

Вычислить спектральную плотность и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \sigma_A^2 + m_A^2 2\pi \delta(\omega), \quad k(\tau) = \sigma_A^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

У к а з а н и е. Следует воспользоваться формулой (6.25), положив $\Delta = 0$.

6.2. Найти спектральную плотность стационарной последовательности прямоугольных импульсов с постоянной амплитудой $A = A_0$, когда импульсы и промежутки между ними имеют одинаковый закон распределения.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\omega^2 \langle \tau \rangle} \operatorname{Re} \frac{1 - \Theta_1(\omega)}{1 + \Theta_1(\omega)} + \frac{1}{2} A_0^2 \pi \delta(\omega) = \frac{A_0^2}{\omega^2 \langle \tau \rangle} \frac{1 - |\Theta_1(\omega)|^2}{|1 + \Theta_1(\omega)|^2} + \frac{1}{2} A_0^2 \pi \delta(\omega).$$

У к а з а н и е. Нужно воспользоваться формулой (6.26).

6.3. Вычислить спектральную плотность стационарной последовательности независимых прямоугольных импульсов с постоян-

ной амплитудой $A = A_0$ и постоянной длительностью $\tau = \tau_0$, если промежутки между соседними импульсами имеют показательный закон распределения

$$W_1(\Delta) = \beta e^{-\beta\Delta}, \quad \Delta > 0.$$

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{2A_0^2 \beta (1 - \cos \omega\tau_0)}{\omega^2 (1 + \beta\tau_0) \left[\left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 (1 - \cos \omega\tau_0)^2 + \left(1 + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega\tau_0 \right)^2 \right]} + \left(\frac{A_0 \beta \tau_0}{1 + \beta\tau_0} \right)^2 2\pi \delta(\omega).$$

6.4. Найти спектральную плотность стационарной последовательности независимых прямоугольных импульсов с постоянной амплитудой $A = A_0$ и постоянной длительностью промежутков между импульсами $\Delta = \Delta_0$, когда длительности импульсов распределены по показательному закону

$$W_1(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}, \quad \tau > 0.$$

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{2\alpha A_0^2 (1 - \cos \omega\Delta_0)}{\omega^2 (1 + \alpha\Delta_0)} \left[\left(\frac{\alpha}{\omega} \right)^2 (1 - \cos \omega\Delta_0)^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega\Delta_0 \right)^2 \right]^{-1} + \left(\frac{\alpha A_0 \Delta_0}{1 + \alpha\Delta_0} \right)^2 2\pi \delta(\omega).$$

6.5. Вычислить спектральную плотность и функцию корреляции стационарной последовательности независимых импульсов прямоугольной формы с постоянной амплитудой $A = A_0$, когда длительности импульсов и промежутки между соседними импульсами имеют показательные законы распределения:

$$W_1(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}, \quad \tau > 0; \quad W_1(\Delta) = \beta e^{-\beta\Delta}, \quad \Delta > 0.$$

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{2\alpha\beta A_0^2}{\alpha + \beta} \frac{1}{\omega^2 + (\alpha + \beta)^2} + \left(\frac{\beta A_0}{\alpha + \beta} \right)^2 2\pi \delta(\omega),$$

$$k(\tau) = \frac{\alpha\beta A_0^2}{(\alpha + \beta)^2} e^{-(\alpha + \beta)|\tau|}.$$

6.6. Периодические выборки (с периодом θ_0) стационарного случайного процесса $\zeta(t)$, имеющего среднее значение m_ζ и функцию корреляции $k_\zeta(\tau) = \sigma_\zeta^2 e^{-\alpha|\tau|}$, превращаются в прямоугольные импульсы постоянной длительности $\tau_0 = \text{const}$ (см. рис. 6.2).

Определить спектральную плотность получающейся периодической последовательности прямоугольных импульсов со случайными амплитудами $A_i = \zeta(t - i\vartheta_0)$.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left[\sigma_{\zeta}^2 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\vartheta_0} \cos \omega n \vartheta_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{m_{\zeta}^2}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right] = \frac{4}{\omega^2 \vartheta_0} \sin^2 \frac{\omega \tau_0}{2} \times \\ \times \left[\frac{\text{sh } \vartheta_0}{\text{ch } \vartheta_0 - \cos \omega \vartheta_0} \sigma_{\zeta}^2 + \frac{m_{\zeta}^2}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right].$$

6.7. Независимые одинаковые импульсы треугольной формы (см. табл. 6.1)

$$f(t - i\vartheta_0, \tau_0) = \begin{cases} (t + \tau_0)/\tau_0, & i\vartheta_0 - \tau_0 \leq t \leq i\vartheta_0, \\ (\tau_0 - t)/\tau_0, & i\vartheta_0 \leq t \leq i\vartheta_0 + \tau_0, \quad \tau_0 \leq \vartheta_0/2, \\ 0 & \text{при других } t, \end{cases}$$

следуют периодически с периодом ϑ_0 . Плотность вероятности амплитуды импульсов имеет вид

$$W_1(A) = \begin{cases} \left[\pi \sqrt{x_0^2 - (A - m_A)^2} \right]^{-1}, & |A - m_A| < x_0, \\ 0 & |A - m_A| > x_0. \end{cases}$$

Найти спектральную плотность такой случайной импульсной последовательности.

Ответ: (см. табл. 6.3)

$$S(\omega) = \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^4 \left[\frac{1}{2} x_0^2 \vartheta_0 + m_A^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right].$$

6.8. Получить результаты, приведенные в табл. 6.3.

У к а з а н и е. Следует воспользоваться формулами (6.31).

6.9. По каналу связи передается двоичная информация. Независимые посылки и паузы равновероятны и передаются периодически с тактовым интервалом ϑ_0 . Посылке соответствует прямоугольный импульс постоянной амплитуды A_0 и постоянной длительности τ_0 , а паузе — отсутствие импульса (рис. 6.4, в).

Найти спектральную плотность последовательности импульсов.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{1}{4} A_0^2 \vartheta_0 \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right].$$

У к а з а н и е. Следует воспользоваться формулами (6.68) и (6.67).

6.10. Решить задачу 6.9 для случая, когда посылке соответствует импульс в виде дельта-функции $A_0 \delta \left[t - \left(i + \frac{1}{2} \right) \vartheta_0 \right]$, а паузе — отсутствие импульса (рис. 6.4, з).

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} \left\{ 1 + \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right\}.$$

У к а з а н и е. Дельта-функцию $\delta(t)$ можно рассматривать как бесконечно узкий симметричный прямоугольный импульс ($\tau_0 \rightarrow 0$) высотой $1/\tau_0$ и длительностью τ_0 . Поэтому в ответе к задаче 6.9 нужно вместо A_0 подставить A_0/τ_0 и затем перейти к пределу при $\tau_0 \rightarrow 0$.

6.11. Независимые и равновероятные посылки и паузы представляют собой прямоугольные импульсы постоянной длительности $\tau = \vartheta_0$ и постоянной амплитуды A_0 , но противоположной полярности (посылке соответствует $+A_0$, паузе соответствует $-A_0$). Посылки и паузы следуют периодически через постоянный интервал времени ϑ_0 (рис. 6.4, е).

Вычислить спектральную плотность и функцию корреляции такого случайного телеграфного сигнала.

Ответ [1]:

$$S(\omega) = A_0^2 \vartheta_0 \left(\frac{\sin \frac{\omega \vartheta_0}{2}}{\frac{1}{2} \omega \vartheta_0} \right)^2, \quad k(\tau) = A_0^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\vartheta_0} \right), \quad |\tau| < \frac{1}{2} \vartheta_0.$$

6.12. Пусть посылке соответствует сигнал $A_0 f(t - i\vartheta_0, \vartheta_0)$, а паузе соответствует сигнал $-A_0 f(t - i\vartheta_0, \vartheta_0)$, где

$$f(t - i\vartheta_0, \vartheta_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } i\vartheta_0 \leq t < \left(i + \frac{1}{2} \right) \vartheta_0, \\ -1 & \text{при } \left(i + \frac{1}{2} \right) \vartheta_0 \leq t < (i + 1)\vartheta_0. \end{cases}$$

Посылки и паузы независимы, равновероятны и следуют во времени периодически с периодом ϑ_0 (рис. 6.4, ж).

Требуется вычислить спектральную плотность указанной случайной последовательности биимпульсов.

Ответ:

$$S(\omega) = A_0^2 \vartheta_0 \left(\frac{\sin^2 \frac{\omega \vartheta_0}{4}}{\frac{1}{4} \omega \vartheta_0} \right)^2.$$

6.13. На линейное устройство (рис. 6.8), состоящее из линии задержки на время ϑ_0 , вычитающей схемы и идеального низкочастотного усилителя с коэффициентом усиления K_0 , воздействует слу-

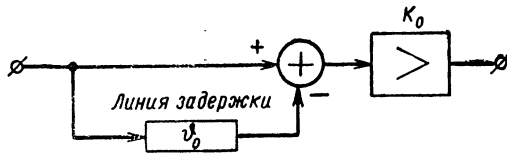


Рис. 6.8. Схема линейного устройства.

чайная последовательность двоичных сигналов, указанная в задаче 6.9 (рис. 6.4, в).

Определить спектральную плотность случайной последовательности импульсов на выходе устройства (см. рис. 6.4, д).

Ответ:

$$S(\omega) = A_0^2 K_0^2 \vartheta_0 \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2} \sin \frac{\omega \vartheta_0}{2}}{\frac{1}{2} \omega \tau_0} \right)^2.$$

У к а з а н и е. Передаточная функция рассматриваемого устройства равна

$$K(j\omega) = K_0 (1 - e^{-j\omega \vartheta_0}).$$

6.14. Напряжение случайно появляющихся дельта-функций $A_0 \delta \left[t - \left(i + \frac{1}{2} \right) \vartheta_0 \right]$, указанных в задаче 6.10 (рис. 6.4 з), воздействует на интегрирующую цепочку RC , причем $RC \ll \vartheta_0$.

Найти спектральную плотность напряжения в виде случайной последовательности непрерывных экспоненциальных импульсов на конденсаторе C .

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0 [1 + (\omega RC)^2]} \left\{ 1 + \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right\}.$$

6.15. Двоичный сигнал в виде случайно следующих дельта-функций $A_0 \delta \left[t - \left(i + \frac{1}{2} \right) \vartheta_0 \right]$, указанных в задаче 6.10, воздействует на фильтр нижних частот с гауссовой передаточной функцией $K(j\omega) = K_0 \exp \left[-\frac{\pi}{8} \left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \right)^2 \right]$, где $\frac{2\pi}{\Delta\omega} \ll \vartheta_0$.

Найти спектральную плотность случайной последовательности гауссовых импульсов на выходе фильтра.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{A_0^2 K_0^2}{\vartheta_0} \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \right)^2 \right] \left\{ 1 + \frac{1}{\vartheta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right\}.$$

6.16. Двоичная информация передается при помощи детерминированных сигналов с фазовой манипуляцией. Независимые и равновероятные посылки и паузы передаются периодически в течение всего тактового интервала $\vartheta_0 = \text{const}$. Посылке соответствует прямоугольный радиоимпульс $A \sin \omega_0 t$ длительностью ϑ_0 , а паузе соответствует радиоимпульс $-A \sin \omega_0 t$ той же длительности (рис. 6.4, з). Амплитуда A и частота ω_0 — постоянные величины.

Считая $\omega_0 \vartheta_0 = 2\pi n$, где n — любое целое положительное число, найти спектральную плотность случайной последовательности прямоугольных радиоимпульсов.

Ответ:

$$S(\omega) = A^2 \vartheta_0 \left[\frac{2\pi n \sin(\omega \vartheta_0 / 2)}{(\omega \vartheta_0)^2 - (2\pi n)^2} \right]^2.$$

6.17. Передача двоичной информации осуществляется при помощи импульсно-фазовой манипуляции. Посылка передается прямоугольным видеоимпульсом с амплитудой $A_0 = \text{const}$, длительностью $\tau_0 = \text{const}$ и временным положением относительно тактового интервала $\varepsilon = \varepsilon_1 = \text{const}$ (рис. 6.4, u). Пауза передается тем же прямоугольным импульсом, но его положение относительно тактового интервала равно $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \text{const}$. Каждый из импульсов не выходит за пределы своего тактового интервала, т. е. $0 \leq \varepsilon_1 \leq \vartheta_0 - \tau_0$, $0 \leq \varepsilon_2 \leq \vartheta_0 - \tau_0$. Посылки и паузы независимы и равновероятны.

Найти спектральную плотность такой случайной последовательности прямоугольных импульсов.

Ответ:

$$S(\omega) = A_0^2 \vartheta_0 \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\omega \tau_0 / 2} \right)^2 \times \\ \times \left\{ 1 - \cos^2 \frac{\omega \varepsilon_0}{2} + \frac{1}{\vartheta_0} \cos^2 \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right\}.$$

У к а з а н и е . Следует воспользоваться формулой (6.35). В данном случае плотность вероятности для смещения ε равна

$$W_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) + \frac{1}{2} \delta(\varepsilon - \varepsilon_2).$$

6.18. В квазипериодической стационарной последовательности независимых импульсов, имеющих одинаковую форму, но случайные амплитуды A_i , смещения ε моментов появления импульсов относительно тактового интервала, равного ϑ_0 , распределены по нормальному закону

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right),$$

где $\sigma_\varepsilon \ll \vartheta_0$ (отсутствие наложения импульсов).

Вычислить спектральную плотность импульсного случайного процесса. Рассмотреть частный случай, когда амплитуды импульсов постоянны ($A_i = A_0 = \text{const}$).

Ответ [10]:

$$S(\omega) = \frac{1}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left\{ \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \exp(-\sigma_\varepsilon^2 \omega^2) + \right. \\ \left. + \frac{\langle A \rangle^2}{\vartheta_0} \exp(-\sigma_\varepsilon^2 \omega^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right\},$$

$$S(\omega) = \frac{A_0^2}{\vartheta_0} |F_1(\omega, \tau_0)|^2 \left\{ 1 - \exp(-\sigma_\varepsilon^2 \omega^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\vartheta_0} \exp(-\sigma_\varepsilon^2 \omega^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{m}{\vartheta_0} \right) \right\}.$$

6.19. Получить результаты, приведенные в табл. 6.4.

У к а з а н и е . Нужно воспользоваться формулами (6.35).

6.20. Независимые периодически повторяющиеся (с периодом ϑ_0) прямоугольные импульсы с постоянной амплитудой A_0 имеют плотность вероятности длительности импульсов

$$W_1(\tau) = A_1 \delta(\tau - \tau_1) + (1 - A_1) \delta(\tau - \tau_2).$$

Найти спектральную плотность импульсного случайного процесса.

Ответ:

$$S(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0^2} [1 - A_1 + A_1^2 - A_1 \cos \omega \tau_1 - (1 - A_1) \cos \omega \tau_2 + \\ + A_1(1 - A_1) \cos \omega(\tau_2 - \tau_1)] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + \\ + \frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} A_1(1 - A_1) [1 - \cos \omega(\tau_2 - \tau_1)].$$

У к а з а н и е. Следует воспользоваться формулами (6.73).

6.21. Получить результаты, приведенные в табл. 6.5.

У к а з а н и е. Нужно использовать формулы (6.73).

6.22. Найти спектральную плотность стационарной последовательности неперекрывающихся импульсов при двухсторонней модуляции их по длительности (рис. 6.3, з). Амплитуда импульсов постоянна $A_0 = \text{const}$, интервал времени между серединами любых двух соседних импульсов также постоянен и равен ϑ_0 , а длительности импульсов случайны, независимы и имеют плотность вероятности

$$W_1(\tau) = \begin{cases} \left[\pi \sqrt{x_0^2 - (\tau - \tau_0)^2} \right]^{-1}, & |\tau - \tau_0| < x_0 \\ 0, & |\tau - \tau_0| > x_0. \end{cases}$$

Ответ:

$$S(\omega) = A_0^2 \left(\frac{\tau_0}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right)^2} J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{\vartheta_0}\right) + \\ + \frac{2A_0^2}{\omega^2 \vartheta_0} \left[1 - J_0(\omega x_0) \cos(\omega \tau_0) - 2J_0^2\left(\frac{\omega x_0}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) \right],$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

6.23. Получить результаты, приведенные в табл. 6.6.

У к а з а н и е. Нужно воспользоваться формулами (6.75).

6.24. Найти спектральную плотность стационарной последовательности независимых перекрывающихся пуассоновских импульсов прямоугольной формы, длительность которых τ распределена по показательному закону

$$W_1(\tau) = a e^{-a\tau}, \quad \tau > 0.$$

Амплитуда импульса A_i и его длительность τ_i — независимые случайные величины. Среднее число импульсов, появляющихся в единицу времени, равно λ .

Ответ [3.11]:

$$S(\omega) = \frac{2\gamma\alpha \langle A^2 \rangle}{\alpha^2 + \omega^2} + 2\pi\gamma^2 \langle A \rangle^2 \delta(\omega), \quad \gamma = \lambda/\alpha.$$

У к а з а н и е. Нужно воспользоваться формулой (6.46) и учесть, что $\delta(\omega) \neq 0$ только при $\omega = 0$.

6.25. В плоскопараллельном диоде, работающем в режиме насыщения, моменты вылета электронов с катода независимы и описываются законом Пуассона. Пренебрегая начальными скоро-

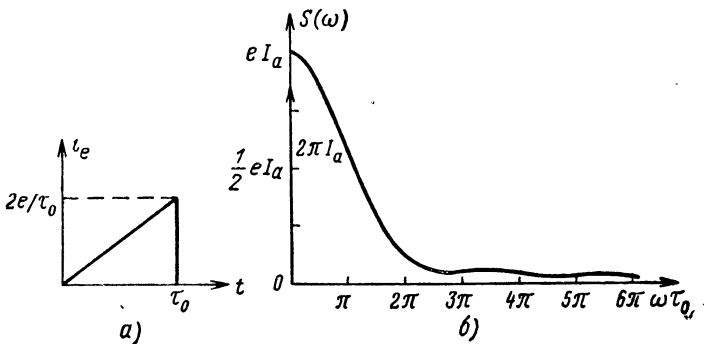


Рис. 6.9. Элементарный импульс анодного тока (а) и спектральная плотность дробового шума (б).

стями вылета электронов из катода, можно считать, что пролет каждого электрона от катода до анода наводит в анодной цепи треугольный импульс тока (рис. 6.9, а)

$$i_e(t) = \begin{cases} 2et/\tau_0^2, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0 & \text{при других } t, \end{cases}$$

где e — заряд электрона; τ_0 — время пролета электрона от катода до анода. Среднее значение анодного тока равно $I_a = e\lambda$, где λ — среднее число электронов, попадающих на анод в единицу времени.

Вычислить и построить график спектральной плотности дробового шума. Определить значение непрерывной части спектра $S_c(\omega)$ при нулевой частоте.

Ответ [7]:

$$S(\omega) = 2\pi I_a^2 \delta(\omega) + eI_a \frac{4}{(\omega\tau_0)^4} [(\omega\tau_0)^2 + 2(1 - \cos \omega\tau_0 - \omega\tau_0 \sin \omega\tau_0)],$$

$$S_c(0) = eI_a.$$

График спектральной плотности изображен на рис. 6.9, б.

6.26. Показать, что для треугольных пуассоновских импульсов, указанных в задаче 6.25, в правой части формулы (6.60) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым при условии $(\lambda\tau_0)^{-1/2} \ll 1$, т. е. когда за время пролета электрона τ_0 на анод поступает большое число электронов.

Ответ [12]:

$$\frac{\kappa_3}{3! \sigma_{\xi}^3} = \frac{\kappa_3}{3! \kappa_2^{3/2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (\lambda\tau_0)^{-1/2} \ll 1.$$

У к а з а н и е. При вычислении коэффициента при втором слагаемом в формуле (6.60) следует воспользоваться соотношениями (6.62) и учесть, что в данной задаче $A = 2e/\tau_0 = \text{const}$.

Литература

1. Rice S. O. Mathematical analysis of random noise. BSTJ, 1944, т. 23, № 3; 1945, т. 24, № 1.
Райс С. Теория флуктуационных шумов. В сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех». Пер с англ. Изд-во иностранной литературы, 1953.
2. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. Пер. с англ. Изд-во «Наука», 1965.
3. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 1. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1961.
4. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.
6. Kaufman H., King E. H. Spectral power density functions in pulse time modulation. IRE Trans., Information theory, 1955, IT-1, № 1.
7. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1960.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
9. Gilbert E. N., Pollak H. O. Amplitude distribution of shot noise. BSTJ, 1960, в. 39, № 2.
10. Macfarlane G. G. On the energy spectrum of an almost periodic succession of pulses. Proc. IRE, 1949, в. 37, № 10.
11. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд-во «Советское радио», 1966.
12. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Изд-во «Наука», 1966.

7. УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Теоретические сведения

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ называется узкополосным, если ширина полосы Δf той области частот, где спектральная плотность $S(f)$ практически отлична от нуля, мала по сравнению с некоторой средней частотой f_0 этой области (рис. 7.1), т. е.

$$S(f) \neq 0 \text{ при } f_0 - \frac{1}{2} \Delta f \leq f \leq f_0 + \frac{1}{2} \Delta f, \quad \Delta f \ll f_0. \quad (7.1)$$

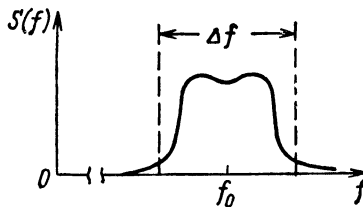


Рис. 7.1. Спектральная плотность узкополосного процесса.

Корреляционная функция узкополосного случайного процесса всегда может быть представлена в виде [1]

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 [\rho_c(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \rho_s(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau] = \sigma^2 \rho(\tau) \cos [\omega_0 \tau + \gamma(\tau)], \quad (7.2)$$

где

$$\rho(\tau) = \sqrt{\rho_c^2(\tau) + \rho_s^2(\tau)}; \quad \operatorname{tg} \gamma(\tau) = -\frac{\rho_s(\tau)}{\rho_c(\tau)}; \quad \gamma(0) = 0; \quad (7.3)$$

$$\sigma^2 \rho_c(\tau) = \int_{-\infty}^{f_0} S(f_0 - \nu) \cos 2\pi \nu \tau d\nu; \quad \sigma^2 \rho_s(\tau) = \int_{-\infty}^{f_0} S(f_0 - \nu) \sin 2\pi \nu \tau d\nu. \quad (7.4)$$

Функции $\rho_c(\tau)$, $\rho_s(\tau)$, как и $\rho(\tau)$, $\gamma(\tau)$, являются медленно изменяющимися по сравнению с $\cos \omega_0 \tau$.

В том частном случае, когда спектральная плотность $S(f)$ симметрична относительно центральной частоты f_0 , функция корреляции узкополосного процесса имеет вид

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau = \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} S(f_0 - \nu) \cos 2\pi \nu \tau d\nu. \quad (7.5)$$

По виду реализации узкополосного процесса напоминают модулированное гармоническое колебание. Поэтому часто используют представление узкополосного процесса в следующем виде:

$$\xi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t - \varphi(t)], \quad A(t) \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi(t) \leq \pi, \quad (7.6)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно изменяющиеся функции времени (по сравнению с $\cos \omega_0 t$); их называют соответственно огибающей и фазой процесса.

Можно также ввести понятие мгновенной частоты, определив ее равенством

$$\omega(t) = \omega_0 - \dot{\varphi}(t) = -\frac{\dot{A}_s(t) A_c(t) - \dot{A}_c(t) \dot{A}_s(t)}{A_s^2(t) + A_c^2(t)} + \omega_0, \quad (7.7)$$

где точкой сверху обозначены производные по времени.

Форма представления узкополосного процесса (7.6) не единственная; узкополосный процесс можно представить иначе:

$$\xi(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (7.8)$$

где

$$A_c(t) = A(t) \cos \varphi(t); \quad A_s(t) = A(t) \sin \varphi(t). \quad (7.9)$$

Отсюда следует, что

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_s(t)}{A_c(t)}. \quad (7.10)$$

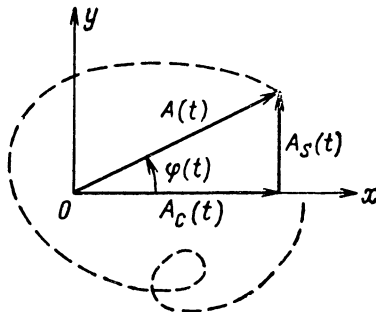


Рис. 7.2. Геометрическое представление узкополосного процесса.

Формулы (7.10) позволяют интерпретировать огибающую $A(t)$ как длину вектора, проекции которого на оси прямоугольной системы координат равны $A_s(t)$ и $A_c(t)$. Угол между осью абсцисс и направлением вектора равен $\varphi(t)$ (рис. 7.2). Длина вектора и его фазовый угол изменяются во времени случайным образом.

Пользуясь математическим определением огибающей, можно показать, что если исходный стационарный узкополосный процесс $\xi(t)$ является нормальным, то вспомогательные случайные процессы $A_c(t)$ и $A_s(t)$ являются также нормальными и стационарными с нулевыми средними значениями $\langle A_c(t) \rangle = \langle A_s(t) \rangle = 0$, а их авто- и взаимно корреляционные функции равны

$$\left. \begin{aligned} \langle A_c(t_1) A_c(t_2) \rangle &= \langle A_s(t_1) A_s(t_2) \rangle = \sigma^2 \rho_c(t_2 - t_1), \\ \langle A_c(t_1) A_s(t_2) \rangle &= -\langle A_c(t_2) A_s(t_1) \rangle = \sigma^2 \rho_s(t_2 - t_1). \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Если спектр $S(f)$ узкополосного процесса симметричен относительно частоты f_0 , то нормальные стационарные процессы $A_c(t_1)$ и $A_s(t_2)$ не коррелированы и, следовательно, независимы.

Соотношения (7.11) позволяют сравнительно просто находить различные совместные плотности вероятности огибающей, фазы и их производных, отправляясь от известной многомерной нормальной плотности вероятности стационарно связанных процессов $A_c(t)$ и $A_s(t)$ и переходя затем в ней к огибающей $A(t)$ и фазе $\varphi(t)$ согласно соотношениям (7.10).

Если имеется сумма узкополосного нормального стационарного шума $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]$ и детерминированного гармонического сигнала $s(t) = A_m \cos \omega_0 t$, то можно определить огибающую и фазу такой суммы при помощи соотношений

$$s(t) + \xi(t) = V(t) \cos[\omega_0 t - \psi(t)], \quad V(t) \geq 0, \quad -\pi \leq \psi(t) \leq \pi, \quad (7.12)$$

где

$$V(t) = \sqrt{[A_m + A_c(t)]^2 + A_s^2(t)}; \quad \operatorname{tg} \psi(t) = \frac{A_s(t)}{A_m + A_c(t)}. \quad (7.13)$$

При этом остается в силе геометрическая интерпретация, аналогичная приведенной выше (см. рис. 7.2).

Одномерные плотности вероятности огибающей $V(t)$ и случайной фазы $\psi(t)$ для суммы сигнала и узкополосного шума определяются формулами

$$W(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2 + A_m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A_m V}{\sigma^2}\right), \quad V \geq 0, \quad (7.14)$$

$$W(\psi) = \frac{1}{2\pi} e^{-a^2/2} \left[1 + \sqrt{2\pi} a \cos \psi \Phi(a \cos \psi) e^{a^2 \cos^2 \psi / 2}\right], \quad -\pi \leq \psi \leq \pi.$$

$$(7.15)$$

Здесь $a = A_m/\sigma$ — отношение сигнал/шум, $I_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности (2.9).

Полагая в формулах (7.14) и (7.15) $A_m = 0$, получаем соответствующие плотности вероятности для огибающей и фазы одного узкополосного шума

$$W(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad A \geq 0, \quad (7.16)$$

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (7.17)$$

Среднее значение и дисперсия огибающей $V(t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} m_V &= \langle V(t) \rangle = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}a^2\right) = \\ &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right) I_0\left(\frac{1}{4}a^2\right) + \frac{1}{2}a^2 I_1\left(\frac{1}{4}a^2\right) \right] e^{-a^2/4}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\sigma_V^2 = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right) - m_V^2, \quad (7.19)$$

где ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; $I_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка от мнимого аргумента [2].

Функции корреляции огибающей $A(t)$ и квадрата огибающей $A^2(t)$ узкополосного процесса $\xi(t)$ равны соответственно

$$\begin{aligned} k_A(\tau) &= \frac{\pi}{2} \sigma^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rho^2(\tau) + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \rho^4(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \rho^6(\tau) + \dots \right] \simeq \frac{\pi}{8} \sigma^2 \rho^2(\tau), \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$k_{A^2}(\tau) = 4\sigma^4 \rho^2(\tau). \quad (7.21)$$

Аналогичные формулы для огибающей $V(t)$ суммы детерминированного гармонического сигнала и узкополосного шума имеют вид

$$k_V(\tau) \simeq \begin{cases} \frac{\pi}{8} \sigma^2 \left[\rho^2(\tau) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 a^2 \rho(\tau) \right], & a \ll 1, \\ \sigma^2 \rho(\tau) \left[1 + \frac{1}{2a^2} \rho(\tau) \right], & a \gg 1, \end{cases} \quad (7.22)$$

$$k_{V^2}(\tau) = 4\sigma^4 [\rho^2(\tau) + a^2 \rho(\tau)]. \quad (7.23)$$

Укажем, что в дальнейшем, при формулировке отдельных задач, предполагается, что огибающие $A(t)$ и $V(t)$ с некоторым коэффи-

циентом пропорциональности воспроизводятся на выходе линейного амплитудного детектора огибающей, квадраты огибающих $A^2(t)$ и $V^2(t)$ — на выходе квадратичного амплитудного детектора огибающей, косинусы случайных фаз $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — на выходе фазового детектора и случайные частоты $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{\psi}(t)$ — на выходе частотного детектора.

§ 2. Примеры

Пример 7.1. Найти совместную плотность вероятности $W_4(V, \dot{V}, \psi, \dot{\psi})$ огибающей $V(t)$, фазы $\psi(t)$ и их первых производных $\dot{V}(t)$, $\dot{\psi}(t)$ в один и тот же момент времени для суммы (7.12) гармонического сигнала и узкополосного нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \rho(0) = 1. \quad (7.24)$$

Решение. Согласно (7.5) спектральная плотность рассматриваемого узкополосного процесса $\xi(t)$ симметрична относительно частоты $f_0 = \omega_0/2\pi$. Поэтому вспомогательные нормальные стационарные процессы $A_c(t)$ и $A_s(t)$ независимы, причем их автокорреляционные функции равны

$$\langle A_c(t) A_c(t + \tau) \rangle = \langle A_s(t) A_s(t + \tau) \rangle = \sigma^2 \rho(\tau). \quad (7.25)$$

Известно, что производная (скорость) нормального стационарного процесса есть также нормальный стационарный процесс; значение производной не зависит от значения самого процесса в тот же момент времени. Поэтому случайные переменные $A_c(t)$, $A_s(t)$, $\dot{A}_c(t)$, $\dot{A}_s(t)$ взаимно независимы, причем каждая из них нормально распределена. Дисперсии этих переменных равны

$$\left. \begin{aligned} \langle A_c^2(t) \rangle &= \langle A_s^2(t) \rangle = \sigma^2, \\ \langle \dot{A}_c^2(t) \rangle &= \langle \dot{A}_s^2(t) \rangle = -\sigma^2 \rho''_0, \quad \rho''_0 = \left. \frac{d^2 \rho(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

На основании известного выражения нормальной плотности вероятности записываем совместную плотность вероятности

$$\begin{aligned} \omega_4(A_c, A_s, \dot{A}_c, \dot{A}_s) &= \frac{1}{4\pi^2 \sigma^4 (-\rho''_0)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 (-\rho''_0)} \times \right. \\ &\quad \left. \times [-\rho''_0 (A_c^2 + A_s^2) + (\dot{A}_c^2 + \dot{A}_s^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Перейдем в (7.27) от переменных $A_c, A_s, \dot{A}_c, \dot{A}_s$ к новым переменным $V, \dot{V}, \psi, \dot{\psi}$ при помощи соотношений, следующих из (7.9), (7.12) и (7.13):

$$A_c = V \cos \psi - A_m, \quad A_s = V \sin \psi,$$

$$\dot{A}_c = \dot{V} \cos \psi - \dot{\psi} V \sin \psi, \quad \dot{A}_s = \dot{V} \sin \psi + \dot{\psi} V \cos \psi.$$

Нетрудно убедиться, что модуль якобиана преобразования переменных равен

$$\left| \frac{\partial (A_c, A_s, \dot{A}_c, \dot{A}_s)}{\partial (V, \dot{V}, \psi, \dot{\psi})} \right| = V^2.$$

Поэтому получим

$$W_4(V, \dot{V}, \psi, \dot{\psi}) = \frac{V^2}{4\pi^2\sigma^4(-\rho_0'')} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(-\rho_0'')} \times \right.$$

$$\left. \times [-\rho_0''(V^2 + A_m^2 - 2A_m V \cos \psi) + \dot{V}^2 + V^2 \dot{\psi}^2] \right\}. \quad (7.28)$$

Проинтегрировав (7.28) по \dot{V} и $\dot{\psi}$ в пределах от $-\infty$ до ∞ , получим совместную плотность вероятности для огибающей и фазы в один и тот же момент времени:

$$W_2(V, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_4(V, \dot{V}, \psi, \dot{\psi}) d\dot{\psi} d\dot{V} =$$

$$= \frac{V}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (V^2 + A_m^2 - 2A_m V \cos \psi) \right\}, \quad V \geq 0. \quad (7.29)$$

Из (7.29) следуют приведенные ранее формулы (7.14) — (7.17).

Если выражение (7.28) проинтегрировать сначала по $\dot{\psi}$ в пределах от $-\infty$ до ∞ , а затем по ψ в пределах от $-\pi$ до π , то получим совместную плотность вероятности для огибающей и ее производной

$$W_2(V, \dot{V}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} W_4(V, \dot{V}, \psi, \dot{\psi}) d\dot{\psi} = W(V) \omega(\dot{V}), \quad (7.30)$$

где плотность вероятности $W(V)$ дается соотношением (7.14), а $\omega(\dot{V})$ является нормальной плотностью вероятности:

$$\omega(\dot{V}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}(-\rho_0'')} \exp \left[-\frac{\dot{V}^2}{2\sigma^2(-\rho_0'')} \right]. \quad (7.31)$$

Пример 7.2. Пусть на вход радиоприемника, упрощенная функциональная схема которого приведена на рис. 7.3, воздейст-

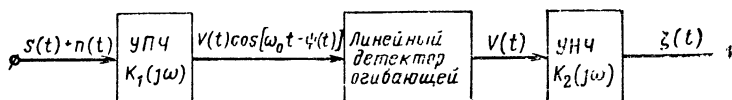


Рис. 7.3. Упрощенная функциональная схема радиоприемника.

вует сумма детерминированного гармонического сигнала $s(t) = A_m \cos 2\pi f_0 t$ и нормального стационарного белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью $S_n(f) = N_0$. Квадраты модулей передаточных функций усилителя промежуточной частоты (УПЧ) и усилителя низкой частоты (УНЧ) имеют вид гауссовых кривых

$$|K_1(j\omega)|^2 = K_1^2 \exp \left[-\pi \left(\frac{f-f_0}{\Delta f_1} \right)^2 \right], \quad \Delta f_1 \ll f_0, \quad \omega = 2\pi f,$$

$$|K_2(j\omega)|^2 = K_2^2 \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{f}{\Delta f_2} \right)^2 \right],$$

где Δf_1 и Δf_2 — энергетические полосы усилителей.

Нужно вычислить среднее значение и функцию корреляции напряжения $\zeta(t)$ на выходе УНЧ при больших и малых отношениях сигнал/шум.

Решение. Очевидно, что сигнал на выходе УПЧ равен

$$s_1(t) = K_1 A_m \cos 2\pi f_0 t,$$

а спектральная плотность шума на выходе УПЧ определяется известным соотношением

$$S_1(f) = N_0 |K_1(j\omega)|^2 = K_1^2 N_0 \exp \left[-\pi \left(\frac{f-f_0}{\Delta f_1} \right)^2 \right].$$

Такой спектральной плотности соответствует функция корреляции

$$k_1(\tau) = \int_0^{\infty} S_1(f) \cos 2\pi f \tau df = \sigma_1^2 \exp [-\pi (\Delta f_1 \tau)^2] \cos 2\pi f_0 \tau, \quad (7.32)$$

$$\sigma_1^2 = K_1^2 N_0 \Delta f_1.$$

Нормальный стационарный шум на выходе УПЧ при условии $f_0 \gg \Delta f_1$ является узкополосным, причем его спектральная плотность симметрична относительно центральной частоты f_0 . Поэтому сумма гармонического сигнала и узкополосного шума на выходе УПЧ может быть записана в виде (7.12).

Введем отношение сигнал/шум на входе линейного детектора огибающей

$$a = K_1 A_m / \sigma_1 = A_m / \sqrt{N_0 \Delta f_1}.$$

Пользуясь результатами решения задачи 7.1, а именно, соотношениями (7.43) и (7.44), находим среднее значение напряжения на выходе детектора

$$m_v = A_m K_1 \left(1 + \frac{1}{4a^2} \right), \quad a > 3; \quad m_v = \sigma_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{4} a^2 \right), \quad a < 1. \quad (7.33)$$

Для интересующих нас случаев больших и малых отношений сигнал/шум функция корреляции напряжения на выходе линейного детектора огибающей дается формулой (7.22), которая применительно к рассматриваемому случаю принимает вид

$$k_V(\tau) = \begin{cases} \sigma_1^2 \exp[-\pi(\Delta f_1 \tau)^2] \left\{ 1 + \frac{1}{2a^2} \exp[-\pi(\Delta f_1 \tau)^2] \right\}, & a > 3, \quad (7.34) \\ \frac{\pi}{8} \sigma_1^2 \left\{ \exp[-2\pi(\Delta f_1 \tau)^2] + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 a^2 \exp[-\pi(\Delta f_1 \tau)^2] \right\}, & a < 1. \quad (7.35) \end{cases}$$

Воспользовавшись известным интегралом [2]

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right), \quad \beta > 0, \quad (7.36)$$

находим спектральные плотности, соответствующие корреляционным функциям (7.34) и (7.35):

$$\begin{aligned} S_V(f) &= 4 \int_0^{\infty} k_V(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = \\ &= \begin{cases} \frac{2\sigma_1^2}{\Delta f_1} \exp\left[-\pi\left(\frac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right] \left\{ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}a^2} \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right] \right\}, & a > 3, \\ \frac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{2}\Delta f_1} \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\frac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right] \left\{ 1 + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sqrt{2}a^2 \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\frac{f}{\Delta f_1}\right)^2\right] \right\}, & a < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как коэффициент усиления УНЧ при $f = 0$ равен K_2 , то среднее значение напряжения на выходе УНЧ, очевидно, равно

$$m_\zeta = \begin{cases} K_1 K_2 A_m \left(1 + \frac{1}{4a^2} \right), & a > 3, \\ K_2 \sigma_1^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{4} a^2 \right), & a < 1. \end{cases} \quad (7.37)$$

Спектральная плотность напряжения $\zeta(t)$ на выходе УНЧ определяется соотношением

$$S_\zeta(f) = S_V(f) |K_2(j\omega)|^2. \quad (7.38)$$

Согласно известной формуле по спектральной плотности находим функцию корреляции

$$k_\zeta(\tau) = \int_0^{\infty} S_\zeta(f) \cos 2\pi f \tau df. \quad (7.39)$$

Выполнив вычисления при помощи (7.36), получим

$$k_{\zeta}(\tau) = \begin{cases} 2\sigma_1^2 K_2^2 \nu \left[\sqrt{\frac{1}{1+4\nu^2}} \exp\left(-\pi \frac{(2\Delta f_1 \tau)^2}{1+4\nu^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}a^2} \sqrt{\frac{1}{1+2\nu^2}} \exp\left(-\pi \frac{(2\Delta f_2 \tau)^2}{1+2\nu^2}\right) \right], & a > 3; \\ \frac{\pi\sigma_1^2}{4\sqrt{2}} \nu \left[\sqrt{\frac{1}{1+2\nu^2}} \exp\left(-\pi \frac{(2\Delta f_1 \tau)^2}{1+2\nu^2}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sqrt{2}a^2 \sqrt{\frac{1}{1+4\nu^2}} \exp\left(-\pi \frac{(2\Delta f_2 \tau)^2}{1+4\nu^2}\right) \right], & a < 1, \end{cases} \quad (7.40)$$

где

$$\nu = \Delta f_2 / \Delta f_1. \quad (7.41)$$

Можно рассмотреть разные частные случаи формулы (7.40). В частности, можно убедиться, что при $\nu \gg 1$ справедливо соотношение

$$k_{\zeta}(\tau) \simeq K_2^2 k_V(\tau), \quad \nu \gg 1. \quad (7.42)$$

Этому результату можно дать следующее пояснение. Если полосы пропускания усилителя низкой частоты значительно больше полосы пропускания усилителя промежуточной частоты (т. е. $\nu \gg 1$), то низкочастотный спектр напряжения на выходе линейного детектора огибающей воспроизводится усилителем низкой частоты практически без искажений; все спектральные составляющие усиливаются в одинаковое число K_2^2 раз.

§ 3. Задачи и ответы

7.1. Установить разный характер изменения среднего значения и дисперсии огибающей $V(t)$ от отношения сигнал/шум $a = A_m/\sigma$ для малых и больших значений a .

Ответ [1]:

$$m_V = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} a^2\right)}, \quad \sigma_V = \sigma \sqrt{\frac{4-\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} a^2\right)}, \quad a < 1, \quad (7.43)$$

$$m_V = A_m \sqrt{1 + \frac{1}{2a^2}} \simeq A_m \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right), \quad \sigma_V = \sigma, \quad a > 3. \quad (7.44)$$

У к а з а н и е. Нужно в формуле (7.18) воспользоваться следующими асимптотическими представлениями функций Бесселя:

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \left[1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \dots\right], \quad x < 1, \quad (7.45)$$

$$I_n(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + \frac{1-4n^2}{8x} + \dots \right], \quad x \gg 1. \quad (7.46)$$

7.2. Найти среднее значение и дисперсию квадрата огибающей $V(t)$.

Ответ:

$$m_{V^2} = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{2} a^2 \right), \quad \sigma_{V^2}^2 = 4\sigma^4 (1 + a^2).$$

7.3. Показать, что при больших отношениях сигнал/шум случайную фазу $\psi(t)$ и ее производную $\dot{\psi}(t)$ можно приближенно считать стационарными нормальными процессами.

Ответ:

$$\psi(t) \simeq \frac{A_s(t)}{A_m}, \quad \dot{\psi}(t) \simeq \frac{\dot{A}_s(t)}{A_m}, \quad a \gg 1.$$

У к а з а н и е. Во второй формуле (7.13) при больших отношениях сигнал/шум можно пренебречь $A_c(t)$ по сравнению с A_m и, учитывая преобладающую роль малых значений $\psi(t)$, положить $\text{tg } \psi(t) \simeq \psi(t)$.

7.4. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right) \quad (7.47)$$

записан в виде

$$\xi(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Определить автокорреляционные функции $\langle A_c(t) A_c(t+\tau) \rangle$, $\langle A_s(t) A_s(t+\tau) \rangle$ и взаимную корреляционную функцию $\langle A_c(t) \times A_s(t+\tau) \rangle$.

Ответ:

$$\begin{aligned} \langle A_c(t) A_c(t+\tau) \rangle &= \langle A_s(t) A_s(t+\tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \\ \langle A_c(t) A_s(t+\tau) \rangle &= \frac{\alpha}{\omega_0} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \text{sgn} \tau, \end{aligned}$$

где $\text{sgn } x$ — специальная ступенчатая функция, определяемая соотношением

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

У к а з а н и е. В данном случае функцию корреляции (7.47) целесообразно представить в виде

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \operatorname{sgn} \tau \sin \omega_0 \tau \right). \quad (7.48)$$

7.5. Решить задачу 7.4 для случая, когда корреляционная функция стационарного процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{\pi \Delta f \tau} \cos 2\pi f_0 \tau.$$

Ответ:

$$\langle A_c(t) A_c(t + \tau) \rangle = \langle A_s(t) A_s(t + \tau) \rangle = \sigma^2 \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{\pi \Delta f \tau},$$

$$\langle A_c(t) A_s(t + \tau) \rangle = 0.$$

7.6. На рис. 7.4 приведена схема, представляющая собой последовательное соединение перемножителя и идеального низкочастотного фильтра, пропускающего практически без искажений

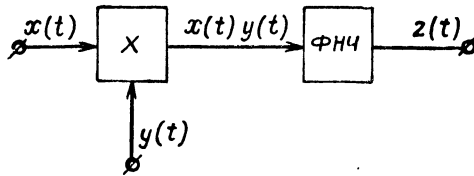


Рис. 7.4. Функциональная схема «синхронного» детектора.

низкочастотную часть спектра и не пропускающего высокочастотную часть. На один вход перемножителя подается гармонический сигнал $s(t) = A_1 \sin \omega_0 t$, а на другой — узкополосный случайный шум $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \quad \alpha \ll \omega_0.$$

Определить функцию корреляции $k(\tau)$ на выходе фильтра.

Ответ:

$$k(\tau) = \frac{1}{4} A_1^2 \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

7.7. Найти отношение сигнал/шум на выходе фильтра схемы рис. 7.4, когда на один вход перемножителя воздействует сумма сигнала и шума $s(t) + \xi(t)$, а на другой — сигнал $s(t)$. Сигнал $s(t)$ и шум $\xi(t)$ те же, что и в задаче 7.6.

Ответ:

$$a = A_1 / \sigma.$$

7.8. На два разных входа перемножителя подаются два независимых узкополосных процесса $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Показать, что мощность (дисперсия) выходного процесса $\xi(t) = \xi_1(t)\xi_2(t)$ распределена поровну между низкочастотной и высокочастотной областями спектра.

У к а з а н и е. Для решения задачи можно воспользоваться представлением корреляционной функции узкополосного процесса формулой (7.2) и учесть, что $\gamma(0) = 0$.

7.9. На «синхронный» детектор (рис. 7.4) воздействует сумма сигнала и шума

$$x(t) = s(t) + \xi(t),$$

а также опорное гармоническое колебание $y(t) = A_m \cos \omega_0 t$. Сигналом $s(t)$ является модулированное по случайному закону гармоническое колебание $s(t) = A(t) \cos \omega_0 t$, где $A(t)$ — независимый от $\xi(t)$ стационарный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_A(f) = \begin{cases} S_0 & \text{при } 0 \leq f \leq F/2, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Стационарный шум $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и спектральную плотность

$$S_\xi(f) = \begin{cases} N_0 & \text{при } f_0 - \frac{1}{2}F \leq f \leq f_0 + \frac{1}{2}F, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра низких частот постоянна и отлична от нуля лишь при частотах $0 \leq f \leq F$.

Найти отношение мощности (дисперсии) сигнала σ_s^2 к мощности (дисперсии) шума σ^2 на выходе фильтра.

Ответ:

$$\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{N_0} \right).$$

7.10. Спектральная плотность узкополосного случайного процесса имеет вид

$$S_\xi(f) = \begin{cases} N_0 & \text{при } f_0 - \frac{1}{2}\Delta f \leq f \leq f_0 + \frac{1}{2}\Delta f, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Найти корреляционную функцию огибающей этого процесса.

Ответ:

$$k_A(\tau) \simeq \frac{\pi}{8} N_0 \Delta f \left(\frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau} \right)^2.$$

7.11. Корреляционная функция узкополосного случайного процесса равна

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Определить корреляционную функцию квадрата огибающей процесса.

Ответ:

$$k_{A^2}(\tau) = 4\sigma^4 e^{-2\alpha|\tau|}.$$

7.12. Вычислить плотность вероятности квадрата огибающей нормального узкополосного процесса, имеющего дисперсию σ^2 .

Ответ:

$$W(\eta) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\eta/2\sigma^2}, \quad \eta = A^2 \geq 0.$$

7.13. Найти плотность вероятности косинуса фазы $\psi(t)$ суммы гармонического сигнала $s(t) = A_m \cos \omega_0 t$ и нормального узкополосного шума $\xi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]$ с дисперсией σ^2 .

Ответ [1]:

$$W(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-z^2}} e^{-a^2/2} \left[1 + \sqrt{2\pi} a z \Phi(a z) e^{\frac{1}{2} a^2 z^2} \right],$$

$$a = \frac{A_m}{\sigma}, \quad -1 \leq z = \cos \psi \leq 1.$$

7.14. Имеется два нормальных независимых стационарных случайных процесса $x(t)$ и $y(t)$, имеющих одинаковые дисперсии $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, но разные средние значения m_x и m_y .

Найти плотность вероятности случайного процесса

$$z(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \geq 0.$$

Ответ [1]:

$$W(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{mz}{\sigma^2}\right), \quad m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}. \quad (7.49)$$

7.15. Имеется сумма двух детерминированных гармонических колебаний и нормального узкополосного шума (с дисперсией σ^2):

$$A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + A(t) \cos [\omega_0 t - \varphi(t)] =$$

$$= V(t) \cos [\omega_0 t - \psi(t)].$$

Используя результат решения предыдущей задачи (7.49), найти плотность вероятности огибающей $V(t)$. Вычислить среднее значение m_V и дисперсию σ_V^2 огибающей.

Ответ:

$$W(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2+m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{mV}{\sigma^2}\right), \quad V > 0;$$

$$m = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_0};$$

$$m_V = \langle V(t) \rangle = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{m^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\sigma_V^2 = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) - m_V^2.$$

7.16. Определить плотность вероятности огибающей $V(t)$ суммы двух гармонических колебаний

$$s_1(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1), \quad s_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

и нормального узкополосного шума $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]$ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 :

$$s_1(t) + s_2(t) + \xi(t) = V(t) \cos[\omega_0 t - \psi(t)].$$

Случайные начальные фазы φ_1 и φ_2 предполагаются равномерно распределенными в интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ:

$$W(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2 + A_1^2 + A_2^2}{2\sigma^2}\right) \left[I_0\left(\frac{A_1 V}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A_2 V}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A_1 A_2}{\sigma^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(\frac{A_1 V}{\sigma^2}\right) I_n\left(\frac{A_2 V}{\sigma^2}\right) I_n\left(\frac{A_1 A_2}{\sigma^2}\right) \right]. \quad (7.50)$$

У к а з а н и е. Для решения задачи следует воспользоваться интегральным представлением функций Бесселя [2]

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.51)$$

и частным случаем «теоремы сложения» бesselевых функций

$$I_0(m \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}) = I_0(ma) I_0(mb) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(ma) I_n(mb) \cos n\theta, \quad (7.52)$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $\theta > 0$.

7.17. Пусть $\xi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t - \varphi(t)]$ — стационарный узкополосный нормальный процесс. Рассмотрим новый случайный процесс

$$\eta(t) = \xi(t) \cos \omega_s t = \frac{1}{2} A(t) \cos [(\omega_0 - \omega_s)t - \varphi(t)] + \\ + \frac{1}{2} A(t) \cos [(\omega_0 + \omega_s)t - \varphi(t)],$$

где частота ω_s мала по сравнению с частотой ω_0 , но значительно превышает ширину спектра процесса $\xi(t)$.

Спектр процесса $\eta(t)$ расположен в двух практически неперекрывающихся полосах, причем нижней боковой полосе соответствует процесс

$$\eta_1(t) = \frac{1}{2} A(t) \cos [(\omega_0 - \omega_s)t - \varphi(t)],$$

а верхней боковой полосе — процесс

$$\eta_2(t) = \frac{1}{2} A(t) \cos [(\omega_0 + \omega_s)t - \varphi(t)].$$

Показать, что процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ являются стационарными, хотя их сумма есть нестационарный процесс.

Убедиться, что процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ не являются независимыми.

У к а з а н и е. При доказательствах целесообразно воспользоваться соотношениями (7.11).

7.18. На линейный детектор огибающей воздействует сумма

$$s(t) + \xi(t) = A_m \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + A(t) \cos [\omega_0 t - \varphi(t)] = \\ = V(t) \cos [\omega_0 t - \psi(t)],$$

где $s(t)$ — гармонический сигнал с постоянными амплитудой A_m , частотой ω_0 и начальной фазой φ_0 ; $\xi(t)$ — узкополосный нормальный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-a\tau^2} \cos \omega_0 \tau.$$

Полагая, что отношение сигнал/шум велико ($a = A_m/\sigma \gg 1$), определить приближенные выражения для среднего значения m_η и функции корреляции $k_\eta(\tau)$ напряжения на выходе детектора $\eta(t) = V(t)$.

Ответ:

$$m_\eta = A_m \left(1 + \frac{1}{4a^2} \right), \quad k_\eta(\tau) = \sigma^2 e^{-a\tau^2} \left(1 + \frac{1}{2a^2} e^{-a\tau^2} \right), \quad a \gg 1.$$

7.19. Решить задачу 7.18 при условии, что отношение сигнал/шум мало ($a \ll 1$).

Ответ:

$$m_\eta = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)}, \quad k_\eta(\tau) \simeq \frac{\pi}{8} \sigma^2 \left[e^{-2a\tau^2} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 a^2 e^{-\sigma\tau^2} \right].$$

7.20. На приемное устройство, схема которого изображена на рис. 7.5, воздействует стационарный белый шум $n(t)$ со спектраль-



Рис. 7.5. Упрощенная функциональная схема радиоприемника.

ной плотностью $S_n(\omega) = N_0/2$. Передаточная функция усилителя промежуточной частоты (УПЧ) задана выражением

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad \alpha \ll \omega_0,$$

а импульсная переходная функция $G(t)$ интегрирующего фильтра RC равна

$$G(t) = \gamma e^{-\gamma t}.$$

Определить: а) плотность вероятности $W(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе квадратичного детектора огибающей; б) среднее значение m_η , функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ и дисперсию σ_η^2 ; в) среднее значение m_ζ , функцию корреляции $k_\zeta(\tau)$ и дисперсию σ_ζ^2 процесса $\zeta(t)$ на выходе фильтра RC в стационарном состоянии.

Ответ:

$$\text{а) } W(\eta) = \frac{1}{2\sigma_\xi^2} e^{-\eta/2\sigma_\xi^2}, \quad \eta \geq 0; \quad \sigma_\xi^2 = \frac{1}{2} \alpha N_0 K_0^2;$$

$$\text{б) } m_\eta = 2\sigma_\xi^2, \quad k_\eta(\tau) = 4\sigma_\xi^4 K_0^4 e^{-2\alpha|\tau|}, \quad \sigma_\eta^2 = 4\sigma_\xi^4 K_0^4;$$

$$\text{в) } m_\zeta = \alpha N_0 K_0^2, \quad k_\zeta(\tau) = \sigma_\eta^2 \frac{\gamma}{\gamma^2 - 4\alpha^2} \times \\ \times (\gamma e^{-2\alpha|\tau|} - 2\alpha e^{-\gamma|\tau|}), \quad \sigma_\zeta^2 = \sigma_\eta^2 \frac{\gamma}{\gamma + 2\alpha}.$$

Литература

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭЛЕМЕНТЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

8. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Теоретические сведения

При рассмотрении преобразований случайных сигналов линейными системами можно пользоваться аппаратом дифференциальных уравнений, импульсными характеристиками и передаточными функциями.

В общем случае, когда интересуются как нестационарным, так и стационарным режимами работы системы и начальные условия в системе не нулевые, целесообразно пользоваться аппаратом дифференциальных уравнений. При нулевых начальных условиях удобнее пользоваться импульсными характеристиками. С функциями передачи обычно оперируют в том случае, когда интересуются лишь стационарным состоянием линейной системы.

Типовые задачи, связанные с преобразованием случайных процессов линейными системами, можно разбить на две группы:

1) задачи, требующие определения средних значений, корреляционных функций и энергетических спектров процессов на выходе линейных систем;

2) задачи, требующие определения функций распределения выходного случайного процесса.

Очевидно, что из решения задач второй группы может быть получено решение задач первой группы. Однако, за исключением того важного, но частного случая, когда воздействующий на линейную систему процесс $\xi(t)$ является нормальным, не существует метода, который позволял бы находить непосредственно плотности вероятностей для процесса $\eta(t)$ на выходе системы. В общем же случае задачи второй группы приходится решать путем вычисления корреляционных функций выходного процесса $\eta(t)$ с последующим определением характеристических функций и соответствующих им плот-

ностей вероятностей $W_n(\eta_1, \dots, \eta_n)$. Ниже приводятся формулы, по которым находятся корреляционные (или моментные) функции процесса на выходе линейной системы при известных корреляционных функциях процесса на входе.

Рассмотрим систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением с постоянными или зависящими от времени коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n \eta(t)}{dt^n} + \dots + a_1(t) \frac{d\eta(t)}{dt} + a_0(t) \eta(t) = \\ = b_m(t) \frac{d^m \xi(t)}{dt^m} + \dots + b_1(t) \frac{d\xi(t)}{dt} + b_0(t) \xi(t). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь $\xi(t)$ — процесс на входе системы, характеризуемый средним значением $M_\xi(t)$ и корреляционной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$; $\eta(t)$ — выходной процесс.

Вводя оператор $p = d/dt$ и операторы $A(p, t)$ и $B(p, t)$, определяемые равенствами

$$A(p, t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) p^i, \quad B(p, t) = \sum_{i=0}^m b_i(t) p^i, \quad (8.2)$$

дифференциальное уравнение (8.1) можно привести к следующему операторному соотношению [1]:

$$A(p, t) \eta(t) = B(p, t) \xi(t). \quad (8.3)$$

Из (8.3) формально следует равенство, определяющее сигнал на выходе системы в явном виде:

$$\eta(t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)} \xi(t) = L(p, t) \xi(t). \quad (8.4)$$

Оператор

$$L(p, t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)} \quad (8.5)$$

называется линейным однородным оператором системы. Динамическая система с оператором (8.5) линейна, так как для решения дифференциального уравнения (8.1) справедлив принцип суперпозиции. Линейным неоднородным оператором $L_1(p, t)$ называется сумма линейного однородного оператора и некоторой заданной функции $f(t)$:

$$L_1(p, t) = L(p, t) + f(t). \quad (8.6)$$

Путем вычитания из (8.6) функции $f(t)$ любой неоднородный оператор может быть приведен к однородному.

Из (8.4) можно получить следующие соотношения, определяющие среднее значение и корреляционную функцию процессов на выходе

линейных систем через их операторы и статистические характеристики входных процессов [2]

$$M_{\eta}(t) = L(p, t) M_{\xi}(t), \quad (8.7)$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = L(p, t_1) L(p, t_2) K_{\xi}(t_1, t_2). \quad (8.8)$$

Неоднородность оператора системы на величине корреляционной функции не отражается, а при нахождении математического ожидания должна быть учтена добавочным слагаемым.

При заданном операторе линейной системы принцип суперпозиции позволяет свести исследование реакции системы на произвольное воздействие к исследованию реакции системы на типовое воздействие. В качестве типовых обычно используется единичное импульсное воздействие в виде дельта-функции или гармоническое колебание.

Реакция предварительно невозбужденной линейной системы на воздействие в виде дельта-функции называется импульсной переходной функцией системы (импульсной характеристикой) $G(t)$. Если оператор системы определяется формулой (8.5), то эта реакция может быть установлена путем решения линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n G(t)}{dt^n} + \dots + a_1(t) \frac{dG(t)}{dt} + a_0(t) G(t) = \\ = b_m(t) \frac{d^m \delta(t)}{dt^m} + \dots + b_1(t) \frac{d\delta(t)}{dt} + b_0(t) \delta(t) \end{aligned} \quad (8.9)$$

при нулевых начальных условиях. При этом процесс на выходе линейной системы определяется интегралом Дюамеля

$$\eta(t) = \int_0^t G(t-\tau) \xi(\tau) d\tau = \int_0^t G(x) \xi(t-x) dx. \quad (8.10)$$

Используя (8.10), получим следующие формулы для среднего значения и корреляционной функции на выходе системы [3]:

$$M_{\eta}(t) = \int_0^t G(t-\tau) M_{\xi}(\tau) d\tau, \quad (8.11)$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G(t_1-\tau_1) G(t_2-\tau_2) K_{\xi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (8.12)$$

Для высших корреляционных функций имеем

$$\begin{aligned} K_{3\eta}(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} G(t_1-\tau_1) G(t_2-\tau_2) G(t_3-\tau_3) \times \\ \times K_{3\xi}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$K_{n\eta}(t_1, \dots, t_n) = \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} G(t_1 - \tau_1) G(t_2 - \tau_2) \dots G(t_n - \tau_n) \times \\ \times K_{n\xi}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n. \quad (8.14)$$

Применительно к стационарным входным процессам $\xi(t)$ формулы (8.11) и (8.12) принимают вид

$$M_\eta(t) = m_\xi \int_0^t G(t - \tau) d\tau = m_\xi \int_0^t G(x) dx, \quad (8.11a)$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G(t_1 - \tau_1) G(t_2 - \tau_2) k_\xi(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (8.12a)$$

В случае линейных пассивных систем с затуханием по истечении достаточно большого времени от момента $t = 0$ случайный процесс будет приближаться к стационарному. Для стационарного процесса $\eta(t)$ формулы (8.11)—(8.13) преобразуются к виду [3,4]:

$$m_\eta = m_\xi \int_0^\infty G(x) dx, \quad (8.116)$$

$$k_\eta(\tau) = \int_0^\infty G(x) dx \int_{-\infty}^{\tau+x} G(\tau + x - z) k_\xi(z) dz, \quad (8.126)$$

$$k_{3\eta}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^\infty G(x) dx \int_{-\infty}^{\tau_1+x} \int_{-\infty}^{\tau_2+x} G(\tau_1 + x - y) G(\tau_2 + \\ + x - z) k_{3\xi}(y, z) dy dz. \quad (8.13a)$$

В заключение укажем, что функция взаимной корреляции между процессом $\xi(t)$ на входе линейной системы и выходным процессом $\eta(t)$ равна

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} G(t_2 - \tau) K_\xi(t_1, \tau) d\tau. \quad (8.14a)$$

Если процесс $\xi(t)$ стационарен, то

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} G(t_2 - \tau) k_\xi(t_1 - \tau) d\tau. \quad (8.146)$$

Подавая на вход линейной системы гармоническое колебание $x(t, \omega) = \exp\{j\omega t\}$ и решая уравнение

$$K_1(t, j\omega) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)} e^{j\omega t}, \quad (8.15)$$

определяющее работу системы, установим, что решение (8.15) представляет собой в общем случае комплексную функцию действительных аргументов t, ω . Выделим из функции $K_1(t, j\omega)$ множитель $\exp\{j\omega t\}$, т. е. представим решение в виде

$$K_1(t, j\omega) = K(t, j\omega) e^{j\omega t} = |K(t, j\omega)| e^{j \operatorname{Arg} K(t, j\omega)} \cdot e^{j\omega t}, \quad (8.16)$$

наглядно показывающем изменение амплитуды и фазы воздействия $\exp\{j\omega t\}$ при его прохождении через линейную систему. Функцию $K(t, j\omega)$ называют передаточной функцией; в общем случае она зависит не только от частоты ω , но и от времени t . При помощи передаточной функции легко вычисляется спектральная плотность $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе линейной системы:

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega) |K(t, j\omega)|^2 = S_\eta(\omega, t). \quad (8.17)$$

Здесь $S_\eta(\omega)$ — спектральная плотность воздействующего на систему случайного процесса $\xi(t)$.

В заключение отметим, что передаточная функция и импульсная характеристика связаны друг с другом преобразованием Фурье:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (8.18)$$

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.19)$$

Выражения $K(j\omega)$ и $G(t)$ для некоторых простейших линейных систем с постоянными параметрами приведены в табл. 8.1.

§ 2. Примеры

Пример 8.1. На вход дифференцирующего устройства поступает случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием $M_\xi(t) = \sin t$ и корреляционной функцией

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию на выходе системы.

Решение. Случайный процесс $\eta(t)$ на выходе системы (реакция) связан с воздействием $\xi(t)$ оператором дифференцирования:


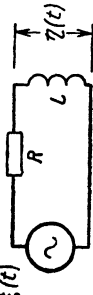
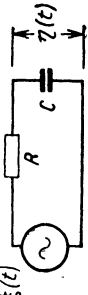
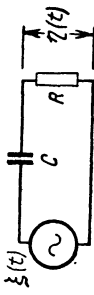
$$\eta(t) = L(p, t) \xi(t) = \frac{d}{dt} \xi(t).$$

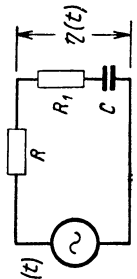
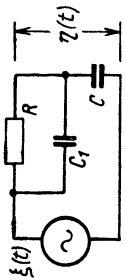
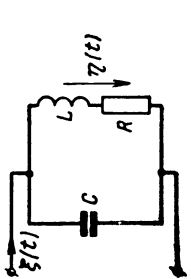
Применяя формулы (8.7) и (8.8), имеем

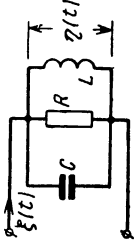

$$M_\eta(t) = \frac{d}{dt} M_\xi(t) = \cos t,$$



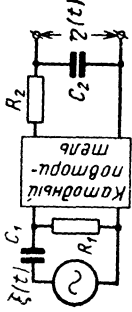
Таблица 8.1

Передаточные функции и импульсные характеристики простейших схем

| Схема | $K(j\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$ | $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ |
|---|---|--|
| <p>1.</p>  | $\frac{R}{R + j\omega L}$ | $\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t}$ |
| <p>2.</p>  | $\frac{j\omega L}{R + j\omega L}$ | $\delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t}$ |
| <p>3.</p>  | $\frac{1}{1 + j\omega RC}$ | $\frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t}$ |
| <p>4.</p>  | $\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$ | $\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t}$ |

| Схема | $K(j\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$ | $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ |
|---|---|--|
| <p>5.</p>  | $\frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T}$ <p>$T = (R + R_1)C, T_1 = R_1C$</p> | $\frac{T_1}{T} \delta(t) - \frac{RC}{T^2} e^{-\frac{1}{T}t}$ |
| <p>6.</p>  | $\frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T}$ <p>$T = R(C + C_1), T_1 = RC_1$</p> | $\frac{T_1}{T} \delta(t) - \frac{RC}{T} e^{-\frac{1}{T}t}$ |
| <p>7.</p>  | $\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}$ <p>$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \alpha = \frac{R}{2L}$</p> | $\left. \begin{aligned} &\omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t, \omega_0 \gg \alpha, \\ &\alpha^2 t e^{-\alpha t}, \omega_0 = \alpha, \\ &\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t, \\ &\omega_0 < \alpha \end{aligned} \right\}$ |

| С х е м а | $K(j\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$ | $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ |
|---|---|---|
| <p>8.</p>  | $\frac{j2\alpha\omega R}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha = \frac{1}{2RC}$ | $\eta(t) = \frac{1}{\omega_0 C} \int_0^t e^{-\alpha(t-x)} \sin \omega_0(t-x) \times \xi(x) dx, \quad \omega_0 \gg \alpha$ |
| <p>9. Гауссов фильтр</p> | $e^{-\frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^2} - j(\omega - \omega_0) t_0,$ $\Delta\omega \ll \omega_0$ | $\frac{\Delta\omega}{\pi \sqrt{2}} e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2\pi} (t-t_0)^2} + j\omega_0 t$ |
| <p>10. Идеальный полосовой фильтр</p> | $\begin{cases} e^{-j(\omega - \omega_0) t_0}, \quad \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0, \quad \omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$ | $\frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{\sin \frac{\Delta\omega(t-t_0)}{2}}{\Delta\omega(t-t_0)} e^{j\omega_0 t}$ |
| <p>11. Идеальный интегратор</p>  | $\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$ | $\begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, \quad t > T \end{cases}$ |

| С х е м а | $K(j\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$ | $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ |
|--|--|---|
| <p>12. Идеальный интегратор</p>  | $\frac{1}{j\omega}$ | $\begin{cases} 1, & 0 \leq t < \infty, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ |
| <p>13. Идеальная дифференцирующая цепь</p>  | $j\omega$ | $\delta'(t)$ |
| <p>14. Интегрально-дифференцирующая цепь</p>  | $\frac{j\omega T_1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)},$ $T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2$ | $\begin{cases} \frac{1}{T_1 - T_2} \left[\frac{T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_1}} \right], & T_1 \neq T_2, \\ \frac{1}{T} \left(1 - \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}}, & T_1 = T_2 = T \end{cases}$ |

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_{\xi}(t_1, t_2) = 2\sigma_{\xi}^2 \alpha e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2} [1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2].$$

Полагая

$$t_2 = t_1 = t,$$

находим

$$\sigma_{\eta}^2(t) = 2\alpha\sigma_{\xi}^2 = \sigma_{\eta}^2.$$

Пример 8.2. На цепочку RC (рис. 8.1) воздействует белый шум $\xi(t)$, имеющий среднее значение m_{ξ} и функцию корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Определить среднее значение и функцию корреляции напряжения $\eta(t)$ на емкости C .

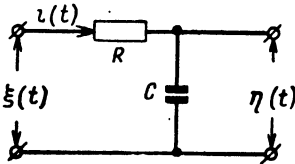


Рис. 8.1. Интегрирующая цепочка RC .

Решение. Дифференциальное уравнение для исследуемой схемы имеет вид

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + \alpha\eta(t) = \alpha\xi(t), \quad \alpha = \frac{1}{RC}. \quad (8.20)$$

Будем считать, что в начальный момент времени емкость C разряжена, т. е. $\eta(0) = 0$. В общем же случае $\eta(0)$ может быть отличным от нуля и носить как детерминированный, так и случайный характер. При нулевых начальных условиях общее решение уравнения (8.20) имеет следующий вид:

$$\eta(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \xi(x) dx, \quad (8.21)$$

в соответствии с чем среднее значение $M_{\eta}(t)$ случайного процесса $\eta(t)$ на выходе цепочки RC равно

$$\begin{aligned} M_{\eta}(t) &= \langle \eta(t) \rangle = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \langle \xi(x) \rangle dx = \\ &= \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} m_{\xi} dx = m_{\xi} e^{-\alpha t} [e^{\alpha t} - 1]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M_{\eta}(t) = m_{\xi} [1 - e^{-\alpha t}].$$

График этой зависимости приведен на рис. 8.2.

Функция корреляции случайного сигнала $\eta(t)$ на выходе цепочки RC согласно определению равна:

$$\begin{aligned} K_{\eta}(t, t_1) &= \langle [\eta(t) - M_{\eta}(t)] [\eta(t_1) - M_{\eta}(t_1)] \rangle = \\ &= \alpha^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} k_{\xi}(y-x) dx dy. \end{aligned}$$

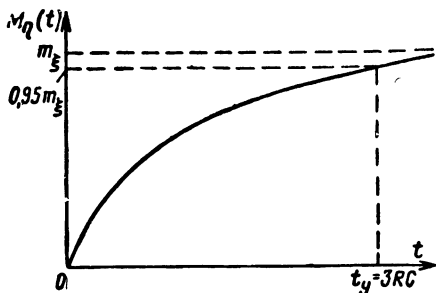


Рис. 8.2. Нарастание среднего значения.

Учитывая, что по условию задачи

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

находим

$$K_{\eta}(t, t_1) = \alpha^2 \frac{N_0}{2} e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} \delta(y-x) dx dy. \quad (8.22)$$

При вычислении интеграла

$$I = \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} \delta(y-x) dx dy \quad (8.23)$$

необходимо иметь в виду, что формула

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} f(z) \delta(z_0-z) dz = f(z_0)$$

справедлива лишь при $\varepsilon > 0$, т. е. когда особая точка $z = z_0$ лежит внутри пределов интегрирования.

Области интегрирования в (8.23) при $\tau > 0$ и $\tau < 0$ изображены соответственно на рис. 8.3, а и б.

Дельта-функция $\delta(y - x)$ обращается в бесконечность, как это следует из рис. 8.3, лишь на том участке биссектрисы координатного угла плоскости переменных x и y , который определяется наименьшим из пределов t или t_1 . Поэтому при вычислении интеграла (8.23) оба предела нужно полагать одинаковыми и равными наименьшему.

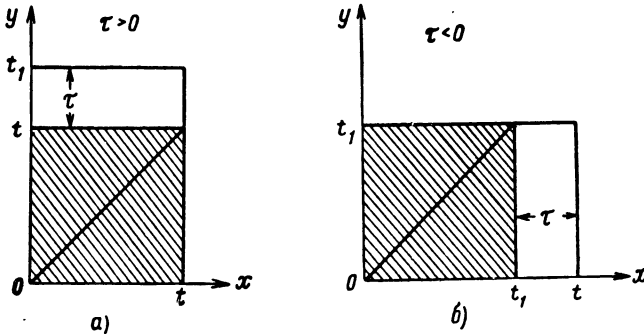


Рис. 8.3. Области интегрирования.

Так, при $\tau > 0$ наименьшим из пределов интегрирования является t ($t_1 = t + \tau$ и, следовательно, $t_1 > t$). Поэтому

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^t \int_0^t e^{\alpha(x+y)} \delta(y-x) dx dy = \int_0^t e^{\alpha x} dx \int_0^t e^{\alpha y} \delta(y-x) dy = \\
 &= \int_0^t e^{2\alpha x} dx = \frac{1}{2\alpha} [e^{2\alpha t} - 1]. \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

Подставляя (8.24) в (8.22) и производя замену $t_1 = t + \tau$ ($\tau > 0$), имеем:

$$K_{\eta}(t, \tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha \tau} [1 - e^{-2\alpha t}], \quad \tau > 0. \quad (8.25)$$

При $\tau < 0$ наименьшим из пределов интегрирования является t_1 и, следовательно,

$$I = \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} \delta(y-x) dx dy = \frac{1}{2\alpha} [e^{2\alpha t_1} - 1]. \quad (8.26)$$

Подставляя (8.26) в (8.22) и заменяя t на $t_1 - \tau$ ($\tau < 0$), находим

$$K_{\eta}(t_1, \tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{\alpha \tau} [1 - e^{-2\alpha t_1}], \quad \tau < 0. \quad (8.27)$$

Объединяя (8.25) и (8.27), получаем следующее выражение для корреляционной функции $K_\eta(t, \tau)$ случайного процесса $\eta(t)$ на емкости C :

$$K_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha |\tau|} [1 - e^{-2\alpha t}]. \quad (8.28)$$

Полагая в (8.28) $\tau = 0$, найдем дисперсию $\sigma_\eta^2(t)$ случайного процесса $\eta(t)$:

$$\sigma_\eta^2(t) = \frac{\alpha N_0}{4} [1 - e^{-2\alpha t}].$$

График этой зависимости приведен на рис. 8.4.

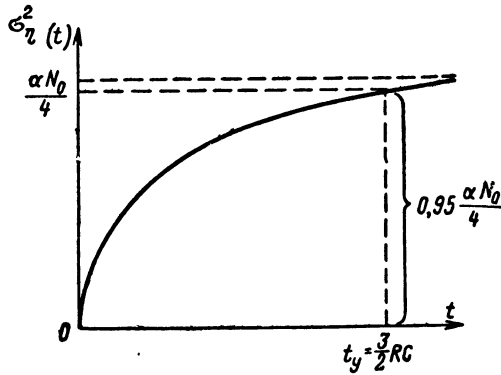


Рис. 8.4. Нарастание дисперсии.

В стационарном режиме ($t \rightarrow \infty$)

$$M_\eta(t) = m_\xi = m_\eta,$$

$$K_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha |\tau|} = k_\eta(\tau),$$

$$\sigma_\eta^2(t) = \frac{\alpha N_0}{4} = \sigma_\eta^2.$$

Пример 8.3. Работа пропорционально-интегрирующего фильтра (рис. 8.5) описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\eta(t) = \frac{T_1 p + 1}{T p + 1} \xi(t) = L(p) \xi(t). \quad (8.29)$$

Для фильтра, изображенного на рис. 8.5,а, коэффициенты T и T_1 соответственно равны (см. табл. 8.1)

$$T = C(R + R_1), \quad T_1 = R_1 C,$$

а для фильтра рис. 8.5, б

$$T = R(C + C_1), \quad T_1 = RC_1.$$

На вход фильтра поступает стационарный нормальный белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции $k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$.

Определить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ и корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра.

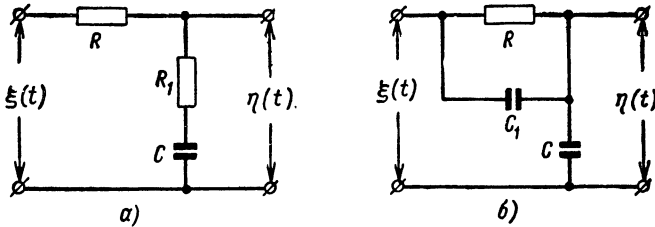


Рис. 8.5. Два варианта схемы пропорционально-интегрирующего фильтра.

Решение. В соответствии с (8.29) передаточная функция пропорционально-интегрирующего фильтра равна

$$K(j\omega) = L(p = j\omega) = \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T},$$

а квадрат ее модуля определяется соотношением

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2}. \quad (8.30)$$

Подставляя в (8.17) соотношение (8.30) и спектральную плотность входного шума $S_\xi(\omega) = N_0/2$, находим спектральную плотность процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра

$$S_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2}. \quad (8.31)$$

График спектральной плотности $S_\eta(\omega)$ на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра представлен на рис. 8.6. Видно, что при $\omega \rightarrow \infty$ и $T_1 \neq T$ спектральная плотность $S_\eta(\omega)$ стремится к некоторому постоянному уровню, равному $N_0 T_1^2 / 2T^2$. Если постоянные времена T и T_1 равны друг другу, $S_\eta(\omega) = N_0/2$, т. е. процесс на выходе фильтра в этом случае равен входному белому шуму. При $T_1 = 0$ пропорционально-интегрирующий фильтр ведет себя как обычная интегрирующая цепь RC .

Для вычисления корреляционной функции $k_\eta(\tau)$ воспользуемся формулой Винера — Хинчина

$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (8.32)$$

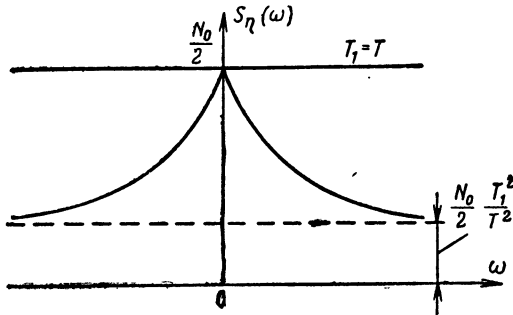


Рис. 8.6. Спектральная плотность на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра.

После подстановки (8.31) в (8.32) имеем

$$k_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Производя далее замену

$$e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau,$$

находим

$$k_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2} \cos \omega\tau d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2} \sin \omega\tau d\omega \right\}. \quad (8.33)$$

Второй интеграл в (8.33) в силу нечетности подынтегральной функции и симметричности пределов интегрирования равен нулю. В соответствии с этим (8.33) приводится к виду

$$k_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{1 + (\omega T)^2} d\omega + \right. \\ \left. + \frac{T_1^2}{T^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{1 + (\omega T)^2} d\omega \right] \right\}.$$

Учитывая, что [3]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\omega = \delta(\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{1 + (\omega T)^2} d\omega = \frac{\pi}{T} e^{-\frac{1}{T} |\tau|},$$

окончательно получаем

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{N_0}{2} \left(\frac{T_1}{T} \right)^2 \delta(\tau) + \frac{N_0}{4T} \frac{T^2 - T_1^2}{T^2} e^{-\frac{1}{T} |\tau|}. \quad (8.34)$$

При $T = T_1$ из (8.34) имеем

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = k_{\xi}(\tau).$$

В случае $T_1 = 0$

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{N_0}{4T} e^{-\frac{1}{T} |\tau|},$$

что согласуется с результатом примера 8.2. График корреляционной функции (8.34) приведен на рис. 8.7.

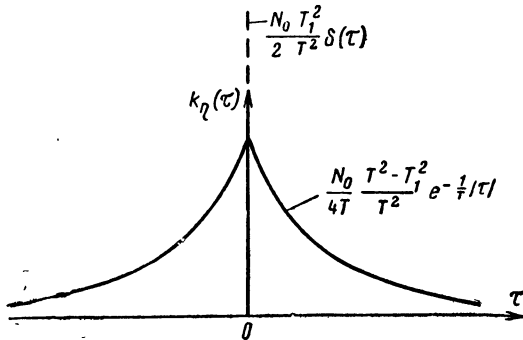


Рис. 8.7. Корреляционная функция на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра.

Пример 8.4. На цепь, составленную из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления R (рис. 8.8), воздействует флуктуационное напряжение $\xi(t)$, представляющее белый шум со спектральной плотностью

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{N_0}{2}. \quad (8.35)$$

Найти спектральную плотность напряжения $\eta(t)$ на сопротивлении R и функцию корреляции $k_\eta(\tau)$.

Решение. Передаточная функция исследуемой цепи определяется соотношением (см. табл. 8.1)

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L},$$

а квадрат ее модуля равен

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (8.36)$$

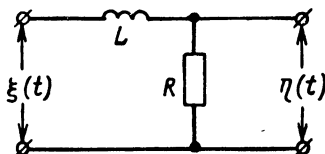


Рис. 8.8. Цепочка RL .

Подставляя (8.35) и (8.36) в (8.17), находим спектральную плотность напряжения $\eta(t)$

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega) |K(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

По спектральной плотности согласно формуле Винера — Хинчина вычисляем функцию корреляции

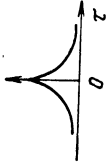
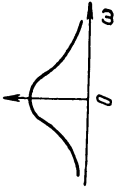
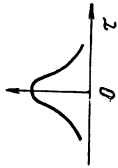
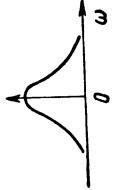
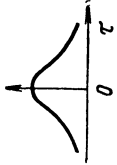
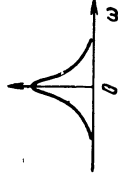
$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{L}|\tau|}.$$

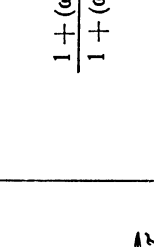
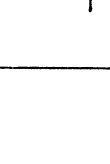

Аналогичным образом решаются все задачи, связанные с воздействием на линейные системы белого шума. В табл. 8.2 приводятся результаты решения задач подобного вида для случая воздействия на некоторые простейшие линейные системы стационарного нормального белого шума с нулевым средним значением. В таблице даны нормированные корреляционные функции и соответствующие им спектральные плотности процессов на выходе.

Пример 8.5. Определить функцию корреляции $k_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$ на входе линейной цепи RL (рис. 8.8) при условии, что выходное напряжение $\eta(t)$ представляет собой стационарный нормальный случайный процесс с функцией корреляции

$$k_\eta(\tau) = \sigma^2 e^{-a\tau^2}. \quad (8.37)$$

Таблица 8.2
Корреляционные функции и спектральные плотности на выходе простейших линейных систем

| Линейная система | $k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$ | | $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ | |
|----------------------------------|--|---|--|---|
| | Аналитическое выражение | График | Аналитическое выражение | График |
| 1. Низкочастотный RC-фильтр | $e^{-\alpha \tau }$ |  | $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \alpha = \frac{1}{RC}$ |  |
| 2. Два низкочастотных RC-фильтра | $(1 + \alpha \tau) e^{-\alpha \tau }$ |  | $\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$ |  |
| 3. Три низкочастотных RC-фильтра | $\left[1 + \alpha \tau + \frac{(\alpha\tau)^2}{3}\right] e^{-\alpha \tau }$ |  | $\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2 + \omega^2)^3}$ |  |

| Линейная система | $k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$ | $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ | График |
|--|--|--|---|
| | Аналитическое выражение | Аналитическое выражение | График |
| <p>4. Пропорционально-интегрирующий фильтр</p> | $\frac{T^2}{T^2} \delta(\tau) + \frac{T^2 - T^2}{2T^3} e^{-\frac{ \tau }{T}}$ | $\frac{1 + (\omega T)^2}{1 + (\omega T)^4}$ |  |
| <p>5. Гауссов низкочастотный фильтр</p> | $e^{-\alpha\tau^2}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ |  |
| <p>6. Идеальный низкочастотный фильтр</p> | $\frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$ | $\begin{cases} \frac{\pi}{\Delta\omega}, & \omega \leq \Delta\omega \\ 0, & \omega < \Delta\omega \end{cases}$ |  |

| Линейная система | $k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$ | $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ |
|-------------------------------------|---|---|
| | Аналитическое выражение | Аналитическое выражение |
| | График | График |
| 7. Идеальный высокочастотный фильтр | $\frac{\pi}{\Delta\omega} \delta(\tau) - \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$ | $\begin{cases} 0, & \omega \leq \Delta\omega, \\ \frac{\pi}{\Delta\omega}, & \omega > \Delta\omega \end{cases}$ |
| 8. Высокочастотный RL -фильтр | $\delta(\tau) - \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{ \tau }{\beta}}$ | $\frac{(\beta\omega)^2}{1 + (\beta\omega)^2}, \quad \beta = \frac{L}{R}$ |
| 9. Колебательный контур | $\left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right) e^{-\alpha \tau }$ | $\frac{4\alpha (\alpha^2 + \omega_0^2)}{[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$ |

Решение. Случайный процесс $\xi(t)$ на входе рассматриваемой линейной системы

$$\xi(t) = \frac{L}{R} \frac{d\eta(t)}{dt} + \eta(t) = y(t) + \eta(t),$$

в соответствии с чем

$$\begin{aligned} k_{\xi}(\tau) &= \langle \dot{\xi}(t) \dot{\xi}(t + \tau) \rangle = \langle [\dot{y}(t) + \dot{\eta}(t)] [\dot{y}(t + \tau) + \dot{\eta}(t + \tau)] \rangle = \\ &= k_y(\tau) + k_{\eta}(\tau), \end{aligned} \quad (8.38)$$

где кружочком сверху обозначены центрированные процессы. Учитывая, что

$$y(t) = \frac{L}{R} \frac{d\eta(t)}{dt},$$

находим

$$k_y(\tau) = -\left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{d^2 k_{\eta}(\tau)}{d\tau^2} = 2\alpha\sigma^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 (1 - 2\alpha\tau^2) e^{-\alpha\tau^2}. \quad (8.39)$$

После подстановки (8.37) и (8.39) в (8.38) получаем

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2} \left[1 + 2\alpha \frac{L^2}{R^2} (1 - 2\alpha\tau^2) \right].$$

Пример 8.6. На цепочку RC (рис. 8.1) воздействует стационарный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_{\xi} = 0$ и функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\beta|\tau|}.$$

Определить функцию корреляции напряжения $\eta(t)$ на емкости C .

Решение. Процесс $\eta(t)$ на выходе цепочки RC (см. решение примера 8.2)

$$\eta(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \xi(x) dx, \quad \alpha = \frac{1}{RC},$$

в соответствии с чем его среднее значение

$$M_{\eta}(t) = m_{\xi} [1 - e^{-\alpha t}].$$

Так как по условию задачи $m_{\xi} = 0$, то

$$M_{\eta}(t) = 0.$$

Функция корреляции $K_{\eta}(t, t_1)$ процесса $\eta(t)$ (см. пример 8.2)

$$K_{\eta}(t, t_1) = \alpha^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} k_{\xi}(y-x) dx dy.$$

Так как в нашем случае

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\beta|\tau|},$$

то

$$K_{\eta}(t, t_1) = \alpha^2 \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y) - \beta|y-x|} dx dy. \quad (8.40)$$

Сделаем в интеграле

$$I = \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y) - \beta|y-x|} dx dy \quad (8.41)$$

замену $y = z + x$. При этом (8.41) преобразуется к виду

$$I = \int_0^t e^{2\alpha x} dx \int_{-x}^{t_1-x} e^{\alpha z - \beta|z|} dz. \quad (8.42)$$

Так как в подинтегральном выражении аргумент z берется по модулю, необходимо определить области интегрирования так, чтобы в пределах каждой из них аргумент z имел бы только один знак. Области интегрирования для случая, когда $t_1 = t + \tau > t$ (т. е. когда $\tau > 0$), и для случая, когда $t_1 = t + \tau < t$ (т. е. $\tau < 0$), показаны на рис. 8.9.

Таким образом, при $\tau > 0$ и интегрировании по z в пределах $[-x, 0]$ аргумент $z < 0$, а при интегрировании в пределах $[0, t_1 - x]$

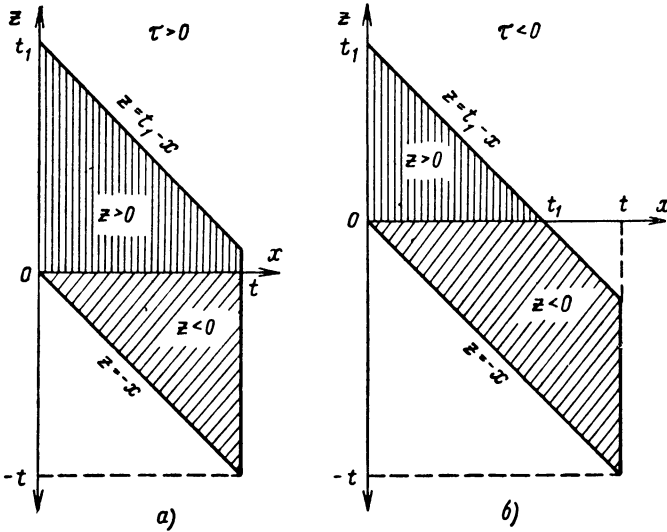


Рис. 8.9. Области интегрирования.

аргумент $z > 0$. В соответствии с этим при $\tau > 0$ интеграл (8.42) можно представить в виде

$$I = \int_0^t e^{2\alpha x} \left[\int_{-x}^0 e^{(\alpha+\beta)z} dz + \int_0^{t_1-x} e^{(\alpha-\beta)z} dz \right] dx. \quad (8.43)$$

Подставляя (8.43) в (8.40) и учитывая, что $t_1 - t = \tau$, получаем следующее выражение для корреляционной функции $K_\eta(t, \tau)$ при $\tau > 0$:

$$K_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha^2 \sigma_\xi^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} [1 - e^{-2\alpha t}] e^{-\alpha\tau} + [e^{-(\alpha+\beta)t} - e^{-2\alpha t}] e^{-\alpha\tau} - [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}] e^{-\beta\tau} \right\}, \quad \tau > 0. \quad (8.44)$$

Аналогичным образом можно найти, что при $\tau < 0$

$$K_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha^2 \sigma_\xi^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} [1 - e^{-2\alpha t}] e^{\alpha\tau} + [e^{-(\alpha+\beta)t} - e^{-2\alpha t}] e^{\alpha\tau} - [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}] e^{\beta\tau} \right\}, \quad \tau < 0. \quad (8.45)$$

Объединяя (8.44) и (8.45), получаем выражение для корреляционной функции $K_\eta(t, \tau)$ случайного процесса $\eta(t)$:

$$K_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha \sigma_\xi^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left\{ \beta [1 - e^{-2\alpha t}] e^{-\alpha|\tau|} + \alpha [e^{-(\alpha+\beta)t} - e^{-2\alpha t}] e^{-\alpha|\tau|} - \alpha [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}] e^{-\beta|\tau|} \right\}. \quad (8.46)$$

Полагая в (8.46) $t \rightarrow \infty$, находим корреляционную функцию для стационарного режима:

$$k_\eta(\tau) = \frac{\alpha \sigma_\xi^2}{\beta^2 - \alpha^2} [\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}].$$

Дисперсия σ_η^2 в стационарном режиме равна

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Пример 8.7. На линейную систему с импульсной характеристикой $G(t)$ воздействует стационарный нормальный белый шум $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Определить: а) взаимную корреляционную функцию $k_{\xi\eta}(\tau)$ процесса $\xi(t)$ на входе системы и выходного процесса $\eta(t)$, б) дисперсию σ_η^2 процесса $\eta(t)$ на выходе.

Решение. Подставляя в (8.14) значение корреляционной функции, находим

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} G(t_2 - t_1) & \text{при } 0 \leq t_1 \leq t_2, \\ 0 & \text{при } t_1 < 0, t_1 > t_2. \end{cases} \quad (8.47)$$

Из (8.47) следует, что с точностью до постоянного множителя импульсная характеристика линейной системы совпадает с функцией взаимной корреляции между входным стационарным белым шумом, воздействующим на систему, и выходным случайным процессом. Этим результатом часто пользуются для экспериментального определения $G(t)$ неизвестной линейной системы при помощи корелометров.

Значение дисперсии σ_η^2 в стационарном режиме можно определить при помощи формулы (8.126). Подставляя в (8.126) функцию $k_\xi(\tau)$, имеем

$$k_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty G(x) G(|\tau| + x) dx. \quad (8.48)$$

Полагая в (8.48) $\tau = 0$, находим

$$\sigma_\eta^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty G^2(x) dx.$$

Пример 8.8. Найти спектральную плотность $S_\xi(f)$ напряжения собственного теплового шума на параллельной цепочке RC

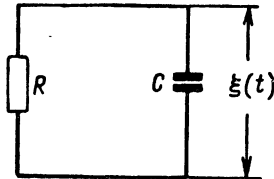


Рис. 8.10. Цепочка RC .

(рис. 8.10) и построить график зависимости $S_\xi(f)/4kT$ от величины R для трех частот: $f = 100$ $\mu\text{гц}$; 1,5 и 15 кгц при $C = 100$ нф . Вычислить дисперсию напряжения шума в полосе частот $[f_1, f_2]$ и показать, что во всей полосе частот она равна kT/C .

Решение. Известно, что спектральная плотность напряжения собственного теплового шума любой пассивной линейной электрической цепи определяется формулой Найквиста

$$S_{\xi}(f) = 4kT \operatorname{Re}\{Z\},$$

где $kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{ вт/гц}$, $\operatorname{Re}\{Z\}$ — действительная часть комплексного сопротивления цепи Z .

Для параллельной цепочки RC имеем

$$Z = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Поэтому

$$S_{\xi}(f) = 4kT \frac{R}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Графики зависимости величины $S_{\xi}(f)/4kT$ от R для трех частот при $C = 100 \text{ нф}$ представлены на рис. 8.11. Из графиков видно, что спек-

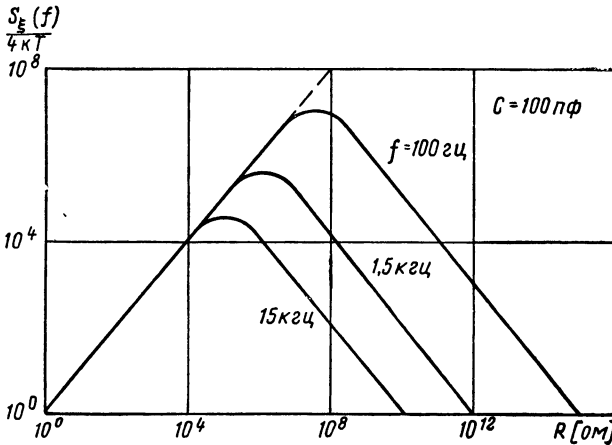


Рис. 8.11. Спектральная плотность теплового шума.

тральная плотность зависит от частоты и параметров цепочки. Дисперсию шума в полосе частот $[f_1, f_2]$ находим по формуле

$$\sigma_{\xi}^2 = 4kTR \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{1 + (2\pi fRC)^2} = \frac{2kT}{\pi C} [\operatorname{arctg}(2\pi f_2 RC) - \operatorname{arctg}(2\pi f_1 RC)].$$

Полагая здесь $f_1 = 0$, $f_2 \rightarrow \infty$, получим

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{kT}{C}.$$

§ 3. Задачи и ответы

8.1. На вход линейной системы с постоянными параметрами, описываемой дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n \eta(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d\eta(t)}{dt} + a_0 \eta(t) = \\ = b_m \frac{d^m \xi(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{d\xi(t)}{dt} + b_0 \xi(t), \end{aligned}$$

воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ со средним значением, равным m_ξ .

Найти математическое ожидание реакции системы $\eta(t)$.

Ответ:

$$m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_\xi.$$

8.2. Угловое отклонение рамки гальванометра $\theta(t)$ от положения равновесия определяется уравнением

$$I \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + r \frac{d\theta(t)}{dt} + D \theta(t) = \xi(t),$$

где I — момент инерции рамки; r — коэффициент трения; D — коэффициент жесткости нити, на которой подвешена рамка; $\xi(t)$ — внешнее возмущающее воздействие.

Определить спектральную плотность и корреляционную функцию угла $\theta(t)$, если спектральная плотность возмущения $\xi(t)$ постоянна на всем диапазоне частот $-\infty < \omega < \infty$, причем $\sigma_\xi^2 = kT/D$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура среды. При решении задачи полагать $4ID \gg r^2$.

Ответ [5]:

$$k_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right),$$

где

$$\sigma_\theta^2 = \frac{kT}{D}; \quad \alpha = \frac{r}{2I}; \quad \omega_0 = \frac{1}{2I} \sqrt{4ID - r^2};$$

$$S_\theta(\omega) = \frac{4\alpha\sigma_\theta^2 (\alpha^2 + \omega_0^2)}{[\alpha^2 - (\omega^2 - \omega_0^2)]^2 + 4\alpha^2 \omega^2}.$$

8.3. Пусть случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ связаны соотношением

$$y(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

где функция $G(t)$ абсолютно интегрируема на положительной полуоси.

Доказать, что

$$K_{xy}(t, t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} G(t_1 - \tau) K_x(t, \tau) d\tau,$$

где $K_{xy}(t, t_1)$ — взаимная корреляционная функция процессов $x(t)$ и $y(t)$, а $K_x(t, t_1)$ — автокорреляционная функция процесса $x(t)$.

Предполагая, что процесс $x(t)$ стационарен, доказать, что функция $K_{xy}(t, t_1)$ зависит только от разности аргументов, и выразить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$ процессов $x(t)$ и $y(t)$ через спектральную плотность $S_x(\omega)$ процесса $x(t)$.

Ответ:

$$S_{xy}(\omega) = S_x(\omega) \int_0^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

8.4. Пусть $x(t)$ и $x_1(t)$ — случайные процессы и

$$y(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad y_1(t) = \int_{-\infty}^t G_1(t - \tau) x_1(\tau) d\tau.$$

Доказать, что

$$K_{yy_1}(t, t_1) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) d\tau \int_{-\infty}^{t_1} G_1(t_1 - \tau_1) K_{xx_1}(\tau, \tau_1) d\tau d\tau_1,$$

где $K_{xx_1}(t, t_1)$ — взаимная корреляционная функция процессов $y(t)$ и $y_1(t)$, а $K_{xx_1}(t, t_1)$ — взаимная корреляционная функция процессов $x(t)$ и $x_1(t)$.

8.5. На вход дифференцирующей цепи (рис. 8.12) воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Определить корреляционную функцию процесса $\eta(t) = \frac{d}{dt} \xi(t)$ на выходе.

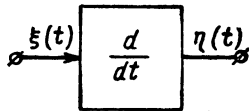


Рис. 8.12. Идеальная дифференцирующая схема.

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

8.6. Решить задачу 8.5 при условии, что

$$1) k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right),$$

$$2) k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}.$$

Ответ:

$$1) k_{\eta}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 (\alpha^2 + \omega_0^2) e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right),$$

$$2) k_{\eta}(\tau) = 2\alpha^2 \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha^2 \tau^2} (1 - 2\alpha^2 \tau^2) = 2\alpha^2 (1 - 2\alpha^2 \tau^2) k_{\xi}(\tau).$$

8.7. На вход радиотехнического устройства, состоящего из линии задержки на время $t_{\text{зад}} = t_0$ и дифференцирующей схемы

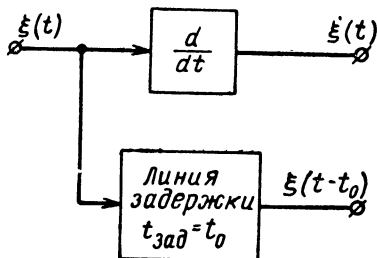


Рис. 8.13. Дифференцирующая схема и линия задержки.

(рис. 8.13), воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_{\xi} = 0$ и функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Определить взаимную корреляционную функцию $k_{\xi\dot{\xi}}(\tau)$ процессов $\xi(t - t_0)$ и $\dot{\xi}(t)$ на выходе устройства.

Ответ:

$$k_{\xi\dot{\xi}}(\tau) = -\alpha^2 \sigma_{\xi}^2 (\tau - t_0) e^{-\alpha|\tau - t_0|}.$$

8.8. Функция корреляции процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$k_{\xi}(\tau) = e^{-\alpha^2 \tau^2}.$$

Найти корреляционную функцию процесса

$$\eta(t) = \xi(t) + \frac{d}{dt} \xi(t).$$

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = [1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2)] e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

8.9. Корреляционная функция $k_{\xi}(\tau)$ случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 \right).$$

Найти взаимокорреляционную функцию процессов $\xi(t)$ и

$$\eta(t) = \frac{d^2}{dt^2} \xi(t).$$

Ответ:

$$k_{\xi\eta}(\tau) = -\frac{1}{3} \sigma_{\xi}^2 \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau| - \alpha^2\tau^2).$$

8.10. Пусть случайные стационарные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют непрерывный спектр и $\eta(t) = \frac{d}{dt} \xi(t)$.

Доказать, что $S_{\eta}(\omega) = \omega^2 S_{\xi}(\omega)$, где $S_{\xi}(\omega)$ и $S_{\eta}(\omega)$ — спектральные плотности данных процессов.

8.11. На вход интегрирующего устройства (рис. 8.14) воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $k_{\xi}(\tau)$.

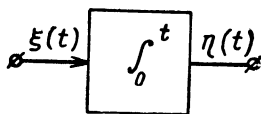


Рис. 8.14. Идеальный интегратор.

Определить дисперсию процесса $\eta(t)$ на выходе интегратора и взаимную корреляционную функцию для входного и выходного процессов.

Ответ [5]:

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\eta}^2(t) = 2 \int_0^t (t - \tau) k_{\xi}(\tau) d\tau,$$

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} k_{\xi}(t_1 - x) dx.$$

8.12. Вычислить дисперсию случайного процесса Винера

$$\xi(t) = \int_0^t n(t) dt,$$

где $n(t)$ — стационарный белый шум с функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Ответ:

$$\sigma_{\xi}^2(t) = \frac{N_0}{2} t.$$

8.13. На вход интегрирующего устройства воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $k_{\xi}(\tau)$.

Определить корреляционную функцию $k_{\eta}(\tau)$ процесса

$$\eta(t) = \frac{1}{2\Delta} \int_{t-\Delta}^{t+\Delta} \xi(\tau) d\tau$$

на выходе интегратора.

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2\Delta} \int_{-2\Delta}^{2\Delta} \left(1 - \frac{|x|}{2\Delta}\right) k_{\xi}(\tau - x) dx.$$

8.14. Случайный процесс $\varphi(t)$ задан уравнением

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = n_{\varphi}(t),$$

где $n_{\varphi}(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \frac{N_{\varphi}}{2} \delta(\tau).$$

Определить дисперсию $\sigma_{\Delta\varphi}^2(t, \tau)$ приращения

$$\Delta\varphi(t, \tau) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$$

в стационарном состоянии.

Ответ:

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2(t, \tau)_{t \rightarrow \infty} = \langle [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)]^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} = \frac{N_{\varphi}}{2} \tau.$$

8.15. Вычислить дисперсию $\sigma_{\Delta\lambda}^2(t, \tau)$ приращения

$$\Delta\lambda(t, \tau) = \lambda(t + \tau) - \lambda(t),$$

где $\lambda(t)$ — случайный процесс, заданный уравнением

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) + \alpha \lambda(t) = n_\lambda(t). \quad (8.49)$$

Здесь $n_\lambda(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \frac{N_\lambda}{2} \delta(\tau).$$

Ответ:

$$\sigma_{\Delta\lambda}^2(t, \tau)_{t \rightarrow \infty} = \langle [\lambda(t + \tau) - \lambda(t)]^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} = \frac{N_\lambda}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha|\tau|}).$$

8.16. Определить дисперсию $\sigma_\eta^2(t, \tau)$ процесса

$$\eta(t) = \int_t^{t+\tau} \lambda(x) dx$$

при $t \rightarrow \infty$. Здесь $\lambda(t)$ — случайный процесс, заданный уравнением (8.49).

Ответ:

$$\sigma_\eta^2(t, \tau)_{t \rightarrow \infty} = \frac{N_\lambda}{2\alpha^3} [\alpha|\tau| - (1 - e^{-\alpha|\tau|})].$$

8.17. На конденсатор C действует флуктуационный ток $\xi(t)$, представляющий собой белый шум с функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Найти дисперсию $\sigma_\eta^2(t)$ напряжения $\eta(t)$ на конденсаторе (рис. 8.15).

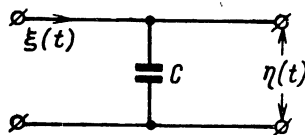


Рис. 8.15. Воздействие случайного тока на емкость.

Ответ:

$$\sigma_\eta^2(t) = \frac{N_0}{2C^2} t.$$

8.18. Для уменьшения уровня шума в усилителе используется интегрирующая цепочка RC (рис. 8.1).

Предполагая, что входной сигнал есть белый шум с энергетическим спектром $S(\omega) = N_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ в}^2 \cdot \text{сек}$, определить, при какой

Наименьшей постоянной времени действующее значение шума на выходе не превысит 50 мв.

Ответ:

$$T = RC = 0,4 \text{ мсек.}$$

8.19. На вход дифференцирующей цепочки (рис. 8.16) поступает ограниченный по частоте шум, энергетический спектр которого

$$S_{\xi}(\omega) = \begin{cases} N_0, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0, & \omega < 0, \omega > \omega_1. \end{cases}$$

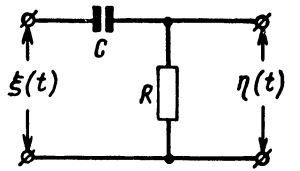


Рис. 8.16. Дифференцирующая цепочка RC.

Найти дисперсию шума $\eta(t)$ на выходе цепочки.

Ответ:

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{N_0}{\pi} \left(\omega_1 - \frac{1}{RC} \operatorname{arctg} \omega_1 RC \right).$$

8.20. На вход схемы RC (рис. 8.17) воздействует ограниченный по частоте шум $\xi(t)$, энергетический спектр которого

$$S_{\xi}(\omega) = \begin{cases} N_0, & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{для всех других } \omega. \end{cases}$$

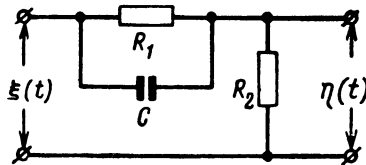


Рис. 8.17. Схема RC.

Найти энергетический спектр процесса $\eta(t)$ на выходе.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = N_0 \frac{R_1^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}, \quad \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}.$$

8.21. На вход пропорционально-интегрирующего фильтра (рис. 8.5) поступает стационарный случайный процесс $\xi(t)$ со средним значением m_ξ и корреляционной функцией

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Определить среднее значение m_η , спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ и дисперсию σ_η^2 процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра.

Ответ:

$$m_\eta = m_\xi, \quad S_\eta(\omega) = \sigma_\xi^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T)^2},$$

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 \frac{T + T_1^2 \alpha}{T(1 + \alpha T)}.$$

8.22. Напряжение на входе фильтра, изображенного на рис. 8.1, представляет собой случайный стационарный процесс. Определить отношение дисперсии выходного напряжения к дисперсии входного напряжения, если спектральная плотность входного процесса равна:

а) $S_0 \exp\{-\beta\omega^2\}$,

б) $S_0 \exp\{-\beta|\omega|\}$ (S_0 и β — положительные постоянные).

Ответ:

а) $\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\xi^2} = 2\alpha \sqrt{\pi\beta} \left[1 - \Phi\left(\alpha \sqrt{\frac{\beta}{2}}\right) \right],$

где

$$\alpha = \frac{1}{RC}, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

б) $\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\xi^2} = \alpha\beta \left[\sin \alpha\beta \int_{-\infty}^{\alpha\beta} \frac{\cos x}{x} dx - \cos \alpha\beta \int_{-\infty}^{\alpha\beta} \frac{\sin x}{x} dx \right].$

8.23. Напряжение на входе RC -фильтра, изображенного на рис. 8.16, представляет собой случайный стационарный процесс, нормированная корреляционная функция которого равна

$$R(\tau) = \exp\{-\beta|\tau|\}.$$

Определить нормированную корреляционную функцию выходного напряжения.

Как следует выбрать параметры R и C для того, чтобы отношение дисперсии выходного процесса к дисперсии входного процесса было меньше данного числа ϵ ?

Ответ: Нормированная корреляционная функция равна

$$R_{\eta}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} [\beta e^{-\alpha |\tau|} - \alpha e^{-\beta |\tau|}], & \alpha \neq \beta, \\ e^{-\beta |\tau|} (1 + \beta |\tau|), & \alpha = \beta, \end{cases}$$

где $\alpha = 1/RC$. Для того, чтобы отношение дисперсий было меньше ε , должно выполняться неравенство $RC \leq \varepsilon/\beta(1 - \varepsilon)$.

8.24. На вход двух параллельных цепочек RC (рис. 8.18) действует один и тот же белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

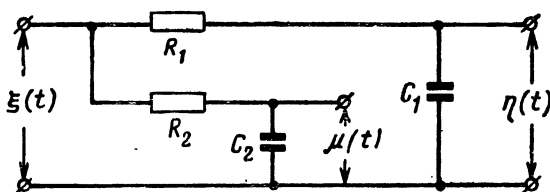


Рис. 8.18. Две параллельные цепочки RC .

Найти функцию взаимной корреляции между выходными напряжениями $\eta(t)$ и $\mu(t)$.

Ответ:

$$K_{\eta\mu}(t_1, t_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 N_0}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} [e^{-\alpha_2 |t_2 - t_1|} - e^{-\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2}],$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{R_2 C_2}.$$

8.25. На схему, изображенную на рис. 8.19, действует флуктуационный ток $\xi(t)$ в виде белого шума с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

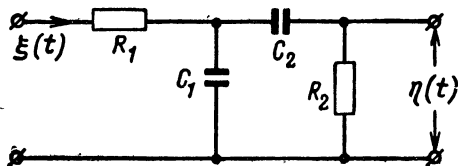


Рис. 8.19. Воздействие на интегрально-дифференцирующую схему случайного тока.

Найти функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ для напряжения $\eta(t)$ в стационарном состоянии.

Ответ:

$$k_\eta(\tau) = \beta^2 \frac{N_0}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|}, \quad S_\eta(\omega) = \beta^2 \frac{N_0}{2} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2},$$

где

$$\beta = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad \alpha = \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1 C_2}.$$

8.26. К схеме, изображенной на рис. 8.20, приложено флуктуационное напряжение $\xi(t)$ в виде белого шума с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

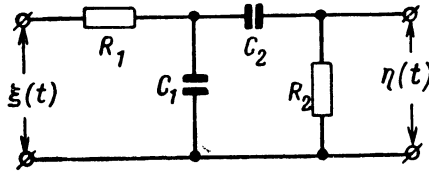


Рис. 8.20. Воздействие на интегрально-дифференцирующую схему случайного напряжения.

Определить функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ для напряжения $\eta(t)$ в стационарном состоянии.

Ответ:

$$k_\eta(\tau) = \frac{\mu^2}{\alpha\lambda} \frac{N_0}{8} \left[(\alpha + \lambda) e^{-\frac{\alpha+\lambda}{2}|\tau|} - (\alpha - \lambda) e^{-\frac{\alpha-\lambda}{2}|\tau|} \right],$$

$$S_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{\mu^2 \omega^2}{\omega^4 + (\alpha^2 - 2\gamma)\omega^2 + \gamma^2},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{T_1} \left(\frac{T_1}{T_2} + \beta + 1 \right), \quad \beta = \frac{R_1}{R_2}, \quad \gamma = \frac{1}{T_1 T_2}, \quad \mu = \frac{1}{T_1},$$

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad \lambda = \alpha^2 - 4\gamma.$$

8.27. На схему, представленную на рис. 8.21, действует флуктуационное напряжение $\xi(t)$ в виде белого шума с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

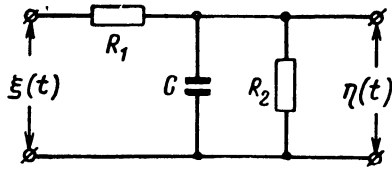


Рис. 8.21. Интегрирующая схема.

Найти функцию корреляции и спектральную плотность для напряжения $\eta(t)$ в стационарном состоянии.

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{\mu^2 N_0}{\alpha} \frac{1}{4} e^{-\alpha |\tau|}, \quad S_{\eta}(\omega) = \frac{\mu^2 N_0}{2} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2},$$

где

$$\mu = \frac{1}{T}, \quad T = R_1 C, \quad \alpha = \frac{1}{T} (\beta + 1), \quad \beta = \frac{R_1}{R_2}.$$

8.28. Найти дисперсию σ_{ξ}^2 тока $\xi(t)$ в линейной цепи, изображенной на рис. 8.22, при условии, что напряжение $\eta(t)$ на выходе

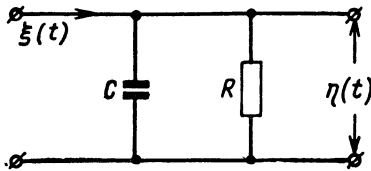


Рис. 8.22. Воздействие случайного тока на параллельную цепочку RC.

является случайным процессом, спектральная плотность $S_{\eta}(\omega)$ которого имеет вид

$$S_{\eta}(\omega) = \begin{cases} N_0 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0 & \text{при } \omega < 0, \omega > \omega_1. \end{cases}$$

Ответ:

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{\omega_1 N_0}{6\pi R^2} (6\pi + \omega_1^2 R^2 C^2).$$

8.29. На вход цепочки RC (рис. 8.23) воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Определить спектральные плотности $S_\eta(\omega)$ и $S_\mu(\omega)$ выходных процессов $\eta(t)$ и $\mu(t)$ и их взаимную спектральную плотность $S_{\eta\mu}(\omega)$.

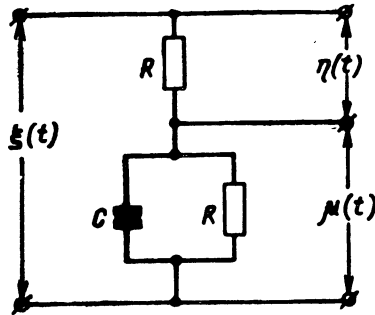


Рис. 8.23. Воздействие случайного напряжения на схему RC .

Ответ [6]:

$$S_\eta(\omega) = \frac{4\alpha(\beta^2 + \omega^2)}{(4\alpha^2 + \omega^2)(4\beta^2 + \omega^2)}; \quad S_\mu(\omega) = \frac{4\alpha\beta^2}{(4\alpha^2 + \omega^2)(4\beta^2 + \omega^2)},$$

$$S_{\eta\mu}(\omega) = \frac{4\alpha\beta(\beta + j\omega)}{(4\alpha^2 + \omega^2)(4\beta^2 + \omega^2)}, \quad \beta = \frac{1}{RC}.$$

8.30. Вычислить корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ случайного процесса $\eta(t)$ на выходе цепочки RL (рис. 8.8) при условии, что $R = 0,2 \text{ ома}$, $L = 0,1 \text{ гн}$, а спектральная плотность воздействующего стационарного шума $\xi(t)$ имеет вид

$$S_\xi(\omega) = \frac{20}{\omega^4 - 24\omega^2 + 400} [\sigma^2 \cdot \text{сек}].$$

Ответ:

$$K_\eta(\tau) = \frac{1}{128} e^{-2|\tau|} (\cos 4\tau + 3 \sin |4\tau| + 5) [\sigma^2].$$

8.31. На последовательную цепочку RL (рис. 8.24) действует флуктуационный ток $\xi(t)$, имеющий равномерную спектральную плотность $S_\xi(\omega) = N_0/2$ в области частот $-\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1$.

Найти дисперсию напряжения $\eta(t)$ на индуктивности.

Ответ:

$$\sigma_\eta^2 = \frac{(\omega_1 L)^2}{3} \frac{N_0 \omega_1}{2\pi}.$$

8.32. На последовательную цепочку RL (рис. 8.24) действует флуктуационный ток $\xi(t)$, функция корреляции которого

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}.$$

Найти дисперсию σ_{η}^2 напряжения на индуктивности L .

Ответ:

$$\sigma_{\eta}^2 = 2\alpha^2 L^2 \sigma_{\xi}^2.$$

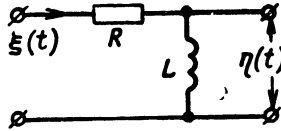


Рис. 8.24. Последовательная цепочка RL .

8.33. Напряжение $\xi(t)$ на входе фильтра, изображенного на рис. 8.8, представляет собой случайный стационарный процесс, среднее значение и корреляционная функция которого равны соответственно m_{ξ} и $k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}$.

Фильтр включают в момент времени $t = 0$.

Определить среднее значение $M_{\eta}(t)$ и дисперсию $\sigma_{\eta}^2(t)$ выходного напряжения $\eta(t)$ и найти их предельные значения при $t \rightarrow \infty$.

Ответ:

$$M_{\eta}(t) = m_{\xi} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right],$$

$$\sigma_{\eta}^2(t) = \begin{cases} \sigma_{\xi}^2 \frac{R}{\alpha L + R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{\alpha L + R}{\alpha L - R} e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{2R}{\alpha L - R} e^{-\alpha t} \right) \right], & \alpha \neq \frac{R}{L}, \\ \sigma_{\xi}^2 \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{2R}{L} \right) e^{-\frac{2R}{L}t} \right], & \alpha = \frac{R}{L}, \end{cases}$$

$$M_{\eta}(\infty) = m_{\xi}, \quad \sigma_{\eta}^2(\infty) = \frac{R}{\alpha L + R} \sigma_{\xi}^2.$$

8.34. На вход цепи, изображенной на рис. 8.25, воздействует белый шум $\xi(t)$ со спектральной плотностью $S_{\xi}(\omega) = N_0$.

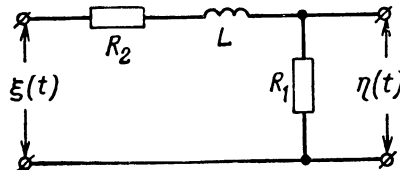


Рис. 8.25. Схема RL .

Найти спектральную плотность, автокорреляционную функцию и среднеквадратичное значение выходного напряжения $\eta(t)$.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{\alpha^2 N_0}{1 + (\omega T)^2}, \quad \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad T = \frac{L}{R_1 + R_2},$$

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{\alpha^2 N_0}{2T} e^{-\frac{1}{T}|\tau|}, \quad \sigma_{\eta} = \alpha \sqrt{\frac{N_0}{2T}}.$$

8.35. Напряжение на входе фильтра, изображенного на рис. 8.26, представляет собой белый шум $\xi(t)$, спектральная плотность которого равна $S_{\xi}(\omega) = N_0$, $0 \leq \omega \leq \infty$.

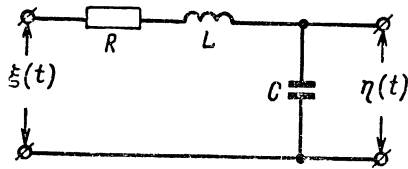


Рис. 8.26. Последовательная цепь RLC .

Определить корреляционную функцию напряжения на выходе.

Как следует выбрать параметры фильтра для того, чтобы дисперсия выходного напряжения не превосходила заданного числа D ?

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0 \omega_0^2}{4\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta|\tau|} \left[\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cos \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tau + \right. \\ \left. + \delta \sin \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} |\tau| \right] \text{ при } \omega_0 > \delta \left(\text{т. е. при } R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \right), \\ \frac{N_0 \delta}{4} e^{-\delta|\tau|} (1 + \delta|\tau|) \text{ при } \omega_0 = \delta \left(\text{т. е. при } R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \right), \\ \frac{N_0 \omega_0^2}{4\delta \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta|\tau|} \left[\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \operatorname{ch} \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tau + \right. \\ \left. + \delta \operatorname{sh} \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} |\tau| \right] \text{ при } \omega_0 < \delta \left(\text{т. е. при } R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \right), \end{cases}$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = R/2L$.

Для того чтобы дисперсия выходного напряжения не превосходила заданного числа D , должно выполняться неравенство $RC \geq N_0/2D$.

8.36. Напряжение $\xi(t)$ на входе фильтра, изображенного на рис. 8.27, представляет собой белый шум, спектральная плотность которого равна $S_{\xi}(\omega) = N_0$, $0 \leq \omega < \infty$.

Определить корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе фильтра.

Как следует выбрать параметры фильтра для того, чтобы дисперсия σ_η^2 напряжения на выходе не превосходила заданного числа D ?

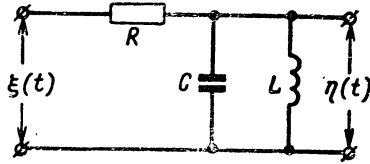


Рис. 8.27. Фильтр RLC.

Ответ:

$$k_\eta(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0\psi}{\sqrt{\omega_0^2 - \psi^2}} e^{-\psi|\tau|} \left[\sqrt{\omega_0^2 - \psi^2} \cos \sqrt{\omega_0^2 - \psi^2} \tau - \right. \\ \left. - \psi \sin \sqrt{\omega_0^2 - \psi^2} |\tau| \right], & \omega_0 > \psi; \\ N_0\psi e^{-\psi|\tau|} (1 - \psi|\tau|), & \omega_0 = \psi, \\ \frac{N_0\psi}{\sqrt{\psi^2 - \omega_0^2}} e^{-\psi|\tau|} \left[\sqrt{\psi^2 - \omega_0^2} \operatorname{ch} \sqrt{\psi^2 - \omega_0^2} \tau - \right. \\ \left. - \psi \operatorname{sh} \sqrt{\psi^2 - \omega_0^2} |\tau| \right], & \omega_0 < \psi, \end{cases}$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и $\psi = 1/2 RC$.

Для того чтобы дисперсия выходного напряжения не превосходила заданного числа D , должно выполняться неравенство $RC \geq N_0/2D$.

8.37. Колебательный контур, составленный из параллельно соединенных конденсатора C и индуктивности L с омическим сопротивлением R , включен в анодную цепь лампы. Анодный ток

$$J_a(t) = I_a + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — белый шум.

Найти функции корреляции и энергетические спектры тока $\eta(t)$ в индуктивной ветви контура и напряжения $u(t)$ на контуре (рис. 8.28).

Ответ:

$$k_\eta(\tau) = \frac{N_0\omega_0^2}{4\alpha\omega_1} e^{-\alpha|\tau|} (\omega_1 \cos \omega_1\tau + \alpha \sin \omega_1|\tau|),$$

$$k_u(\tau) = \frac{N_0L^2\omega_0^2}{4\alpha\omega_1} e^{-\alpha|\tau|} (\omega_1 \cos \omega_1\tau - \alpha \sin \omega_1|\tau|),$$

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{2\alpha\omega_0^2\sigma_{\eta}^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad S_u(\omega) = \frac{2\alpha\omega_0^2\sigma_u^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2},$$

где

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{N_0\omega_0^2}{4\alpha}, \quad \sigma_u^2 = \frac{N_0L^2\omega_0^2}{4\alpha},$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0.$$

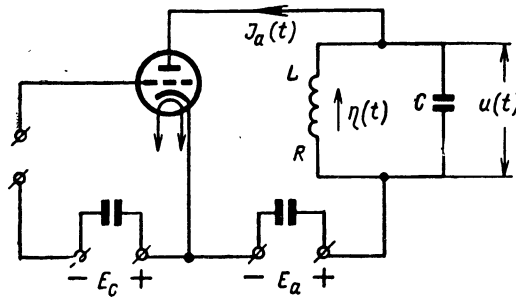


Рис. 8.28. Резонансный усилитель.

8.38. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью $S_{\xi}(\omega)$ воздействует на линейный фильтр с передаточной функцией $K(j\omega) = (1 - e^{-j\omega T})^n$.

Определить спектральную плотность $S_{\eta}(\omega)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = S_{\xi}(\omega) \left(2 \sin \frac{\omega T}{2} \right)^{2n}.$$

8.39. На колебательный контур с передаточной функцией

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

воздействует случайный процесс

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t)$ — отрезок (импульс) квазигармонического шума длительностью T :

$$s(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad 0 \leq t \leq T,$$

со средним значением $m_s = 0$ и функцией корреляции

$$k_s(\tau) = \sigma_s^2 \exp \{ -\beta |\tau| \} \cos \omega_0 \tau,$$

а $n(t)$ — стационарный белый шум с функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Определить: а) корреляционную функцию $K_\eta(t, \tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе контура; б) отношение сигнал/шум в конце импульса

$$\rho(T) = \frac{\sigma_{\eta s}^2(T)}{\sigma_{\eta n}^2},$$

где $\sigma_{\eta s}^2(t)$ — дисперсия составляющей выходного случайного процесса $\eta(t)$, обусловленная воздействием процесса $s(t)$; $\sigma_{\eta n}^2$ — дисперсия выходного шума.

Ответ [7]:

а) $K_\eta(t, \tau) = K_{\eta s}(t, \tau) + k_{\eta n}(\tau);$

$$K_{\eta s}(t, \tau) = \frac{\alpha \sigma_s^2 K_0^2}{\alpha^2 - \beta^2} [(a e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}) + (\alpha + \beta) e^{-\alpha\tau - 2a\tau} - \alpha(e^{-\alpha\tau} + e^{-\beta\tau}) e^{-(\alpha+\beta)t}] \cos \omega_0 \tau, \quad t \geq 0,$$

$$k_{\eta n}(\tau) = \frac{\alpha N_0 K_0^2}{2} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau;$$

б) $\rho(T) = 2q \frac{(1 - \mu_1) - 2e^{-a(1+\mu_1)} + (1 + \mu_1) e^{-2a}}{a(1 - \mu_1)},$

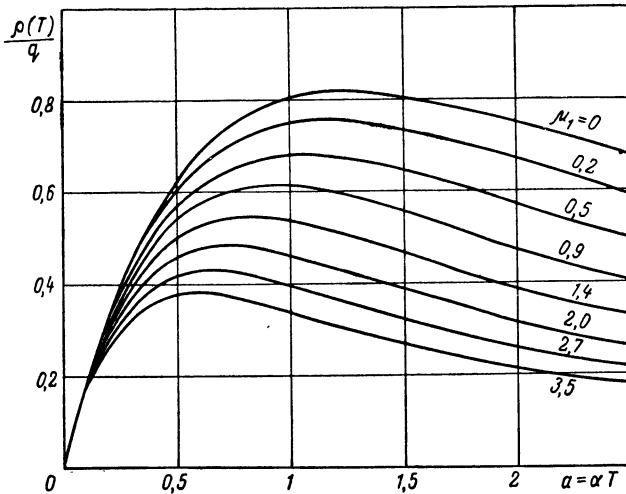


Рис. 8.29. Отношение сигнал/шум на выходе колебательного контура при экспоненциальной функции корреляции входных квазигармонических флуктуаций.

$$q = \frac{\sigma_s^2 T}{N_0}, \quad a = \alpha T, \quad \mu_1 = \frac{\beta}{\alpha}.$$

График функции $\rho(T)/q = f(a, \mu_1)$ дан на рис. 8.29.

8.40. Решить задачу 8.39 при условии, что

$$k_s(\tau) = \sigma_s^2 \exp\{-\gamma^2 \tau^2\} \cos \omega_0 \tau.$$

Ответ [7]:

$$\begin{aligned} \text{а) } K_{\gamma s}(t, \tau) = & \frac{\alpha \sigma_s^2 K_0^2}{2\gamma} \sqrt{\pi} e^{\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}} \left\{ \Phi\left(\frac{\alpha + 2\gamma^2 t}{\gamma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - 2\gamma^2 |\tau|}{\gamma\sqrt{2}}\right) + \right. \\ & + \left[\Phi\left(\frac{\alpha - 2\gamma^2 t}{\gamma\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\alpha - 2\gamma^2 t - 2\gamma^2 \tau}{\gamma\sqrt{2}}\right) - 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\gamma\sqrt{2}}\right) \right] e^{-2\alpha t} + \\ & + \left. \left[\Phi\left(\frac{\alpha + 2\gamma^2 t + 2\gamma^2 \tau}{\gamma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha + 2\gamma^2 |\tau|}{\gamma\sqrt{2}}\right) \right] e^{2\alpha |\tau|} \right\} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \\ & t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \rho(T) = & 2q \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha \mu_2} e^{\frac{1}{4\mu_2^2}} \left\{ \Phi\left(\frac{1 + 2\alpha \mu_2^2}{\mu_2 \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\mu_2 \sqrt{2}}\right) + \right. \\ & + \left. \left[\Phi\left(\frac{1 - 2\alpha \mu_2^2}{\mu_2 \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\mu_2 \sqrt{2}}\right) \right] e^{-2\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

$$q = \frac{\sigma_s^2 T}{N_0}, \quad a = \alpha T, \quad \mu_2 = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2} x^2} dx.$$

Графики функции $\rho(T)/q$ приведены на рис. 8.30.

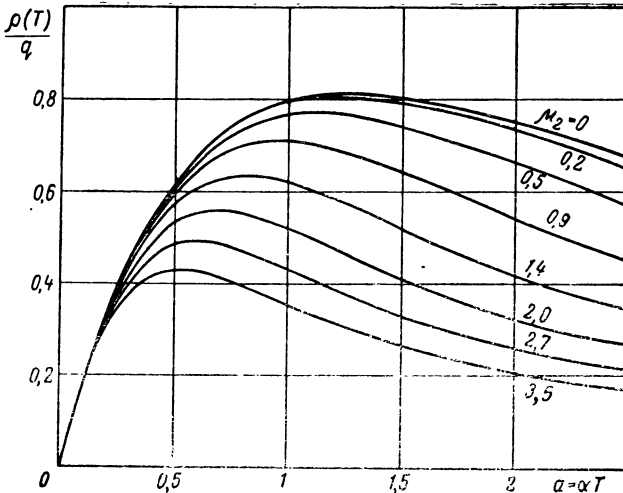


Рис. 8.30. Отношение сигнал/шум на выходе контура при гауссовой функции корреляции входных квазигармонических флуктуаций.

8.41. Решить задачу 8.39 при условии, что

$$k_s(\tau) = \sigma_s^2 \frac{\sin \delta \tau}{\delta \tau} \cos \omega_0 \tau.$$

Ответ [7]:

$$\begin{aligned} \text{а) } K_{\eta s}(t, \tau) &= \frac{\alpha \sigma_s^2 K_0^2}{2} \left\{ \int_{-t}^{|t|} e^{\alpha x} \frac{\sin \delta x}{\delta x} dx - \right. \\ &\quad - \left[\int_0^t e^{\alpha x} \frac{\sin \delta x}{\delta x} dx + \int_0^{t+\tau} e^{\alpha x} \frac{\sin \delta x}{\delta x} dx \right] e^{-2\alpha t} + \\ &\quad \left. + e^{2\alpha |t|} \int_{-t-\tau}^{-|t|} e^{\alpha x} \frac{\sin \delta x}{\delta x} dx \right\} e^{-\alpha |t|} \cos \omega_0 \tau, \quad t \geq 0; \\ \text{б) } \rho(T) &= \frac{2q}{a} \left[\int_0^a e^{-x} \frac{\sin \mu_3 x}{\mu_3 x} dx - e^{-2a} \int_0^a e^x \frac{\sin \mu_3 x}{\mu_3 x} dx \right], \\ & \quad q = \frac{\sigma_s^2 T}{N_0}, \quad a = \alpha T, \quad \mu_3 = \frac{\delta}{\alpha}. \end{aligned}$$

График функции $\rho(T)/q = f(a, \mu_3)$ приведен на рис. 8.31.

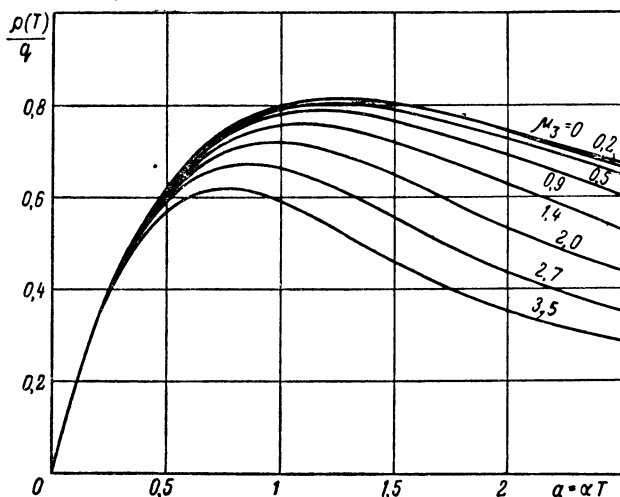


Рис. 8.31. Отношение сигнал/шум на выходе колебательного контура при прямоугольной спектральной плотности входных квазигармонических флуктуаций.

8.42. На вход линейного нешумящего четырехполюсника с передаточной функцией $K(j\omega)$, модуль которой определяется соотношением

$$|K(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_0 - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega, \end{cases}$$

воздействует собственный шум $\xi(t)$ параллельного колебательного контура с резонансной частотой ω_0 (рис. 8.32).

Вычислить дисперсию σ_η^2 напряжения $\eta(t)$ на выходе четырехполюсника в зависимости от его полосы пропускания $\Delta\omega = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$.

Ответ: а) для случая аperiodических колебаний в контуре ($\omega_0^2 - \alpha^2 < 0$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $\alpha = R/2L$, добротность контура $Q = \omega_0 L/R < 1/2$):

$$\sigma_\eta^2 = 4kTR \frac{\omega_0 Q^3 \sqrt{2}}{2\pi \sqrt{1-4Q^2}} \left[\frac{1}{A} \left(\operatorname{arctg} \frac{C}{A} - \operatorname{arctg} \frac{D}{A} \right) - \frac{1}{B} \left(\operatorname{arctg} \frac{C}{B} - \operatorname{arctg} \frac{D}{B} \right) \right],$$

$$A = \sqrt{1-2Q^2} - \sqrt{1-4Q^2}, \quad B = \sqrt{1-2Q^2} + \sqrt{1-4Q^2},$$

$$C = \left(1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}\right) Q \sqrt{2}, \quad D = \left(1 - \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}\right) Q \sqrt{2};$$

б) для случая периодических колебаний в контуре ($\omega_0^2 - \alpha^2 > 0$, при этом $Q > 1/2$):

$$\sigma_\eta^2 = \frac{kTR\omega_0^2 Q}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{4Q^2-1}} \times \right. \\ \times \left[\ln \frac{\left(1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} + 1}{\left(1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} + 1} - \right. \\ \left. - \ln \frac{\left(1 - \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} + 1}{\left(1 - \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} + 1} \right] + \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{Q \left[\left(1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - 1 \right]}{1 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}} - \operatorname{arctg} \frac{Q \left[\left(1 - \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}\right)^2 - 1 \right]}{1 - \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}} \right\}.$$

При $Q \gg 1$ последнее выражение приводится к виду

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{kTR\omega_0 Q}{\pi} \left[\frac{1}{2Q} \ln \frac{\alpha b}{\beta a} + \operatorname{arctg} \frac{Q\beta b}{1+\beta} - \operatorname{arctg} \frac{-Q\alpha a}{1-\alpha} \right],$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}, \quad \beta = \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}, \quad a = 2 - \alpha, \quad b = 2 + \beta.$$

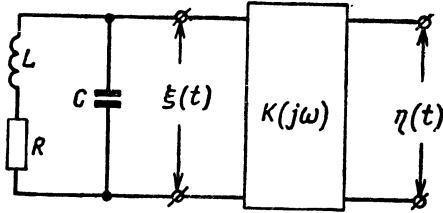


Рис. 8.32. Линейный четырехполюсник.

Если полоса пропускания четырехполюсника симметрична относительно ω_0 (т. е. если $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega/2$), то для случая $Q \gg 1$ имеем

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\sigma_{\xi}^2}{\pi} \left[\frac{1}{2Q} \ln \frac{4+\delta}{4-\delta} + \operatorname{arctg} \frac{Q\delta(4+\delta)}{2(2+\delta)} - \operatorname{arctg} \frac{-Q\delta(4-\delta)}{2(2-\delta)} \right].$$

Если к тому же

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1,$$

то

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\xi}^2 \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} Q\delta.$$

Здесь σ_{ξ}^2 — дисперсия собственных шумов контура, равная (см. пример 8.8) .

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{kT}{C}.$$

8.43. Случайный процесс $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \exp \{-\alpha |\tau|\}$$

воздействует на фильтр нижних частот, амплитудно-частотная характеристика которого приведена на рис. 8.33.

Найти дисперсию σ_{η}^2 выходного напряжения $\eta(t)$.

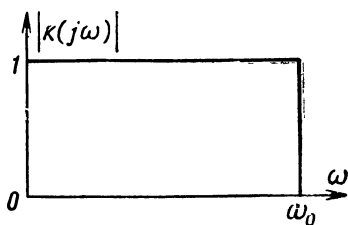


Рис. 8.33. Модуль передаточной функции фильтра нижних частот.

Ответ:

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\xi}^2 \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

8.44. На усилитель с частотной характеристикой (по напряжению)

$$K(f) = K_0 e^{-\alpha(f-f_0)^2}, \quad 0 \leq f \leq \infty,$$

где f_0 — средняя частота полосы пропускания усилителя, α — параметр, определяющий ширину полосы пропускания, воздействует узкополосный стационарный случайный процесс $\xi(t)$, спектральная плотность которого имеет вид

$$S_{\xi}(f) = S_0 e^{-\beta(f-f_0)^2}.$$

Определить дисперсию σ_{η}^2 сигнала $\eta(t)$ на выходе усилителя.

Ответ:

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{S_0 K_0^2}{2 \sqrt{\pi} (2\alpha + \beta)} e^{-\frac{2\alpha\beta}{2\alpha + \beta} (f_0 - f_c)^2}.$$

8.45. Линейная система имеет амплитудно-частотную характеристику, равную постоянной K_0 в интервале $(\omega_0 - \Delta\omega; \omega_0 + \Delta\omega)$ и нулю вне этого интервала. На вход системы подается белый шум со спектральной плотностью $S(\omega) = N_0$, $0 \leq \omega < \infty$.

Найти корреляционную функцию процесса на выходе.

Как следует выбрать $\Delta\omega$, чтобы дисперсия выходного процесса не превосходила заданного числа D ?

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = 4K_0^2 N_0 \Delta\omega \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau} \cos \omega_0 \tau, \quad \Delta\omega \leq \frac{D}{4K_0^2 N_0}.$$

8.46. Случайный стационарный процесс $\xi(t)$ с энергетическим спектром

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{S_0}{\Delta\omega^2 + 4(\omega - \omega_0)^2},$$

где ω_0 — средняя частота спектра, $\Delta\omega$ — ширина спектра на уровне 0,5, S_0 — произвольная постоянная, действует на идеальный безынерционный усилитель с коэффициентом усиления $K(j\omega) = K_0$, $0 \leq \omega < \infty$.

Найти энергетический спектр $S_\eta(\omega)$ и корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе усилителя.

Ответ:

$$S_\eta(\omega) = \frac{S_0 K_0^2}{\Delta\omega^2 + 4(\omega - \omega_0)^2}, \quad k_\eta(\tau) = \frac{S_0 K_0^2}{2\Delta\omega} e^{-\frac{\Delta\omega}{2}|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

8.47. Определить энергетическую шумовую полосу пропускания интегрирующей цепочки RC (рис. 8.1).

Ответ:

$$\Delta f_a = \frac{1}{2RC}.$$

8.48. Фильтр состоит из двух последовательно соединенных однонаправленных линейных систем, частотные характеристики которых равны соответственно $1/(1 + j\omega T_1)$ и $1/(1 + j\omega T_2)$ (T_1 и T_2 — положительные величины).

Найти корреляционную функцию и дисперсию процесса на выходе фильтра, если спектральная плотность процесса на входе фильтра равна $S_0/(\alpha^2 + \omega^2)$.

Ответ: Пусть $k_\eta(\tau)$ и σ_η^2 — корреляционная функция и дисперсия выходного процесса, $\beta_1 = 1/T_1$, $\beta_2 = 1/T_2$. Тогда

$$k_\eta(\tau) = S_0 \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{2} \left[\frac{1}{\alpha(\beta_1^2 - \alpha^2)(\beta_2^2 - \alpha^2)} e^{-\alpha|\tau|} + \frac{1}{\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2)(\alpha^2 - \beta_1^2)} e^{-\beta_1|\tau|} + \frac{1}{\beta_2(\alpha^2 - \beta_2^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)} e^{-\beta_2|\tau|} \right],$$

$$\sigma_\eta^2 = S_0 \frac{\beta_1 \beta_2}{2\alpha} \frac{\alpha + \beta_1 + \beta_2}{(\alpha + \beta_1)(\alpha + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}.$$

8.49. Показать, что взаимная корреляционная функция для случайного стационарного процесса $\xi(t)$, действующего на линейную систему с импульсной переходной функцией $G(t)$, и реакции $\eta(t)$ системы на это воздействие равна

$$k_{\xi\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) k_\xi(\tau - x) dx.$$

8.50. Определить среднее значение и корреляционную функцию процесса

$$\mu(t) = \xi(t) + \eta(t)$$

на выходе суммирующего устройства, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — случайные процессы со средними значениями $M_\xi(t)$ и $M_\eta(t)$, корреляционными функциями $K_\xi(t_1, t_2)$ и $K_\eta(t_1, t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{\xi\eta}(t_1, t_2)$.

Ответ:

$$M_\mu(t) = M_\xi(t) + M_\eta(t),$$

$$K_\mu(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2) + K_\eta(t_1, t_2) + K_{\xi\eta}(t_1, t_2) + K_{\eta\xi}(t_1, t_2).$$

8.51. Решить задачу 8.50 для случая

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t).$$

Ответ [5]:

$$M_\mu(t) = \sum_{i=1}^n M_{\xi_i}(t);$$

$$K_\mu(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n K_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq k)}}^n K_{\xi_i \xi_k}(t_1, t_2).$$

8.52. Выразить корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ процесса на выходе фильтра (рис. 8.34) через корреляционную функцию $k_\xi(\tau)$ процесса на входе.

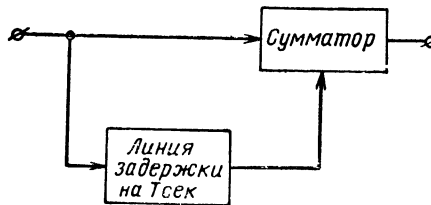


Рис. 8.34. Схема фильтра.

Ответ [5]:

$$k_\eta(\tau) = 2k_\xi(\tau) + k_\xi(\tau - T) + k_\xi(\tau + T).$$

8.53. На вход линии задержки, имеющей N отводов через временные интервалы θ (рис. 8.35), воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $k_\xi(\tau)$.

Определить корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ и энергетический спектр $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе сумматора.

Ответ [8]:

$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{N} k_\xi(\tau) + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) k_\xi(\tau + i\theta) +$$

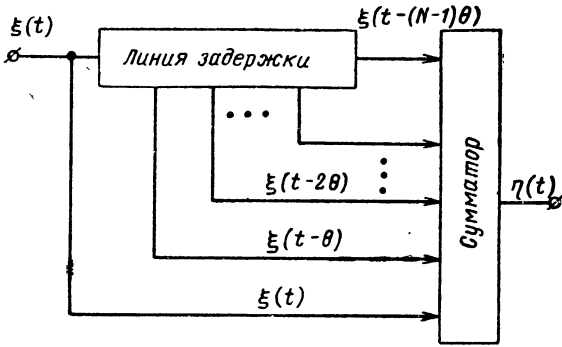


Рис. 8.35. Суммирующее устройство с линией задержки.

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) k_{\xi} (\tau - i\theta),$$

$$S_{\eta}(\omega) = S_{\xi}(\omega) \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{N\theta}{2} \omega}{\sin \frac{\theta}{2} \omega} \right)^2.$$

График функции $S_{\eta}(\omega)/S_{\xi}(\omega/2) = f(\theta\omega)$ приведен на рис. 8.36.

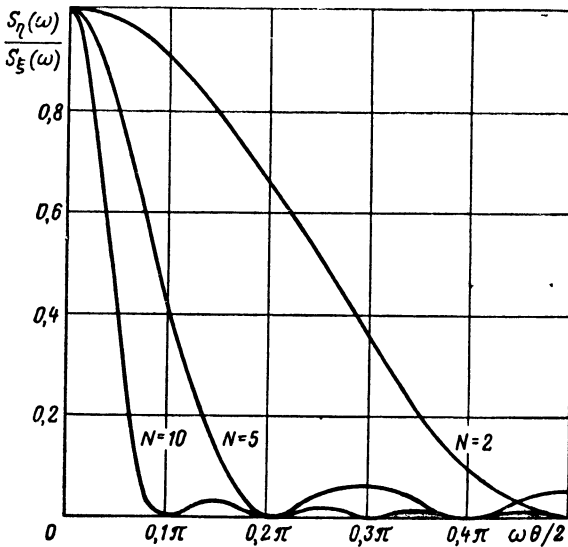


Рис. 8.36. Энергетический спектр процесса на выходе сумматора.

8.54. На вход фильтра, функциональная схема которого представлена на рис. 8.37, поступает случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha\tau^2}.$$

Найти дисперсию процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра.

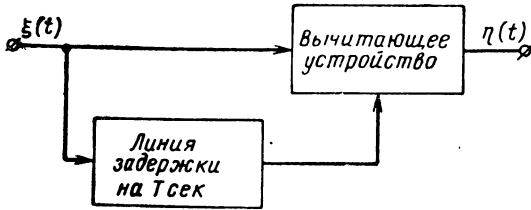


Рис. 8.37. Вычитающее устройство с линией задержки.

Ответ:

$$\sigma_{\eta}^2 = 2\sigma_{\xi}^2 (1 + e^{-\alpha T^2}).$$

8.55. Найти энергетический спектр процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра (рис. 8.37), если энергетический спектр процесса $\xi(t)$ на входе

$$S_{\xi}(\omega) = Ae^{-\alpha^2\omega^2} + B\delta\left(\omega - \frac{20\pi}{T}\right),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, T — время задержки в линии.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = 4Ae^{-\alpha^2\omega^2} \sin^2 \frac{\omega T}{2}.$$

8.56. Найти корреляционную функцию $k_{\eta}(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра, функциональная схема которого представлена на

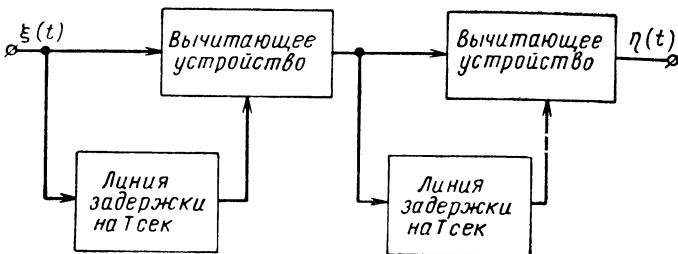


Рис. 8.38. Функциональная схема фильтра.

рис. 8.38, через корреляционную функцию $k_{\xi}(\tau)$ процесса $\xi(t)$ на входе.

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = k_{\xi}(\tau) - 4k_{\xi}(\tau - T) - 4k_{\xi}(\tau + T) + k_{\xi}(\tau - 2T) + k_{\xi}(\tau + 2T).$$

8.57. На вход радиотехнического устройства, состоящего из последовательно соединенных дифференцирующих устройств и сумматора (рис. 8.39) воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $k_{\xi}(\tau)$.

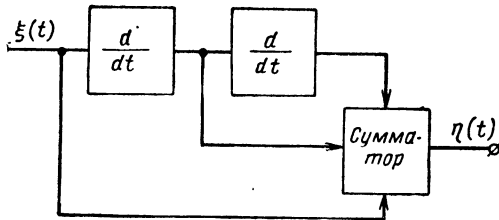


Рис. 8.39. Последовательное соединение дифференцирующих устройств и сумматора.

Определить корреляционную функцию $k_{\eta}(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе сумматора.

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = k_{\xi}(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} k_{\xi}(\tau) + \frac{d^4}{d\tau^4} k_{\xi}(\tau).$$

8.58. Решить задачу 8.57 при условии, что на вход устройства воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 \right).$$

Ответ:

$$k_{\eta}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \left[1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2 + \frac{2\alpha^2}{3} (\alpha^2 \tau^2 - \alpha|\tau| - 1) + \frac{\alpha^4}{3} (\alpha^2 \tau^2 - 5\alpha|\tau| + 3) \right].$$

8.59. Определить энергетическую шумовую полосу пропускания системы, функциональная схема которой представлена на рис. 8.40.

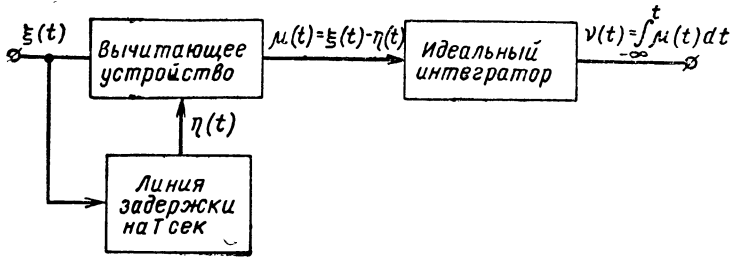


Рис. 8.40. Функциональная схема линейного устройства.

Ответ:

$$\Delta f_0 = \frac{1}{2T}.$$

8.60. Указать вариант схемы, при помощи которой можно получить стационарный шум с функцией корреляции

$$k(\tau) = \frac{1}{8} \alpha N_0 (1 + \alpha |\tau|) e^{-\alpha |\tau|}.$$

Ответ: Нужно пропустить стационарный белый шум через две электрически изолированные одинаковые интегрирующие цепочки RC , причем $\alpha = 1/RC$.

8.61. Передаточная функция $K(j\omega)$ структурной схемы линеаризованной системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) (рис. 8.41) имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{\mu K_\Phi(j\omega) \frac{\Omega}{j\omega}}{1 + \mu \frac{K_\Phi(j\omega)}{j\omega} \Omega},$$

где μ — коэффициент передачи фазового детектора, $K_\Phi(j\omega)$ — передаточная функция фильтра низких частот, $\Omega/j\omega$ — коэффициент передачи управляемого генератора.

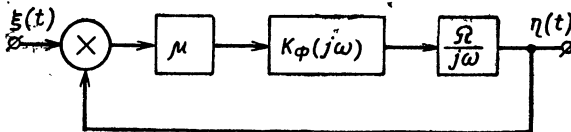


Рис. 8.41. Структурная схема линеаризованной системы ФАП.

На систему воздействует стационарный шум $\xi(t)$ со спектральной плотностью

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0 & \text{при } 0 \leq \omega < \infty, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Определить шумовую полосу

$$\Delta\omega_{ш} = \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega$$

системы ФАП для следующих случаев:

- а) ФАП без фильтра нижних частот;
 б) ФАП с RC -фильтром нижних частот, для которого

$$K_{\Phi}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T};$$

в) ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром нижних частот (см. пример 8.3):

$$K_{\Phi}(j\omega) = \frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T};$$

г) ФАП с интегратором:

$$K_{\Phi}(j\omega) = 1 + \frac{\lambda}{j\omega}.$$

Ответ [9]:

а) $\Delta\omega_{ш} = \Omega$; б) $\Delta\omega_{ш} = \Omega$;

в) $\Delta\omega_{ш} = \Omega \frac{1+\mu\Omega T_1}{1+\mu\Omega T} \frac{T_1}{T}$; г) $\Delta\omega_{ш} = \Omega \left(1 + \frac{\mu\lambda}{\Omega}\right)$.

8.62. Вычислить одномерную плотность вероятности $W_1(u)$ напряжения $u(t)$ на конденсаторе C в стационарном состоянии, когда на последовательную цепочку RC воздействует случайный телеграфный сигнал $\xi(t)$ (рис. 8.42). Сигнал $\xi(t)$ с одинаковыми вероятностями, равными $1/2$, принимает лишь два значения: $+1$ и -1 . Моменты перемены знака (нулей) распределены по закону Пуассона, т. е. вероятность получения n нулей в интервале $(t, t + \tau)$ равна

$$P(n, \tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau},$$

где λ — среднее число нулей в единицу времени.

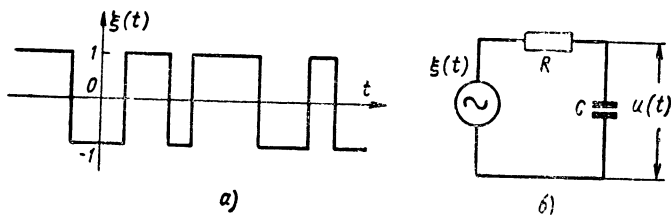


Рис. 8.42. Случайный телеграфный сигнал (а) и интегрирующая цепочка RC (б).

Ответ [10]:

$$W_1(u) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\lambda T + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda T)} (1-u^2)^{\lambda T-1}, & |u| \leq 1, \\ 0 & \text{при других } u. \end{cases} \quad (8.50)$$

Здесь $T = RC$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

8.63. Получить из (8.50) асимптотические выражения и построить графики плотностей вероятностей $W_1(u)$ для следующих пяти частных случаев:

- 1) $\lambda T \gg 1$; 2) $\lambda T = 2$; 3) $\lambda T = 3/2$; 4) $\lambda T = 1$; 5) $\lambda T \ll 1$.

Ответ приведен в табл. 8.3 [10].

8.64. Электрическая цепь состоит из источника постоянного напряжения E , индуктивности L и сопротивления R (рис. 8.43).

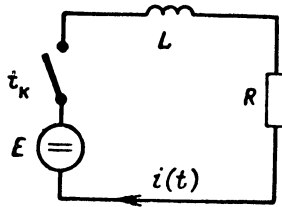


Рис. 8.43. Электрическая цепь.

Источник напряжения подключается и выключается в моменты времени $t_k = T + k\theta$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, θ — фиксированный интервал времени, T — случайная величина, не зависящая от k и равномерно распределенная на интервале $[0, \theta]$. Вероятность того, что источник включен или выключен в интервале времени от t_k до t_{k+1} , равна $1/2$ для всех k .

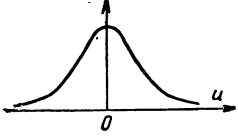
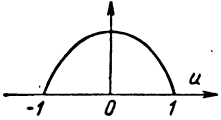
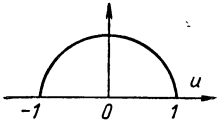
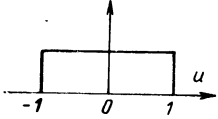
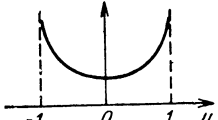
Определить среднее значение, корреляционную функцию и спектральную плотность тока $i(t)$.

Ответ:

$$m_i = \frac{E}{2R}; \quad k_i(\tau) = \frac{E^2 L}{80R^3} \left[e^{-\frac{R}{L}|\theta+\tau|} + e^{-\frac{R}{L}|\theta-\tau|} - 2e^{-\frac{R}{L}|\tau|} + \frac{R}{L} (|\theta+\tau| + |\theta-\tau| - 2|\tau|) \right];$$

$$S_i(\omega) = \frac{E^2}{2\theta} \frac{1 - \cos \omega\theta}{\omega^2 (R^2 + \omega^2 L^2)}.$$

Плотность вероятности $W_1(u)$ при различных значениях λT .

| Значение параметра λT | Аналитическое выражение | График |
|--------------------------------|--|---|
| $\lambda T \gg 1$ | $W_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\},$ $z = u \sqrt{2\lambda T + 1}$ |  |
| $\lambda T = 2$ | $W_1(u) = \frac{3}{4} (1 - u^2),$ $ u \leq 1$ |  |
| $\lambda T = \frac{3}{2}$ | $W_1(u) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - u^2},$ $ u \leq 1$ |  |
| $\lambda T = 1$ | $W_1(u) = \frac{1}{2}, \quad u < 1$ |  |
| $\lambda T \ll 1$ | $W_1(u) = \lambda T (1 - u^2)^{\lambda T - 1},$ $ u \leq 1$ |  |

Литература

1. С к л я р е в и ч А. Н. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем. Изд-во «Наука», 1965.
2. С в е ш н и к о в А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
3. Т и х о н о в В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.

4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд-во «Советское радио», 1966.
5. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1965.
6. Paroulis A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, New-York, 1965.
7. Горяинов В. Т. Воздействие отрезка квазигармонических флуктуаций в смеси с белым шумом на линейные системы. «Радиотехника», 1966, т. 21, № 6.
8. Чайковский В. И. Энергетический спектр суммы запаздывающих стохастических сигналов. «Известия вузов», Радиотехника, 1965, т. VIII, № 1.
9. Тепляков И. М. Радиотелеметрия. Изд-во «Советское радио», 1966.
10. Wohman W. M., Fuller A. T. Probability Densities of the Smoothed «Random Telegraph Signal». Journ. Electronics and Control, 1958, v. 4, № 6.

9. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Теоретические сведения

Среди нелинейных преобразований случайных процессов простейшим является такое преобразование (рис. 9.1), при котором значение выходного процесса $\eta(t)$ в любой момент времени определяется только значением входного процесса $\xi(t)$ в тот же момент времени

$$\eta(t) = g[\xi(t)], \quad (9.1)$$

где $g[\xi]$ — некоторая нелинейная функция. Такое нелинейное преобразование называют безынерционным или функциональным.

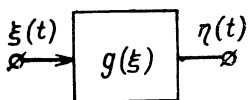


Рис. 9.1 Нелинейный безынерционный преобразователь.

К безынерционному сводятся также нелинейные преобразования, при которых входной и выходной процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ подвергаются дополнительной трансформации линейными системами (рис. 9.2),

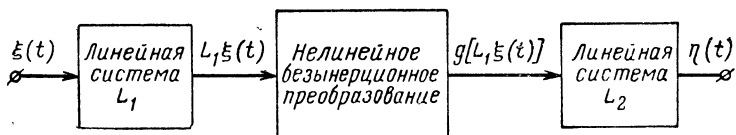


Рис. 9.2. Типовое радиотехническое устройство.

не оказывающими реакции на нелинейный элемент. Такое преобразование можно записать в форме

$$\eta(t) = L_2 g[L_1 \xi(t)],$$

где L_1 и L_2 — линейные операторы, описывающие поведение линейных систем.

Поскольку правила преобразования характеристик случайных процессов линейными системами известны (см. гл. 8), для изучения указанных нелинейных преобразований достаточно рассмотреть преобразование (9.1).

Общее правило. В общем виде принципиальное решение задачи о нелинейных безынерционных преобразованиях случайных процессов дается известным свойством инвариантности дифференциала вероятности. Пусть известна n -мерная плотность вероятности $\omega_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и нужно найти плотность вероятности $W_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ для случайных величин

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ \eta_2 &= g_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \eta_n &= g_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

где функции g_i — кусочно-непрерывные.

Если существуют однозначные обратные функции

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= h_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \\ \xi_2 &= h_2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \xi_n &= h_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

то интересующая нас плотность вероятности определяется формулой

$$W_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \omega_n[h_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), h_2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \dots, h_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)] |D_n|, \quad (9.4)$$

где D_n — якобиан преобразования от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ к переменным $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$:

$$D_n = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}. \quad (9.5)$$

В тех случаях, когда обратные функции h_i неоднозначны, в правой части формулы (9.4) следует взять сумму по каждой из подобластей.

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть

$$\eta_1 = g_1(\xi_1) = \xi_1, \quad \eta_2 = \eta = g_2(\xi_1, \xi_2),$$

причем обратные функции

$$\xi_1 = h_1(\eta_1) = \eta_1, \quad \xi_2 = h_2(\eta_1, \eta_2)$$

однозначны. Якобиан преобразования (9.5) в данном случае равен

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2} = \frac{\partial h_2}{\partial \eta},$$

а совместная плотность вероятности $W_2(\eta_1, \eta)$ случайных величин η_1 и η в соответствии с (9.4) определяется формулой

$$W_2(\eta_1, \eta) = \omega_2[\eta_1, h_2(\eta_1, \eta)] \left| \frac{\partial h_2}{\partial \eta} \right|. \quad (9.6)$$

Интегрируя (9.6) по η_1 , получим одномерную плотность вероятности для случайной величины η :

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2[\eta_1, h_2(\eta_1, \eta)] \left| \frac{\partial h_2}{\partial \eta} \right| d\eta_1. \quad (9.7)$$

Последняя формула позволяет получить следующие выражения для плотностей вероятностей суммы, разности, произведения и частного двух случайных процессов:

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\xi_1, \eta - \xi_1) d\xi_1, \quad \eta = \xi_1 + \xi_2; \quad (9.7a)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\xi_1, \eta + \xi_1) d\xi_1, \quad \eta = \xi_1 - \xi_2; \quad (9.7b)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2\left(\xi_1, \frac{\eta}{\xi_1}\right) \frac{d\xi_1}{|\xi_1|}, \quad \eta = \xi_1 \xi_2; \quad (9.7b)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\xi_1, \eta \xi_1) |\xi_1| d\xi_1, \quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}. \quad (9.7r)$$

При применении формулы (9.4) к практически интересным нелинейным преобразованиям могут возникнуть трудности. Так, если функции g_i являются полиномами выше третьей степени, то в общем случае затруднительно найти функции h_i , т. е. аналитически разрешить систему нелинейных уравнений (9.2) относительно ξ_i . Аналогичные трудности возникают и при трансцендентных функциях g_i . При кусочно-линейной аппроксимации функции g_i оказываются разрывными и производные $\partial h_i / \partial g_i$ во многих типовых случаях в некоторых точках могут быть равными бесконечности.

Ввиду сложности непосредственного вычисления плотностей вероятностей часто ограничиваются нахождением более простых, но менее полных статистических характеристик выходного процесса, например, среднего значения и функции корреляции. Применительно к разным видам нелинейных преобразований для определения этих характеристик можно указать несколько методов.

Полиномиальное преобразование [1]. Пусть характеристика нелинейного элемента $\eta = g(\xi)$ является аналитической функцией в окрестности некоторой точки C . Тогда ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$\eta = g(\xi) = a_0 + a_1(\xi - C) + \dots + a_n(\xi - C)^n, \quad a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k g(\xi)}{d\xi^k} \right|_{\xi=C}, \quad (9.8)$$

число членов которого определяется требуемой точностью аппроксимации.

Обозначим начальные моментные функции процесса $\xi(t)$ через M , а $\eta(t)$ — через \tilde{M} . Статистически усредняя левую и правую части равенства (9.8), получим

$$\tilde{M}_1(t) = \langle \eta(t) \rangle = a_0 + a_1 \langle \xi(t) - C \rangle + \dots + a_n \langle [\xi(t) - C]^n \rangle. \quad (9.9)$$

Перемножив левые и правые части равенства (9.8) для двух моментов времени t_1, t_2 , и выполнив операцию статистического усреднения, получим выражение для двумерного момента

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11}(t_1, t_2) &= a_0^2 + a_0 a_1 [M_1(t_1) + M_1(t_2) - 2C] + \\ &+ a_1^2 [M_{11}(t_1, t_2) - CM_1(t_1) - CM_1(t_2) + C^2] + \dots \\ &\dots + a_n^2 \langle [\xi(t_1) - C]^n [\xi(t_2) - C]^n \rangle. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Аналогичным образом находятся выражения для высших моментов.

Для получения явного выражения моментных функций процесса $\eta(t)$ через моментные функции процесса $\xi(t)$ нужно воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(\xi - C)^k = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \xi^{k-i} C^i,$$

раскрыть члены вида

$$[\xi(t_1) - C]^k [\xi(t_2) - C]^l [\xi(t_3) - C]^m \dots, \quad k, l, m \leq n,$$

и затем выполнить статистическое усреднение. При этом, если процесс $\xi(t)$ задан своими моментами, сразу получаем нужный результат. Если же процесс $\xi(t)$ задан плотностями вероятностей или характеристическими функциями, то по ним необходимо предварительно вычислить его моменты.

Моменты сравнительно просто находятся для нормального стационарного процесса $\xi(t)$. Пусть среднее значение процесса равно нулю; обозначим его дисперсию через σ^2 , а коэффициент корреляции (нормированную корреляционную функцию) — через $R(\tau)$. Нетрудно убедиться [2], что одномерные моменты такого процесса определяются формулой

$$m_\mu = \langle \xi^\mu(t) \rangle = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (\mu - 1) \sigma^\mu & \text{при четном } \mu, \\ 0 & \text{при нечетном } \mu, \end{cases}$$

а для двумерных моментов справедливо соотношение

$$m_{\mu,\nu}(\tau) = \langle \xi^\mu(t) \xi^\nu(t+\tau) \rangle = \sigma^{\mu+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N_{\mu,k} N_{\nu,k} R^k(\tau),$$

где

$$N_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^i \Phi^{(k+1)}(\xi) d\xi; \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad (9.11)$$

$$\Phi^{(n+1)}(z) = \frac{d^{(n+1)}}{dz^{(n+1)}} \Phi(z), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Совокупность коэффициентов N_{ik} образует матрицу, приведенную в табл. 5.3.

Трехмерные моменты нормального процесса определяются аналогичным способом [3]. Общее правило вычисления многомерных моментов установлено в работах [4,5].

Из формул (9.9) и (9.10) видно, что моментные функции процесса $\eta(t)$ линейно выражаются через моментные функции процесса $\xi(t)$, однако формулы для моментных функций выходного процесса включают более высокие моментные функции входного процесса. В этом состоит одна из характерных особенностей любого нелинейного преобразования (в том числе и полиномиального) по сравнению с линейным.

Кусочно-разрывные и трансцендентные преобразования. При рассмотрении воздействия достаточно сильных сигналов и помех на нелинейные устройства часто применяют аппроксимацию их характеристик кусочно-разрывными или трансцендентными функциями $g(\xi)$, поскольку они позволяют лучше передать существенные свойства большого участка нелинейной характеристики. Вычисление моментных (корреляционных) функций выходного процесса для нелинейных преобразований (9.1) такого вида можно выполнять двумя тесно связанными методами: прямым методом и методом характеристических функций [6].

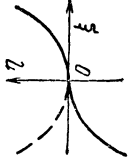
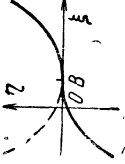
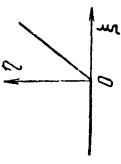
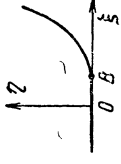
В прямом методе используются сами нелинейные характеристики и статистическое усреднение выполняется при помощи плотностей вероятностей. При этом одномерные моментные функции находятся согласно очевидной формуле

$$\tilde{M}_n(t) = \langle \eta^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^n[\xi(t)] W_1(\xi, t) d\xi,$$

а для двумерного момента $\tilde{M}_{11}(t_1, t_2)$ справедливо соотношение

$$\tilde{M}_{11}(t_1, t_2) = \langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) g(\xi_2) W_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (9.12)$$

Характеристики нелинейных устройств

| Тип нелинейного устройства | $g(\xi)$ | | $F(j\omega)$ | L |
|--|---|---|--|--|
| | аналитическое выражение | график | | |
| 1. Устройство с характеристикой v -й степени | $\eta = a\xi^v$ (v — целое) |  | $\frac{a v!}{(j\omega)^{v+1}}$ | Положительная петля вокруг $\omega=0$ |
| 2. Устройство с характеристикой v -й степени со смещением | $\eta = a(\xi - B)^v$ (v — целое) |  | $\frac{a v!}{(j\omega)^{v+1}} e^{-j\omega B}$ | То же |
| 3. Однополупериодный линейный выпрямитель | $\eta = \begin{cases} a\xi, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$ |  | $\frac{a}{(j\omega)^2}$ | Действительная ось ω от ∞ до $-\infty$, вырез вниз при $\omega=0$ |
| 4. Выпрямитель с характеристикой v -й степени и с ограничением | $\eta = \begin{cases} a(\xi - B)^v, & \xi > B, \\ 0, & \xi < B \end{cases}$ (v — положительное) |  | $\frac{a \Gamma(v+1)}{(j\omega)^{v+1}} e^{-j\omega B}$ | То же |

| Тип нелинейного устройства | g(ξ) | | L |
|--|---|--------|--|
| | аналитическое выражение | график | |
| 5. Линейный выпрямитель с ограничением | $\eta = \begin{cases} aD, & \xi \geq D, \\ a\xi, & 0 < \xi < D, \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases}$ | | $\frac{a(1 - e^{-juD})}{(ju)^2}$ <p>То же</p> |
| 6. Однополупериодный выпрямитель | $\eta = \begin{cases} g(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases}$ | | $\int_0^{\infty} g(\xi) e^{-ju\xi} d\xi$ <p>То же</p> |
| 7. Идеальный ограничитель | $\eta = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ -1, & \xi \leq 0 \end{cases}$ | | $\pm \frac{1}{u}$ <p>То же</p> |
| 8. Сглаженный ограничитель | $\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} \int_0^{\xi} e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}} dx$ | | $\frac{1}{ju} e^{-\frac{\beta^2 u^2}{2}}$ <p>То же</p> |

где

$$\xi_1 = \xi(t_1), \quad \xi_2 = \xi(t_2).$$

В методе характеристических функций нелинейная характеристика представляется при помощи преобразования Лапласа или Фурье:

$$\eta = g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_L F(ju) e^{ju\xi} du,$$

где L — соответствующим образом выбранный контур интегрирования в комплексной области u .

Вид контура интегрирования и выражение функции $F(ju)$, представляющей собой прямое преобразование Лапласа нелинейной функции $g(\xi)$:

$$F(ju) = \int_0^{\infty} g(\xi) e^{-ju\xi} d\xi,$$

приведены в табл. 9.1 [7]. Нетрудно убедиться, что в данном случае двумерный момент $\tilde{M}_{11}(t_1, t_2)$ определяется формулой

$$\tilde{M}_{11}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F(ju_1) F(ju_2) \Theta_2(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (9.13)$$

где $\Theta_2(u_1, u_2)$ — двумерная характеристическая функция входного воздействия $\xi(t)$.

Из (9.12) и (9.13) следует, что как метод характеристических функций, так и прямой метод требуют одних и тех же априорных сведений о входном случайном процессе $\xi(t)$, ибо характеристические функции и плотности вероятностей, как известно, связаны преобразованием Фурье. При выборе того или иного из рассмотренных методов решающее значение имеют не столько теоретические соображения, сколько трудности, связанные с вычислениями. В заключение отметим, что если $\xi(t)$ является нормальным случайным процессом, то естественным результатом прямого метода является выражение ответа через табулированные производные от интеграла вероятности [8], а при использовании метода характеристических функций ответ чаще выражается через гипергеометрические функции [9]. Однако это не имеет существенного значения, так как производные от интеграла вероятности и вырожденная гипергеометрическая функция связаны друг с другом известными соотношениями [8].

Если на вход рассматриваемого нелинейного элемента воздействует нормальный стационарный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением, дисперсией σ^2 и нормированной корреляционной функцией $R(\tau)$, то процедура вычисления интегралов в правых частях

формул (9.12) и (9.13) может быть упрощена применением специальных приемов. Применительно к формуле (9.12) один из таких приемов, названный методом дельта-функции, был развит в работах [10, 11]. Позже аналогичный метод, называемый методом Прайса [12], был применен к вычислению интегралов вида (9.13).

Метод дельта-функции базируется на представлении двумерной плотности вероятности нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-R^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{\xi_1^2 - 2R(\tau)\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{2\sigma^2 [1-R^2(\tau)]} \right\} \quad (9.14)$$

в виде ряда [2]

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2) = \sigma^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) R^n(\tau).$$

На основании этого разложения формулу (9.12) можно представить в виде

$$\tilde{M}_{11}(\tau) = m_\eta^2 + \sigma^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi \right\}^2 R^n(\tau), \quad (9.15)$$

где среднее значение m_η выходного процесса $\eta(t)$ определяется формулой

$$m_\eta = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi. \quad (9.16)$$

Из (9.16) следует, что функция корреляции выходного процесса равна

$$k_\eta(\tau) = \tilde{M}_{11}(\tau) - m_\eta^2 = \sigma^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi \right\}^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (9.17)$$

Применяя к (9.17) интегрирование по частям ν раз и используя известные свойства функций $\Phi^{(n)}(z)$ [8], получим

$$k_\eta(\tau) = \sigma^{2\nu-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g^{(\nu)}(\xi) \Phi^{(n+1-\nu)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi \right\}^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (9.18)$$

Применительно к различным кусочно-разрывным характеристикам нелинейных элементов следует выполнять интегрирование по частям такое число ν раз, чтобы ν -я производная $g^{(\nu)}(\xi)$ превратилась в δ -функцию или сумму δ -функций.

Формула (9.18) устанавливает связь между функцией корреляции выходного процесса и коэффициентом корреляции входного

процесса и, следовательно, позволяет найти спектр выходного процесса по известному спектру процесса на входе нелинейного элемента. Наличие в (9.18) членов с $n \geq 2$ приводит к искажению и расширению спектра выходного процесса по сравнению со спектром входного процесса. В этом, в частности, состоит вторая характерная особенность нелинейных безынерционных преобразований.

При вычислении интегралов вида (9.13) можно продуктивно использовать тот факт, что для характеристической функции стационарного нормального процесса

$$\begin{aligned} \Theta_2(u_1, u_2) &= \langle \exp \{ju_1 \xi_1 + ju_2 \xi_2\} \rangle = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 [u_1^2 + 2R(\tau) u_1 u_2 + u_2^2] \right\} \end{aligned} \quad (9.19)$$

справедливо соотношение

$$\frac{\partial^k \Theta_2}{\partial R^k} = (-1)^k (\sigma^2 u_1 u_2)^k \Theta_2(u_1, u_2),$$

в соответствии с чем (9.13) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^k \tilde{M}_{11}(\tau)}{\partial R^k} = \frac{\sigma^{2k}}{4\pi^2} \int_L (ju_1)^k F(ju_1) du_1 \int_L (ju_2)^k F(ju_2) \Theta_2(u_1, u_2) du_2.$$

Подставив сюда исходное определение характеристической функции (9.19) и изменив порядок интегрирования и статистического усреднения, получим [12]

$$\frac{\partial^k \tilde{M}_{11}(\tau)}{\partial R^k} = \sigma^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(k)}(\xi_1) g^{(k)}(\xi_2) w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (9.20)$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_L (ju)^k F(ju) e^{ju\xi} du = g^{(k)}(\xi) = \frac{d^k g(\xi)}{d\xi^k}.$$

При вычислении функции корреляции процесса на выходе нелинейных элементов с кусочно-разрывными характеристиками по формуле (9.20) нужно брать такое значение k , при котором $g^{(k)}(\xi)$ обращается в сумму дельта-функций. Тогда интеграл в правой части (9.20) всегда вычисляется и, следовательно, находится k -я производная функции $\tilde{M}_{11}(\tau)$. Что касается последующего интегрирования по коэффициенту корреляции R с целью определения $\tilde{M}_{11}(\tau)$, то оно особенно легко выполняется в частном случае, когда $g^{(k)}(\xi) = \pm \delta(\xi)$ и воздействующий нормальный стационарный процесс $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение.

Полезные обобщения формулы (9.20) можно найти в работах [12—17].

Нелинейные инерционные преобразования. Значительно сложнее решаются задачи, связанные с воздействием случайного

процесса $\xi(t)$ на инерционные нелинейные устройства, описываемые нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\eta}(t) = f[\eta(t)] + g[\eta(t), \xi(t), t]. \quad (9.21)$$

Здесь f и g — некоторые детерминированные функции, вид которых определяется заданными параметрами системы; $\eta(t)$ — интересующий нас процесс, протекающий в системе.

Дифференциальное уравнение, содержащее случайные функции времени, часто называют стохастическим. Если функции f и g нелинейны относительно η , то (9.21) есть нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка.

Очевидно, что при случайном воздействии $\xi(t)$ интересующий нас процесс $\eta(t)$ будет иметь также случайный характер. Предполагая характеристики случайного воздействия $\xi(t)$ известными, а функции f и g — заданными, нужно найти статистические характеристики процесса $\eta(t)$. Решение этой задачи связано с решением дифференциального уравнения (9.21).

Метод решения уравнения (9.21) зависит от интенсивности случайного воздействия $\xi(t)$ и отношения его времени корреляции τ_{ξ} к характерной постоянной времени систем τ_c . При этом, говоря об интенсивности случайного воздействия, следует иметь в виду не фактическую величину той или иной статистической характеристики случайной функции $\xi(t)$ (например, величину ее дисперсии), а вызываемый ею в системе эффект (флуктуационный разброс).

В зависимости от этих двух факторов можно указать следующие частные случаи и соответствующие методы их рассмотрения.

1. Случайное воздействие малой интенсивности. В данном случае, независимо от соотношения τ_k и τ_c , применим метод линеаризации. Он заключается в том, что уравнение (9.21) линеаризируется относительно малых флуктуационных отклонений от невозмущенных значений и делается пренебрежение нелинейными членами, содержащими эти флуктуационные отклонения. Метод линеаризации позволяет сравнительно просто вычислить среднее значение и корреляционную функцию процесса $\eta(t)$ в стационарном и нестационарном состояниях и тем самым определить его плотность вероятности при воздействии на нелинейную систему нормального процесса $\xi(t)$. Однако при негауссовом возмущении $\xi(t)$ нахождение даже одномерной плотности вероятности для $\eta(t)$ сопряжено с большими трудностями.

2. Случайное воздействие большой интенсивности. В этом случае нельзя указать единого и универсального метода решения; выбор метода зависит от соотношения между τ_k и τ_c .

а) Если $\tau_k \ll \tau_c$, то применим аппарат марковских процессов и, в частности, уравнение Фоккера — Планка, согласно которому искомая одномерная плотность вероятности процесса $\eta(t)$ определяется уравнением в частных производных

$$\frac{\partial W(\eta, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \eta} [K_1(\eta) W(\eta, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} [K_2(\eta) W(\eta, t)]. \quad (9.22)$$

Здесь

$$K_n(\eta) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m_n(\eta)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle (\eta_\tau - \eta)^n \rangle}{\tau}, \quad (9.23)$$

причем при статистическом усреднении в (9.23) величина $\eta = \eta(t)$ рассматривается как фиксированная, а $\eta_\tau = \eta(t + \tau)$ считается случайной, т. е. усреднение должно выполняться с соответствующей вероятностью $p(\eta_\tau, t + \tau | \eta, t)$ перехода $\eta = \eta(t)$ в $\eta_\tau = \eta(t + \tau)$:

$$\langle (\eta_\tau - \eta)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_\tau - \eta)^n p(\eta_\tau, t + \tau | \eta, t) d\eta_\tau. \quad (9.24)$$

Указанный случай весьма часто встречается в задачах автоматики и измерительной техники. Наиболее характерным для данного метода является то, что даже в существенно нелинейных задачах он позволяет достаточно просто находить одномерные плотности вероятностей для стационарных процессов $\eta(t)$. При этом $\partial W(\eta, t)/\partial t = 0$ и уравнение (9.22) приводится к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\eta} [K_2(\eta) W(\eta)] - 2K_1'(\eta) W(\eta) = -G, \quad (9.25)$$

где постоянная G определяется граничными условиями. При нулевых граничных условиях $G = 0$ и из (9.25) получаем

$$\frac{d}{d\eta} [K_2(\eta) W(\eta)] - 2K_1(\eta) W(\eta) = 0. \quad (9.26)$$

Общее решение этого уравнения дается выражением

$$W(\eta) = \frac{C}{K_2(\eta)} \exp \left\{ 2 \int_0^\eta \frac{K_1(x)}{K_2(x)} dx \right\}, \quad (9.27)$$

где постоянная интегрирования C определяется из условия нормировки плотности вероятности $W(\eta)$.

Если (9.21) представить в виде

$$\dot{\eta}(t) = F[\eta(t), \xi(t), t], \quad (9.21a)$$

то структурные числа $K_1(\eta)$ и $K_2(\eta)$ могут быть вычислены по формулам

$$K_1(\eta) = \langle F[\eta, \xi] \rangle, \quad (9.23a)$$

$$K_2(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \langle F[\eta, \xi] F[\eta_\tau, \xi_\tau] \rangle - K_1^2(\eta) \} d\tau.$$

Для нелинейного стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{\eta}(t) = f[\eta(t)] + g[\eta(t)] \xi(t) \quad (9.21б)$$

структурные числа равны

$$\left. \begin{aligned} K_1(\eta) &= f[\eta], \\ K_2(\eta) &= N_0 g^2[\eta], \end{aligned} \right\} \quad (9.23б)$$

где

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle d\tau.$$

Для нестационарных процессов $\eta(t)$ решение уравнения (9.22) удается получить лишь в некоторых частных случаях.

При решении практических задач методом уравнения Фоккера — Планка встречаются трудности в двух случаях: во-первых, когда в правую часть дифференциального уравнения (9.21) аддитивно и линейно входит производная по времени от случайной функции $\xi(t)$, и, во-вторых, когда функция g на интересующем нас интервале изменения $\xi(t)$ является разрывной. В этих случаях иногда удается продуктивно воспользоваться явлением нормализации случайного процесса на выходе инерционной нелинейной системы [18, 19]. При этом заранее предполагается, что одномерная стационарная плотность вероятности $W(\eta)$ является нормальной с малой дисперсией. Поэтому дисперсия определяется из линеаризованного уравнения (9.21), а среднее значение — из нелинейного уравнения (9.21) [20, 21]. Кроме того, во втором случае для вычисления среднего значения и дисперсии применяют также квазилинейный метод, часто называемый методом статистической линеаризации [22], который фактически базируется на том же явлении нормализации [23].

б) При $\tau_k \gg \tau_c$ можно ограничиться квазистатическим приближением. Оно характеризуется тем, что в первом приближении делается пренебрежение производной $\dot{\eta} = d\eta(t)/dt$ в уравнении (9.21), после чего задача сводится к рассмотренному ранее безынерционному нелинейному преобразованию $f[\eta(t)] = g[\eta(t), \xi(t), t]$. В некоторых случаях [24] при сведении инерционного нелинейного преобразования к безынерционному целесообразно воспользоваться методом усреднения [25, 26].

в) Случай промежуточных времен корреляции ($\tau_k \approx \tau_c$) является наиболее сложным. Для ряда нелинейных систем этот случай можно анализировать, используя функциональное представление Вольтерра нелинейных дифференциальных уравнений [27]. Аналогичная по существу, но несколько отличная по форме методика выполнения соответствующего анализа была независимо предложена Н. Винером [7] и в работе [1].

В заключение отметим, что области применения перечисленных методов анализа принципиально не ограничиваются порядком нелинейного стохастического дифференциального уравнения. Однако с повышением порядка этого уравнения существенно возрастает трудоемкость вычислений.

§ 2. Примеры

Пример 9.1. На безынерционный двухсторонний квадратичный детектор с характеристикой (рис. 9.3)

$$\eta = g(\xi) = a\xi^2, \quad a > 0,$$

воздействует стационарный нормальный шум $\xi(t)$ с плотностью вероятности

$$\omega_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (9.28)$$

Определить плотность вероятности $W_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе детектора.

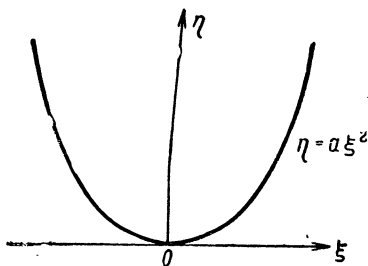


Рис. 9.3. Характеристика двухстороннего квадратичного детектора.

Решение. При $a > 0$ случайная величина η не может быть отрицательной, поэтому $W_1(\eta) = 0$ при $\eta < 0$. Для $\eta \geq 0$ имеем

$$\xi = h(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\eta}{a}},$$

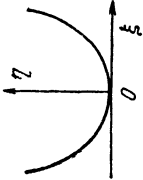
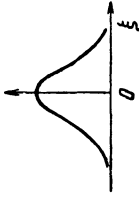
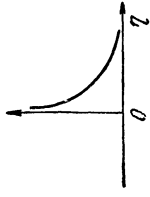
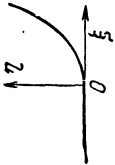
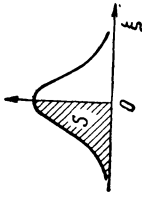
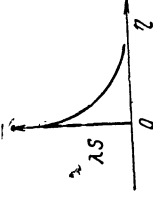
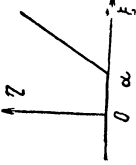
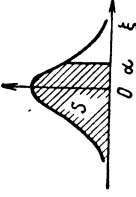
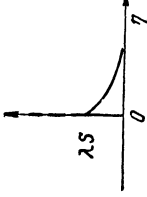
в соответствии с чем модуль якобиана преобразования (9.5) равен

$$\left| \frac{d\xi}{d\eta} \right| = \frac{1}{2\sqrt{a\eta}}.$$

Учитывая, что в рассматриваемом примере функция $\xi = h(\eta)$ двузначна, по формуле (9.4) находим

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} \left[\omega_1\left(\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) + \omega_1\left(-\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) \right], & \eta \geq 0; \\ 0, & \eta < 0. \end{cases} \quad (9.29)$$

Таблица 9.2
Плотности вероятностей $W_1(\eta)$ на выходе типовых безынерционных нелинейных устройств

| Тип нелинейного устройства | $g(\xi)$ | | $\omega_1(\xi)$ | $W_1(\eta)$ |
|--|--|---|---|---|
| | аналитическое выражение | график | | |
| 1. Двухсторонний квадратичный детектор | $\eta = a\xi^2, \quad a > 0$ |  |  |  |
| 2. Односторонний квадратичный детектор | $\eta = \begin{cases} a\xi^2, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$ |  |  |  |
| 3. Односторонний ограничитель | $\eta = \begin{cases} s\xi, & \xi \geq \alpha, \\ 0, & \xi < \alpha \end{cases}$ |  |  |  |

Продолжение табл. 9.2

| Тип нелинейного устройства | g(ξ) | | ω ₁ (ξ) | W ₁ (η) |
|-------------------------------|--|--------|--------------------|--------------------|
| | аналитическое выражение | график | | |
| 4. Двухсторонний ограничитель | $\eta = \begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ s\xi, & -\beta \leq \xi \leq \alpha, \\ a, & \xi > \alpha \end{cases}$ | | | |
| 5. Квантователь на два уровня | $\eta = \begin{cases} a, & \xi \geq 0, \\ -b, & \xi < 0 \end{cases}$ | | | |
| 6. Квантователь на три уровня | $\eta = \begin{cases} a, & \xi > \alpha, \\ 0, & -\beta \leq \xi \leq \alpha, \\ -b, & \xi < -\beta \end{cases}$ | | | |
| 7. Ограничитель | $\eta = \begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ s\xi, & -\beta \leq \xi < -\gamma, \\ 0, & -\gamma \leq \xi \leq \epsilon, \\ s\xi, & \epsilon < \xi \leq \alpha, \\ a, & \xi > \alpha \end{cases}$ | | | |

Если среднее значение процесса $\xi(t)$ равно нулю ($m = 0$), то формула (9.29) приводится к виду

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi a \eta}} \exp\left\{-\frac{\eta}{2a\sigma^2}\right\}, & \eta \geq 0, \\ 0, & \eta < 0. \end{cases}$$

График этой функции приведен в табл. 9.2.

Пример 9.2. На вход безынерционного ограничителя с характеристикой (рис. 9.4)

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} -b & \text{при } \xi < -\beta, \\ s\xi & \text{при } -\beta \leq \xi \leq \alpha, \\ a & \text{при } \xi > \alpha \end{cases} \quad (9.30)$$

воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с плотностью вероятности (9.28).

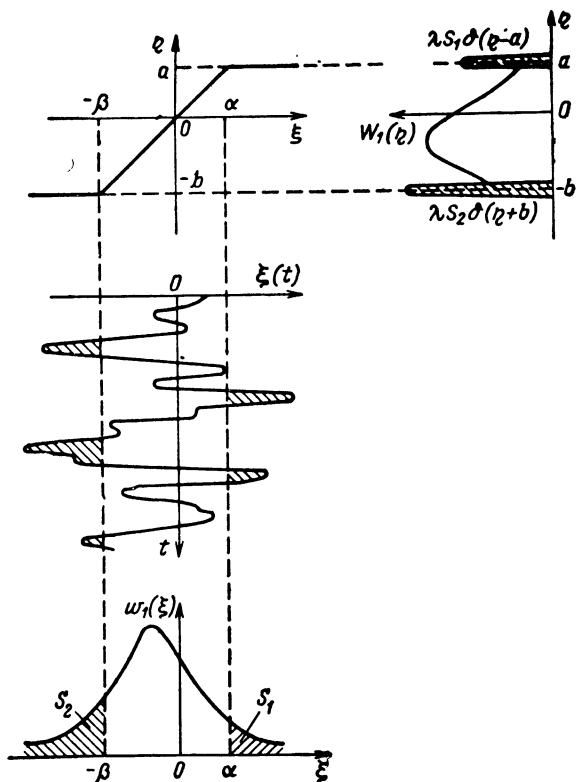


Рис. 9.4. Воздействие случайных процессов на безынерционный ограничитель.

Определить плотность вероятности $W_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе ограничителя.

Решение. На интервале $[-b, a]$ преобразование $\eta = g(\xi)$ в данном примере является линейным: $\eta = s\xi$. Поэтому внутри этого интервала

$$W_1(\eta) = w_1\left(\frac{\eta}{s}\right) \frac{1}{s}, \quad -b < \eta < a.$$

Вероятность того, что $\eta < -b$ или $\eta > a$, равна нулю, а вероятность того, что η заключено в интервале $[-b, a]$, равна

$$P(-b < \eta < a) = \int_{-b}^a W_1(\eta) d\eta = \frac{1}{s} \int_{-b}^a w_1\left(\frac{\eta}{s}\right) d\eta.$$

Все значения ξ , для которых $\xi \geq \alpha$, преобразуются ограничителем в одно значение $\eta = a$ (рис. 9.4). Аналогично, все значения $\xi \leq -\beta$ преобразуются в значение $\eta = -b$. Следовательно, вероятность

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\infty} w_1(\xi) d\xi$$

преобразуется для η в дельта-функцию, расположенную в точке $\eta = a$. Множитель при этой дельта-функции $\delta(\eta - a)$ пропорционален S_1 . Вероятность

$$S_2 = \int_{-\infty}^{-\beta} w_1(\xi) d\xi$$

преобразуется для η в дельта-функцию, расположенную в точке $\eta = -b$, множитель при этой дельта-функции $\delta(\eta + b)$ пропорционален S_2 . Таким образом, искомая плотность вероятности равна

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{s} w_1\left(\frac{\eta}{s}\right) + \lambda S_1 \delta(\eta - a) + \lambda S_2 \delta(\eta + b), & -b \leq \eta \leq a, \\ 0, & \eta < -b, \quad \eta > a. \end{cases}$$

Здесь λ — коэффициент пропорциональности, определяемый из условия нормировки плотности вероятности $W_1(\eta)$:

$$\lambda(S_1 + S_2) + \frac{1}{s} \int_{-b}^a w_1\left(\frac{\eta}{s}\right) d\eta = 1.$$

Очевидно, при $s = 1$ коэффициент $\lambda = 1$.

График плотности вероятности $W_1(\eta)$ приведен в табл. 9.2. Там же представлены плотности вероятностей $W_1(\eta)$ на выходе некоторых безынерционных нелинейных устройств при воздействии на их

вход стационарного нормального случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением.

Пример 9.3. Определение дальности до цели сопровождается систематической и случайной ошибками дальномера. Первая из них представляет собой стационарный случайный процесс $\xi(t)$, равномерно распределенный на интервале $[-a/2, a/2]$, а вторая — нормальный случайный процесс $\eta(t)$ с плотностью вероятности

$$w_{\eta}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (9.31)$$

Полагая процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимыми, определить вероятность того, что суммарная ошибка

$$\mu(t) = \xi(t) + \eta(t)$$

будет находиться внутри интервала $[-z, z]$.

Решение. Искомая вероятность $P(-z < \mu < z)$ равна

$$P(-z < \mu < z) = \int_{-z}^z W_1(\mu) d\mu, \quad (9.32)$$

где $W_1(\mu)$ — плотность вероятности процесса $\mu(t)$, для вычисления которой можно воспользоваться формулой (9.7а).

Учитывая, что по условию процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ статистически независимы, имеем

$$W_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\mu - \eta) w_{\eta}(\eta) d\eta. \quad (9.33)$$

Подставляя в (9.33) плотность вероятности (9.31) и

$$W_{\xi}(\xi) = \frac{1}{a}, \quad -\frac{a}{2} \leq \xi \leq \frac{a}{2}, \quad (9.34)$$

находим

$$\begin{aligned} W_1(\mu) &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mu - \frac{a}{2}}^{\mu + \frac{a}{2}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} d\eta = \\ &= \frac{1}{a} \left[\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{a}{2\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{a}{2\sigma}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности (2.9). Графики плотности вероятности $W_1(\mu)$ для нескольких значений σ/a приведены на рис. 9.5.

После подстановки (9.35) в (9.32) и ряда несложных преобразований получаем [28]

$$P(-z < \mu < z) = \left(\frac{2z}{a} + 1\right) \Phi\left(\frac{z}{\sigma} + \frac{a}{2\sigma}\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{2z}{a}\right) \Phi\left(\frac{z}{\sigma} - \frac{a}{2\sigma}\right) - 1 + \frac{2\sigma^2}{a} \left[\Phi'\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{2\sigma}\right) - \Phi'\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{2\sigma}\right) \right], \quad \Phi'(z) = \frac{d}{dz} \Phi(z). \quad (9.36)$$

Значения этой вероятности представлены на рис. 9.6.

Точное выражение (9.36), определяющее вероятность того, что суммарная ошибка измерения не выйдет за пределы допустимого интервала, мало удобна для практического использования в силу своей

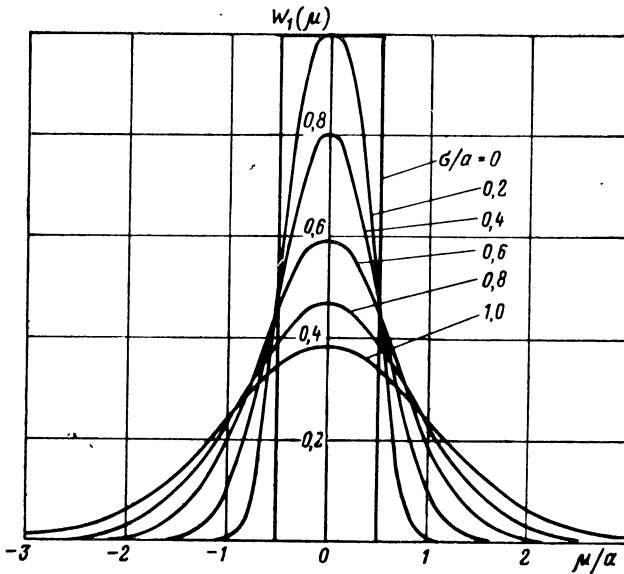


Рис. 9.5. Плотность вероятности суммы нормального и равномерно распределенного случайных процессов.

сложности. Однако, в тех случаях, когда отношение среднеквадратичного значения σ случайной ошибки к ширине a распределения систематической ошибки превышает величину $\sigma/a = 0,3$, оно может быть с высокой степенью точности аппроксимировано интегралом вероятности:

$$P(-z < \mu < z) \approx 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma_1}\right) - 1. \quad (9.37)$$

Здесь σ_1^2 равна сумме дисперсий систематической и случайной ошибок:

$$\sigma_1^2 = \frac{a^2}{12} + \sigma^2.$$

При $0,2 < \sigma/a < 0,3$ формула (9.37) дает хорошее совпадение для вероятностей, превышающих 0,85. Для $\sigma/a < 0,2$ не удается подобрать хорошую аппроксимацию и приходится пользоваться точным выражением (9.36).

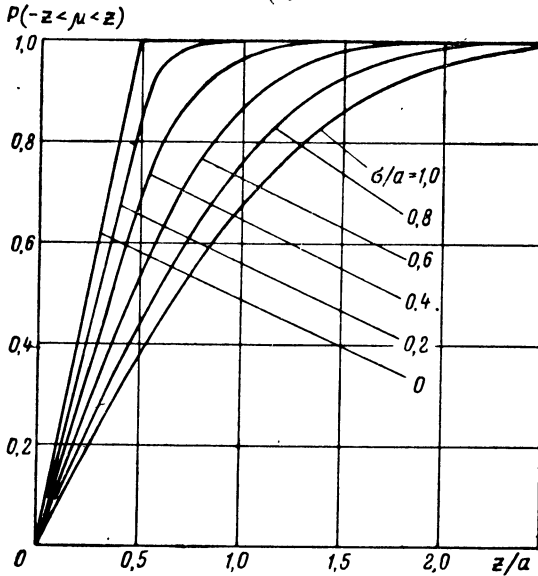


Рис. 9.6. Вероятность нахождения суммарной ошибки внутри заданного интервала.

Пример 9.4. На нелинейный элемент с параболической характеристикой

$$\eta = g(\xi) = a_1 \xi + a_2 \xi^2$$

воздействует стационарный случайный процесс

$$\xi(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t)$ — гармонический сигнал

$$s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

с постоянной амплитудой и частотой и случайной начальной фазой φ , равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$, а $n(t)$ — нормальный стационарный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \langle n(t) n(t + \tau) \rangle = \sigma^2 R(\tau).$$

Определить среднее значение m_η и функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе элемента при условии статистической независимости сигнала и шума. Для частного случая

$$R(\tau) = e^{-\sigma|\tau|}, \quad \alpha \ll \omega_0,$$

определить физическую спектральную плотность $S_\eta(f)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Решение. По условию примера

$$\begin{aligned} \eta(t) &= a_1 [s(t) + n(t)] + a_2 [s(t) + n(t)]^2 = \\ &= a_1 s(t) + a_1 n(t) + a_2 s^2(t) + 2a_2 s(t)n(t) + a_2 n^2(t). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Производя статистическое усреднение соотношения (9.38) и учитывая, что в рассматриваемом примере

$$\langle s(t) \rangle = 0, \quad \langle n(t) \rangle = 0, \quad \langle s(t)n(t) \rangle = 0,$$

получаем следующее выражение для среднего значения процесса $\eta(t)$:

$$m_\eta = \langle \eta(t) \rangle = a_2 \left(\frac{A_m^2}{2} + \sigma^2 \right).$$

Перемножив равенства (9.38) для моментов времени t и $t + \tau$ и выполнив статистическое усреднение результата перемножения, вычислим второй момент процесса $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11}(\tau) = \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle &= a_1^2 \left[\frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau + \sigma^2 R(\tau) \right] + \\ &+ a_2^2 \left[\frac{A_m^4}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau \right) + 2A_m^2 \sigma^2 R(\tau) \cos \omega_0 \tau + \right. \\ &\left. + A_m^2 \sigma^2 + \sigma^4 + 2\sigma^4 R^2(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда находим корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} k_\eta(\tau) = \tilde{M}_{11}(\tau) - m_\eta^2 &= a_1^2 \frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau + a_2^2 \frac{A_m^4}{8} \cos 2\omega_0 \tau + \\ &+ a_1^2 \sigma^2 R(\tau) + 2a_2^2 \sigma^4 R^2(\tau) + 2a_2^2 A_m^2 \sigma^2 R(\tau) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Для вычисления спектральной плотности $S_\eta(f)$ следует воспользоваться формулой (5.176):

$$S_\eta(f) = 4 \int_0^\infty k_\eta(\tau) \cos 2\pi f\tau \, d\tau. \quad (9.40)$$

После подстановки в (9.40) корреляционной функции (9.39) при $R(\tau) = \exp\{-\alpha|\tau|\}$, находим

$$S_\eta(f) = a_1^2 \frac{A_m^2}{2} \delta(f-f_0) + a_2^2 \frac{A_m^4}{8} \delta(f-2f_0) + 4\sigma^2 (a_1^2 + a_2^2 \sigma^2) \times$$

$$\times \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + 4a_2^2 A_m^2 \sigma^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 (f - f_0)^2}. \quad (9.41)$$

Из (9.41) следует, что спектр $S_\eta(f)$ является дискретно-сплошным (рис. 9.7). Он состоит из двух дискретных спектральных линий при $f = f_0$ и $f = 2f_0$, обусловленных наличием на входе параболического

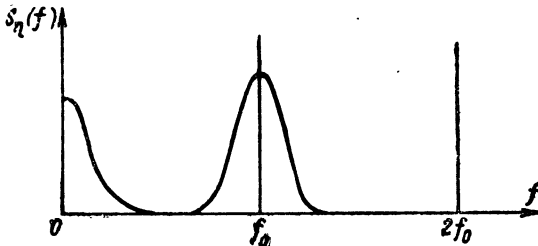


Рис. 9.7. Дискретно-сплошной спектр.

ческого элемента гармонического сигнала $s(t)$, низкочастотного сплошного спектра, обусловленного только шумом, и сплошного спектра, расположенного в окрестности частоты $f = f_0$. Последний обусловлен взаимодействием сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ в результате нелинейного преобразования.

Пример 9.5. На вход перемножителя (рис. 9.8) воздействуют стационарные случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с энергетическими

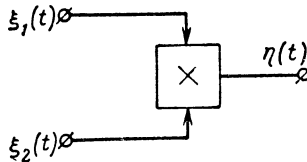


Рис. 9.8. Перемножитель.

спектрами $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$, соответственно равными

$$S_1(\omega) = \begin{cases} N_1, & -\omega_1 - \frac{\Delta}{2} \leq \omega \leq -\omega_1 + \frac{\Delta}{2}, \\ N_1, & \omega_1 - \frac{\Delta}{2} \leq \omega \leq \omega_1 + \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega; \end{cases} \quad (9.42)$$

$$S_2(\omega) = \begin{cases} N_2, & -\omega_2 - \frac{\Delta}{2} \leq \omega \leq -\omega_2 + \frac{\Delta}{2}, \\ N_2, & \omega_2 - \frac{\Delta}{2} \leq \omega \leq \omega_2 + \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases} \quad (9.43)$$

Определить энергетический спектр $S_{\eta}(\omega)$ случайного процесса

$$\eta(t) = \xi_1(t)\xi_2(t)$$

на выходе перемножителя.

Решение. Энергетический спектр $S_{\eta}(\omega)$ случайного процесса $\eta(t) = \xi_1(t)\xi_2(t)$ определяется формулой

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\nu) S_2(\omega - \nu) d\nu, \quad (9.44)$$

где $S_1(\nu)$ — энергетический спектр процесса $\xi_1(t)$, а $S_2(\omega - \nu)$ — спектр, сдвинутый на частоту ω относительно энергетического спектра $S_2(-\nu)$ процесса $\xi_2(t)$.

Графическое изображение спектров $S_1(\nu)$ и $S_2(\nu)$ дано на рис. 9.9. Там же показан спектр $S_2(\omega - \nu)$.

Интеграл (9.44) отличен от нуля только в том случае, когда отлична от нуля подынтегральная функция, т. е. когда спектры

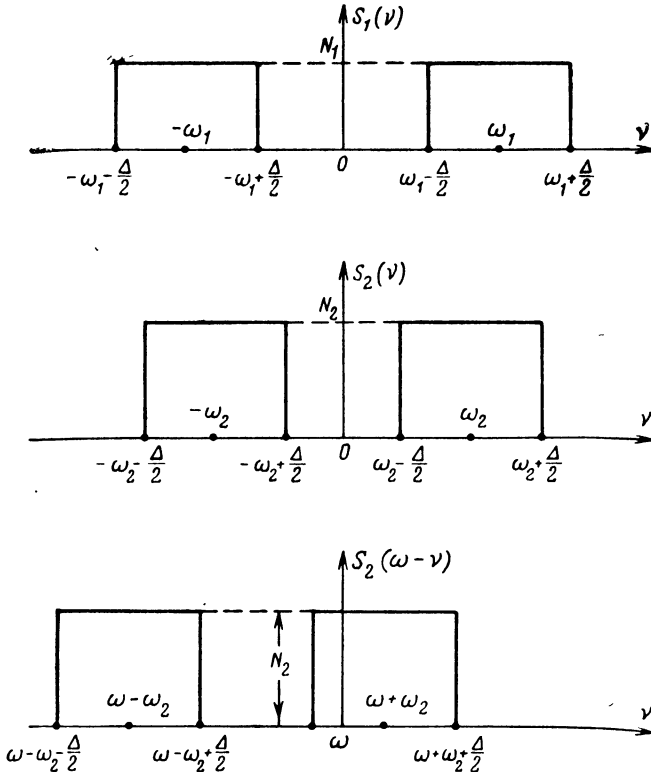


Рис. 9.9. Спектральные плотности процессов на входах перемножителя.

$S_1(\nu)$ и $S_2(\omega - \nu)$ перекрываются. Как следует из рис. 9.10, при изменении ω от $-\infty$ до ∞ , т. е. при перемещении спектра $S_2(\omega - \nu)$ слева направо относительно спектра $S_1(\nu)$, такое перекрытие имеет место в четырех случаях, первый из которых соответствует перекрытию составляющей спектра $S_1(\nu)$ в области $\nu < 0$ с составляющей

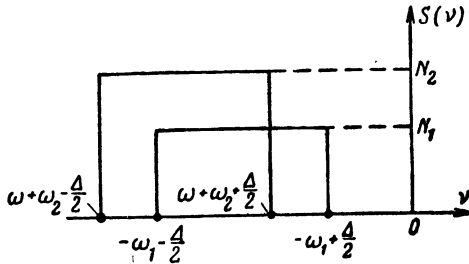


Рис. 9.10. Области интегрирования.

спектра $S_2(\omega - \nu)$ в области $\omega - \nu > 0$. Этот случай перекрытия $S_1(\nu)$ и $S_2(\omega - \nu)$ имеет место при значениях частоты ω , удовлетворяющих неравенствам (рис. 9.10)

$$\omega + \omega_2 + \frac{\Delta}{2} \geq -\omega_1 - \frac{\Delta}{2}; \quad \omega + \omega_2 - \frac{\Delta}{2} \leq -\omega_1 + \frac{\Delta}{2}. \quad (9.45)$$

Объединяя неравенства (9.45), находим область значений ω , соответствующую первому случаю перекрытия спектров $S_1(\nu)$ и $S_2(\omega - \nu)$:

$$-\omega_c - \Delta \leq \omega \leq -\omega_c + \Delta,$$

где $\omega_c = \omega_1 + \omega_2$ — суммарная частота.

При дальнейшем увеличении ω и выполнении неравенств

$$\omega + \omega_2 + \frac{\Delta}{2} \geq \omega_1 - \frac{\Delta}{2}; \quad \omega + \omega_2 - \frac{\Delta}{2} \leq \omega_1 + \frac{\Delta}{2}$$

наступает перекрытие составляющей спектра $S_1(\nu)$ в области $\nu > 0$ с составляющей спектра $S_2(\omega - \nu)$ при $\omega - \nu > 0$. Соответствующая этому случаю область значений ω определяется соотношением

$$\omega_p - \Delta \leq \omega \leq \omega_p + \Delta,$$

где $\omega_p = \omega_1 - \omega_2$ — разностная частота.

Аналогичным образом для третьего случая (перекрытие составляющих $S_1(\nu)$ в области $\nu < 0$ и $S_2(\omega - \nu)$ в области $\omega - \nu < 0$) находим

$$-\omega_p - \Delta \leq \omega \leq -\omega_p + \Delta,$$

а для четвертого (перекрытие составляющих $S_1(\nu)$ в области $\nu > 0$ и $S_2(\omega - \nu)$ в области $\omega - \nu < 0$) имеем

$$\omega_c - \Delta \leq \omega \leq \omega_c + \Delta.$$

Подставляя теперь в (9.44) значения $S_1(\nu)$ и $S_2(\omega - \nu)$, определяемые соотношениями (9.42) и (9.43), и производя интегрирование в указанных выше областях, получаем

$$S_\eta(\omega) = \begin{cases} S_0(\omega_c + \Delta + \omega), & -\omega_c - \Delta \leq \omega \leq -\omega_c, \\ S_0(-\omega_c + \Delta - \omega), & -\omega_c \leq \omega \leq -\omega_c + \Delta, \\ S_0(\omega_p + \Delta + \omega), & -\omega_p - \Delta \leq \omega \leq -\omega_p, \\ S_0(-\omega_p + \Delta - \omega), & -\omega_p \leq \omega \leq -\omega_p + \Delta, \\ S_0(-\omega_p + \Delta + \omega), & \omega_p - \Delta \leq \omega \leq \omega_p, \\ S_0(\omega_p + \Delta - \omega), & \omega_p \leq \omega \leq \omega_p + \Delta, \\ S_0(-\omega_c + \Delta + \omega), & \omega_c - \Delta \leq \omega \leq \omega_c, \\ S_0(\omega_c + \Delta - \omega), & \omega_c \leq \omega \leq \omega_c + \Delta, \\ 0 & \text{при других } \omega, \end{cases}$$

где $S_0 = N_1 N_2 / 4\pi$. График функции $S_\eta(\omega)$ представлен на рис. 9.11.

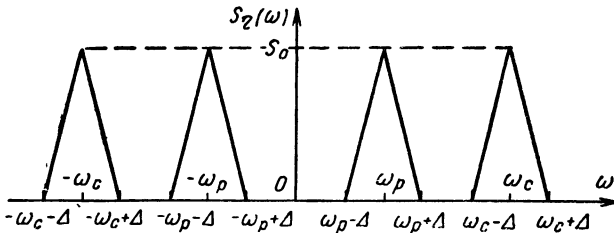


Рис. 9.11. Спектральная плотность на выходе перемножителя.

Пример 9.6. На безынерционный ограничитель с характеристикой (9.30) воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Вычислить среднее значение и корреляционную функцию процесса $\eta(t)$ на выходе ограничителя.

Решение [3]. В соответствии с определением среднее значение на выходе ограничителя равно

$$m_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \omega_1(\xi) d\xi = -b \int_{-\infty}^{-\beta} \omega_1(\xi) d\xi + \\ + s \int_{-\beta}^{\alpha} \xi \omega_1(\xi) d\xi + a \int_{\alpha}^{\infty} \omega_1(\xi) d\xi,$$

где $\omega_1(\xi)$ — нормальная плотность вероятности (9.28) при $m = 0$.

Таблица 9.3

Значения коэффициентов a_n
Симметричное ограничение $\alpha/\sigma = \beta/\sigma = \gamma/\sigma$

| γ/σ | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 1,0 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | 0,646 | 0,735 | 0,789 | 0,837 | 0,901 |
| a_2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_3 | 0,114 | 0,114 | 0,112 | 0,103 | 0,072 |
| a_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_5 | 0,050 | 0,048 | 0,042 | 0,033 | 0,015 |
| a_6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_7 | 0,030 | 0,027 | 0,021 | 0,013 | 0,003 |
| a_8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Несимметричное ограничение $\beta/\sigma = 0$

| α/σ | 0,3 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | ∞ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| a_1 | 0,681 | 0,704 | 0,736 | 0,739 | 0,740 | 0,733 |
| a_2 | 0,007 | 0,021 | 0,078 | 0,142 | 0,193 | 0,233 |
| a_3 | 0,107 | 0,099 | 0,062 | 0,025 | 0,007 | 0 |
| a_4 | 0,007 | 0,015 | 0,042 | 0,052 | 0,043 | 0,020 |
| a_5 | 0,045 | 0,037 | 0,012 | 0,001 | 0 | 0 |
| a_6 | 0,004 | 0,011 | 0,025 | 0,020 | 0,010 | 0,006 |
| a_7 | 0,026 | 0,019 | 0,003 | 0 | 0 | 0 |
| a_8 | 0,004 | 0,009 | 0,015 | 0,008 | 0,002 | 0,003 |

Несимметричное ограничение

| α/σ | β/σ | | | | | | | | | | | |
|-----------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0,3 | | | 0,5 | | | 0,7 | | | 1,0 | | |
| | 1,0 | 1,5 | 3,0 | 1,0 | 1,5 | 3,0 | 1,0 | 1,5 | 3,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 |
| a_1 | 0,809 | 0,819 | 0,821 | 0,840 | 0,859 | 0,864 | 0,871 | 0,893 | 0,902 | 0,930 | 0,939 | 0,944 |
| a_2 | 0,036 | 0,085 | 0,154 | 0,018 | 0,054 | 0,110 | 0,006 | 0,031 | 0,075 | 0,010 | 0,025 | 0,038 |
| a_3 | 0,081 | 0,043 | 0,006 | 0,087 | 0,050 | 0,011 | 0,086 | 0,053 | 0,014 | 0,049 | 0,029 | 0,015 |
| a_4 | 0,019 | 0,029 | 0,013 | 0,009 | 0,014 | 0,007 | 0,003 | 0,008 | 0,003 | 0,002 | 0,002 | 0 |
| a_5 | 0,021 | 0,005 | 0,001 | 0,023 | 0,007 | 0,002 | 0,021 | 0,008 | 0,003 | 0,005 | 0,002 | 0,002 |
| a_6 | 0,011 | 0,010 | 0,002 | 0,004 | 0,005 | 0 | 0,001 | 0,002 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_7 | 0,007 | 0,001 | 0,001 | 0,008 | 0,001 | 0,002 | 0,005 | 0,001 | 0,002 | 0 | 0 | 0,001 |
| a_8 | 0,006 | 0,003 | 0,001 | 0,002 | 0,001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

После подстановки $\omega_1(\xi)$ в m_η и несложных вычислений получим

$$m_\eta = s\sigma \left\{ \frac{\alpha}{\sigma} \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) \right] - \Phi' \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) - \frac{\beta}{\sigma} \left[1 - \Phi \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right] + \Phi' \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right\}.$$

Для вычисления корреляционной функции $k_\eta(\tau)$ воспользуемся формулой (9.18). После двухкратного дифференцирования нелинейной характеристики $g(\xi)$ ограничителя имеем

$$g''(\xi) = s [\delta(\xi + \beta) - \delta(\xi - \alpha)],$$

в соответствии с чем из (9.18) находим [3]

$$k_{\eta}(\tau) = (s\sigma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!} = \\ = \sigma_{\eta}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n(\tau), \quad (9.46)$$

где

$$a_n = \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{(s\sigma)^2}{n! \sigma_{\eta}^2}.$$

Значения коэффициентов a_n для различных случаев ограничения даны в табл. 9.3, откуда, в частности, следует, что определяющую роль в формуле (9.46) играет первый член с коэффициентом a_1 . Сумма всех остальных коэффициентов даже при сильном ограничении (например, симметричное ограничение с $\gamma/\sigma = 0,1$) составляет примерно 35% от суммы всех коэффициентов. Поэтому иногда ограничиваются учетом в (9.46) только первого члена, что по существу соответствует линейному преобразованию процесса $\xi(t)$.

Пример 9.7. На вход квантующего устройства с характеристикой (рис. 9.12)

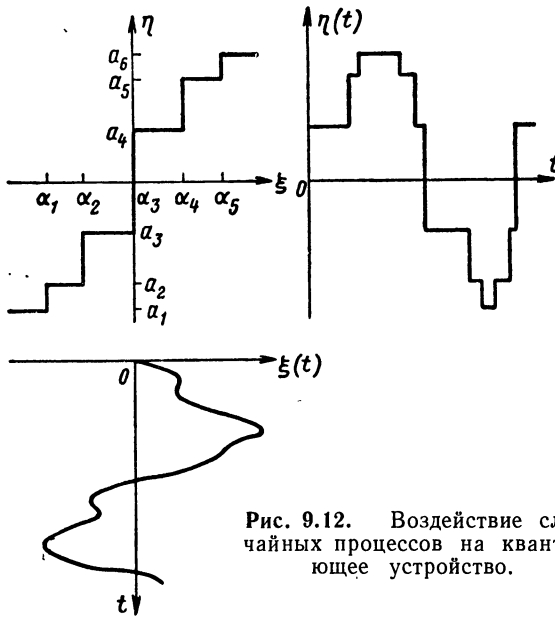


Рис. 9.12. Воздействие случайных процессов на квантующее устройство.

$$\eta = g(\xi) = a_i, \quad \alpha_i \leq \xi \leq \alpha_{i+1},$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$, воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Предполагается, что функция $g(\xi)$ нечетна, т. е. $-g(-\xi) = g(\xi)$, а общее количество уровней квантования a_i равно четному числу.

Определить среднее значение m_η и функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ процесса $\eta(t)$ на выходе квантователя.

Решение [19]. Среднее значение процесса $\eta(t)$ равно

$$m_\eta = \langle \eta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \omega_1(\xi) d\xi.$$

Подставляя сюда плотность вероятности $\omega_1(\xi)$, определяемую формулой (9.28) при $m = 0$, и учитывая нечетность функции $g(\xi)$, находим

$$m_\eta = 0.$$

Корреляционная функция процесса $\eta(t)$ на основании формулы (9.17) равна

$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi \right\}^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g'(\xi) \Phi^{(n)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi.$$

Для рассматриваемого примера

$$g'(\xi) = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i \delta(\xi - \alpha_i),$$

где $\Delta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ — расстояние между соседними уровнями квантования.

Таким образом, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i \Phi^{(n)}\left(\frac{\alpha_i}{\sigma}\right).$$

Подставляя это выражение в $k_\eta(\tau)$, получаем формулу для функции корреляции

$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i \Phi^{(n)} \left(\frac{\alpha_i}{\sigma} \right) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}.$$

Пример 9.8. Найти функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ на выходе безынерционного сглаженного ограничителя с характеристикой (рис. 9.13)

$$\eta = g(\xi) = a + \frac{2a}{\gamma \sqrt{2\pi}} \int_0^\xi e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} dx,$$

где a и γ — постоянные величины, при воздействии на вход ограничителя стационарного нормального шума с двумерной плотностью вероятности (9.14).

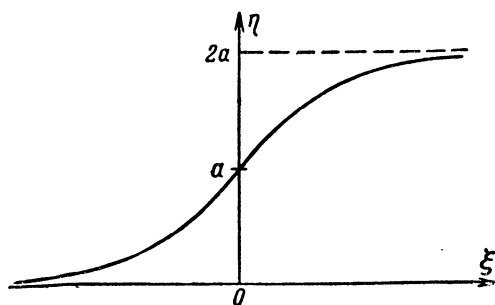


Рис. 9.13. Характеристика сглаженного ограничителя.

Решение. Для определения $k_\eta(\tau)$ воспользуемся формулой (9.20). Подставив в нее первые производные

$$g'(\xi) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\gamma} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\gamma^2}\right\},$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{M}_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} &= \frac{2a^2}{\pi\gamma^2} \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{1 - R^2(\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sqrt{b^2 - d^2}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{b\xi_1^2 - 2d\xi_1\xi_2 + b\xi_2^2}{2(b^2 - d^2)}\right\} d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (9.47)$$

где

$$b = \frac{\gamma^2 \sigma^2 \{\gamma^2 + \sigma^2 [1 - R^2(\tau)]\}}{(\gamma^2 + \sigma^2)^2 - \sigma^4 R^2(\tau)}, \quad d = \frac{\gamma^2 b R(\tau)}{\gamma^2 + \sigma^2 [1 - R^2(\tau)]}.$$

Двухкратный интеграл в правой части равенства (9.47) равен единице, поскольку он представляет собой интеграл от двумерной

нормальной плотности вероятности по всей области изменения переменных. Следовательно,

$$\frac{\partial \tilde{M}_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} = \frac{2a^2}{\pi\gamma^2} \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{1 - R^2(\tau)}} = \frac{2a^2\sigma^2}{\pi(\sigma^2 + \gamma^2)} \left[1 - \left(\frac{\sigma^2 R(\tau)}{\sigma^2 + \gamma^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда находим

$$\tilde{M}_{11}(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\frac{\sigma^2 R(\tau)}{\sigma^2 + \gamma^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin \frac{R(\tau)}{1 + \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2} + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Она определяется из условий

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0; \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{M}_{11}(\tau) = C = m_\eta^2 = a^2.$$

Таким образом, искомая функция корреляции $k_\eta(\tau)$ равна

$$k_\eta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin \frac{R(\tau)}{1 + \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2}. \quad (9.48)$$

Если воспользоваться разложением

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots,$$

функцию (9.48) можно представить в виде ряда

$$k_\eta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi(\sigma^2 + \gamma^2)} \left[\sigma^2 R(\tau) + \frac{[\sigma^2 R(\tau)]^3}{2 \cdot 3 (\gamma^2 + \sigma^2)^2} + \dots \right].$$

Пример 9.9. На один из входов множителя упрощенной схемы фазовой автоподстройки частоты (рис. 9.14) подается аддитивная смесь гармонического сигнала

$$u_c(t) = A_m \cos \omega_0 t = A_m \cos \Phi_1(t)$$

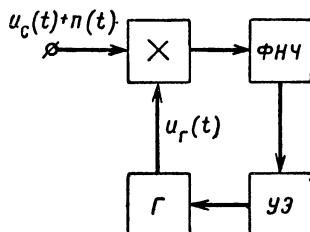


Рис. 9.14. Упрощенная схема фазовой автоподстройки частоты.

и квазигармонического шума

$$\begin{aligned} n(t) &= A(t) \cos \Phi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)] = \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

со спектральной плотностью, симметричной относительно средней частоты сигнала ω_0 , и функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

Здесь A_m — постоянная амплитуда сигнала; $A(t)$ — огибающая шума; $\theta(t)$ — случайная фаза.

На второй вход перемножителя подается гармоническое колебание от местного гетеродина

$$u_r(t) = A_r \cos \omega_r t = A_r \cos \Phi_2(t),$$

где A_r — постоянная амплитуда; ω_r — средняя частота колебаний гетеродина. Предполагается, что коэффициент преобразования перемножителя равен μ , коэффициент передачи фильтра нижних частот (ФНЧ) равен единице в пределах его полосы пропускания и нулю — вне ее, а крутизна линейного участка характеристики управляющего элемента (УЭ) равна s .

Определить дисперсию σ_φ^2 разности фаз сигнала $u_c(t)$ и колебаний гетеродина $u_r(t)$

$$\varphi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$$

при условии, что отношение сигнал/шум на входе системы ФАП $A_m/\sigma \gg 1$.

Решение. Поведение разности фаз $\varphi(t)$ определяется следующим нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка [29, 30]:

$$\dot{\varphi} + \Delta \sin \varphi = \Delta_0 - \Delta \left[\frac{A_c(t)}{A_m} \sin \varphi - \frac{A_s(t)}{A_m} \cos \varphi \right], \quad (9.49)$$

где $\Delta = 0,5\mu s A_m A_r$ — полоса удержания; $\Delta_0 = \omega_{r0} - \omega_0$ — начальная расстройка.

По условию задачи отношение сигнал/шум на входе системы ФАП велико ($A_m/\sigma \gg 1$). Из физических соображений ясно, что в стационарном режиме работы ФАП малый шум $n(t)$ будет вызывать небольшие случайные колебания разности фаз $\varphi(t)$ около некоторого устойчивого состояния равновесия φ_0 , значение которого можно определить, положив в (9.49) $\dot{\varphi} = 0$ и $A_c(t) = A_s(t) = 0$:

$$\varphi_0 = \langle \varphi(t) \rangle = \arcsin \frac{\Delta_0}{\Delta}.$$

Поэтому для решения задачи применим метод линеаризации уравнения (9.49).

Введем в рассмотрение случайные колебания разности фаз

$$\psi(t) = \varphi(t) - \varphi_0 \quad (9.50)$$

и, учитывая их малость, в дальнейшем будем полагать $\sin \psi \approx \psi$, $\cos \psi \approx 1$. После подстановки (9.50) в (9.49) получим

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \sqrt{\Delta^2 - \Delta_0^2} \psi = \\ = -\Delta \left[\frac{A_c(t)}{A_m} (\psi \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) - \frac{A_s(t)}{A_m} (\cos \varphi_0 - \psi \sin \varphi_0) \right]. \end{aligned}$$

Согласно (7.11) дисперсия функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$ равна σ^2 . Поэтому в правой части последнего уравнения случайными составляющими с $\psi A_c(t)/A_m$ и $\psi A_s(t)/A_m$, как имеющими второй порядок малости по сравнению с остальными, можно пренебречь. Таким образом, в линейном приближении приходим к следующему линейному дифференциальному уравнению флуктуаций разности фаз:

$$\dot{\psi} + \sqrt{\Delta^2 - \Delta_0^2} \psi = -\Delta \zeta(t), \quad (9.51)$$

где

$$\zeta(t) = \frac{A_c(t)}{A_m} \sin \varphi_0 - \frac{A_s(t)}{A_m} \cos \varphi_0.$$

Случайная функция $\zeta(t)$ представляет собой нормальный стационарный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\zeta(\tau) = \left(\frac{\sigma}{A_m} \right)^2 \rho(\tau).$$

Поскольку флуктуации $\psi(t)$ определяются линейным дифференциальным уравнением, в правую часть которого входит нормальный случайный процесс, то они будут распределены также по нормальному закону. Среднее значение этих флуктуаций можно получить, выполнив статистическое усреднение обеих частей уравнения (9.51):

$$m_\psi = \langle \psi(t) \rangle = 0.$$

Для вычисления дисперсии $\sigma_\psi^2 = \sigma_\varphi^2$ следует воспользоваться формулой (8.12б), положив в ней $\tau = 0$:

$$\sigma_\psi^2 = \sigma_\varphi^2 = \Delta^2 \int_0^\infty e^{-\sqrt{\Delta^2 - \Delta_0^2} x} dx \int_{-\infty}^x k_\zeta(y) e^{-\sqrt{\Delta^2 - \Delta_0^2} (x-y)} dy.$$

Пример 9.10. Определить одномерную плотность вероятности $W_1(\varphi)$ разности фаз $\varphi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ в примере 9.9 при условии, что корреляционная функция воздействующего на систему ФАП (рис. 9.14) квазигармонического шума $n(t)$ имеет вид

$$k_n(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Время корреляции τ_k шума $n(t)$ считается много меньше постоянной времени системы ФАП ($\tau_k \approx 1/\alpha \ll 1/\Delta$).

Решение [20]. Представим уравнение (9.49) в следующем виде:

$$\dot{\varphi} = -\Delta \sin \varphi + \Delta_0 - \Delta \zeta(t, \varphi), \quad (9.52)$$

где

$$\zeta(t, \varphi) = \frac{A_c(t)}{A_m} \sin \varphi - \frac{A_s(t)}{A_m} \cos \varphi.$$

При каждом фиксированном значении φ случайная функция $\zeta(t, \varphi)$ представляет собой стационарный нормальный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\zeta(\tau) = \left(\frac{\sigma}{A_m}\right)^2 \rho(\tau) = \left(\frac{\sigma}{A_m}\right)^2 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (9.53)$$

Из соотношения (9.53) следует, что время корреляции процесса $\zeta(t, \varphi)$ также много меньше постоянной времени ФАП, в соответствии с чем к уравнению (9.52) применим аппарат марковских процессов, и, в частности, уравнение Фоккера — Планка (9.22).

Применительно к нелинейному стохастическому дифференциальному уравнению (9.52) и корреляционной функции (9.53) коэффициенты $K_n(\varphi)$, входящие в уравнение (9.22), равны

$$K_1(\varphi) = \Delta_0 - \Delta \sin \varphi, \quad K_2(\varphi) = 2 \left(\frac{\sigma}{A_m}\right)^2 \frac{\Delta^2}{\alpha}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае уравнение Фоккера — Планка имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(\varphi, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial \varphi} [(\Delta_0 - \Delta \sin \varphi) W_1(\varphi, t)] + \\ & + \left(\frac{\sigma}{A_m}\right)^2 \frac{\Delta^2}{\alpha} \frac{\partial^2 W_1(\varphi, t)}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Получить математически строгое решение этого уравнения в общем случае затруднительно, поэтому в дальнейшем будем интересоваться лишь стационарным распределением, которое характеризуется тем, что плотность вероятности $W_1(\varphi)$ не зависит от времени. Для этого случая $\partial W_1(\varphi, t)/\partial t = 0$ и уравнение (9.54) упрощается:

$$\frac{d^2 W_1(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{d}{d\varphi} [(D_0 - D \sin \varphi) W_1(\varphi)] = 0, \quad (9.55)$$

где

$$D_0 = \left(\frac{A_m}{\sigma}\right)^2 \frac{\alpha \Delta_0}{\Delta^2}; \quad D = \left(\frac{A_m}{\sigma}\right)^2 \frac{\alpha}{\Delta}; \quad \frac{D_0}{D} = \frac{\Delta_0}{\Delta}.$$

Параметр D_0 характеризует величину начальной расстройки, а D — величину отношения сигнал/шум на входе системы.

Общее решение уравнения (9.55) можно записать в виде

$$W_1(\varphi) = C_1 e^{D_0 \varphi + D \cos \varphi} \int_{C_2}^{\varphi} e^{-D_0 \psi - D \cos \psi} d\psi.$$

Оно содержит две постоянные интегрирования C_1 и C_2 , которые определяются из двух условий:

1) условия периодичности плотности вероятности $W_1(\varphi)$:

$$W_1(\varphi \pm 2\pi) = W_1(\varphi),$$

2) условия нормировки плотности вероятности $W_1(\varphi)$ на каждом периоде:

$$\int_0^{2\pi} W_1(\varphi) d\varphi = 1.$$

После вычисления постоянных интегрирования получим [31, 32]

$$W_1(\varphi) = \frac{e^{\pi D_0}}{4\pi^2 |I_{jD_0}(D)|^2} e^{D_0 \varphi + D \cos \varphi} \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} e^{-D_0 \psi - D \cos \psi} d\psi.$$

Здесь $I_{jD_0}(D)$ — функция Бесселя мнимого индекса и мнимого аргумента [33]. При нулевой начальной расстройке ($D_0 = 0$) имеем

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(D)} e^{D \cos \varphi}.$$

Пример 9.11. Для измерения дисперсии стационарного флуктуационного тока $\xi(t)$ часто применяют термоэлектрические приборы, состоящие из гальванометра (Γ) и «квадратичной» термопары (T) (рис. 9.15). Если постоянная времени гальванометра много меньше постоянной времени термопары (это условие обычно выпол-

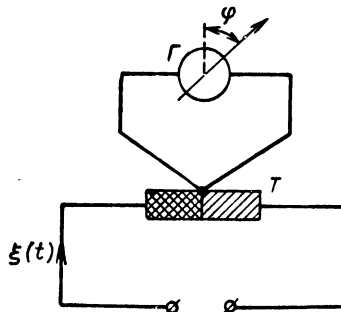


Рис. 9.15. Термоэлектрический прибор.

няется на практике), то отклонение $\varphi(t)$ стрелки гальванометра описывается уравнением [34]

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} + \alpha\varphi(t) = a\xi^2(t), \quad (9.56)$$

где коэффициент a характеризует чувствительность, а α — инерционные свойства прибора.

Требуется определить плотность вероятности $W_1(\varphi)$ для отклонения стрелки прибора $\varphi(t)$ и оценить относительную погрешность измерений $\delta = \sigma_\varphi/m_\varphi$, где m_φ и σ_φ — среднее и средне-квадратичное значения отклонений стрелки гальванометра. Предполагается, что нормальный флуктуационный ток $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и функцию корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad \beta \gg \alpha. \quad (9.57)$$

Решение [34]. Поскольку по условию примера $\beta \gg \alpha$, для его решения можно применить уравнение Фоккера — Планка. С этой целью преобразуем уравнение (9.56), выделив из его правой части среднее значение в явном виде.

Введем в рассмотрение центрированную случайную функцию

$$\zeta(t) = \xi^2(t) - \sigma_\xi^2. \quad (9.58)$$

Воспользовавшись результатом задачи (5.12), найдем корреляционную функцию процесса $\zeta(t)$:

$$k_\zeta(\tau) = 2\sigma_\xi^4 e^{-2\beta|\tau|}.$$

Подставив (9.58) в (9.56), получим следующее уравнение:

$$\dot{\varphi} = -\alpha\varphi + a\sigma_\xi^2 + a\zeta(t). \quad (9.59)$$

Уравнение (9.59) является частным случаем нелинейного стохастического дифференциального уравнения (9.21б). Поэтому коэффициенты $K_1(\varphi)$ и $K_2(\varphi)$ находим по формулам (9.23б):

$$K_1(\varphi) = -\alpha\varphi + a\sigma_\xi^2, \quad K_2(\varphi) = \frac{2a^2\sigma_\xi^4}{\beta}, \quad (9.60)$$

Подставив (9.60) в (9.27), окончательно получим

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varphi} e^{-\frac{(\varphi - m_\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2}},$$

где

$$m_\varphi = \frac{a\sigma_\xi^2}{\alpha}, \quad \sigma_\varphi^2 = \frac{a^2\sigma_\xi^4}{\alpha\beta}.$$

Относительная погрешность измерений равна

$$\delta = \frac{\sigma_{\varphi}}{m_{\varphi}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Таким образом, точность измерения увеличивается с ростом отношения постоянной времени прибора к времени корреляции тока $\xi(t)$.

§ 3. Задачи и ответы

9.1. На вход двухполупериодного квадратичного детектора с характеристикой (рис. 9.3)

$$\eta = g(\xi) = a\xi^2, \quad a > 0,$$

воздействует стационарный нормальный процесс $\xi(t)$ со средним значением m_{ξ} и дисперсией σ_{ξ}^2 .

Найти плотность вероятности $W_1(\eta)$, среднее значение m_{η} и дисперсию σ_{η}^2 выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi a\eta}\sigma_{\xi}} \left[e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{\eta}{a}} - m_{\xi}\right)^2}{2\sigma_{\xi}^2}} + e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{\eta}{a}} + m_{\xi}\right)^2}{2\sigma_{\xi}^2}} \right], & \eta \geq 0, \\ 0, & \eta < 0; \end{cases}$$

$$m_{\eta} = a(\sigma_{\xi}^2 + m_{\xi}^2); \quad \sigma_{\eta}^2 = 2a^2\sigma_{\xi}^2(\sigma_{\xi}^2 + 2m_{\xi}^2).$$

9.2. Огибающая $A(t)$ узкополосного случайного напряжения $\xi(t)$ на входе квадратичного детектора огибающей распределена по закону Релея

$$W_1(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad A \geq 0.$$

Найти плотность вероятности, среднее значение и дисперсию напряжения $\eta(t)$ на выходе детектора, если

$$\eta(t) = \frac{\alpha}{2} A^2(t).$$

Ответ:

$$W_1(\eta) = \frac{1}{\alpha\sigma^2} e^{-\frac{\eta}{\alpha\sigma^2}}, \quad \eta \geq 0; \quad m_{\eta} = \alpha\sigma^2; \quad \sigma_{\eta}^2 = \alpha^2\sigma^4.$$

9.3. На цепь, состоящую из последовательно соединенных полупроводникового диода D и сопротивления R (рис. 9.16), воздей-

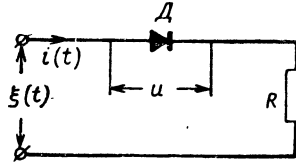


Рис. 9.16. Нелинейная электрическая цепь.

ствует стационарный нормальный шум с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Характеристика диода имеет вид

$$i = g(u) = \begin{cases} su, & u \geq 0, \\ s_1 u, & u < 0, \end{cases}$$

где

$$s = \frac{1}{R_{\text{впр}} + R}, \quad s_1 = \frac{1}{R_{\text{обр}} + R},$$

$R_{\text{впр}}$ — внутреннее сопротивление диода в прямом направлении, $R_{\text{обр}}$ — внутреннее сопротивление диода в обратном направлении.

Определить среднее значение m_i тока $i(t)$ в цепи и его дисперсию σ_i^2 .

Ответ:

$$m_i = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (s - s_1); \quad \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} [(\pi - 1)(s^2 + s_1^2) + 2s_1 s].$$

9.4. Найти плотность вероятности $W_1(\eta)$ напряжения $\eta(t)$ на выходе однополупериодного линейного детектора, характеристика которого представлена на рис. 9.17, если на вход детектора воздей-

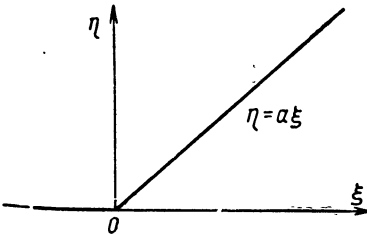


Рис. 9.17. Характеристика однополупериодного линейного детектора.

ствует нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Ответ:

$$W_1(\eta) = \frac{1}{2} \delta(\eta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi} a \sigma} e^{-\frac{\eta^2}{2a^2 \sigma^2}}, \quad \eta \geq 0.$$

9.5. Найти плотность вероятности напряжения $\eta(t)$ на выходе двухполупериодного линейного детектора, характеристика которого представлена на рис. 9.18. На вход детектора воздействует гауссов-

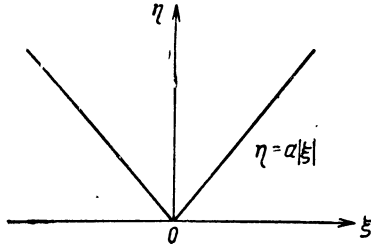


Рис. 9.18. Характеристика двухполупериодного линейного детектора.

ский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Ответ:

$$W_1(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a\sigma} e^{-\frac{\eta^2}{2a^2\sigma^2}}, \quad \eta \geq 0.$$

9.6. Найти одномерную плотность вероятности напряжения $\eta(t)$ на выходе однополупериодного квадратичного детектора, характеристика которого изображена на рис. 9.19, если на вход детек-

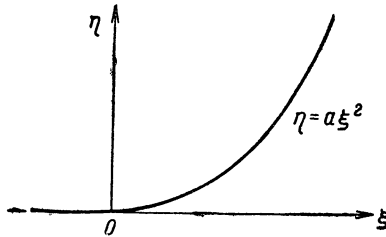


Рис. 9.19. Характеристика однополупериодного квадратичного детектора.

тора воздействует гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Ответ:

$$W_1(\eta) = \frac{1}{2} \delta(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi a\eta}\sigma} e^{-\frac{\eta}{2a\sigma^2}}, \quad \eta \geq 0.$$

9.7. На квантующее устройство с характеристикой (рис. 9.20)

$$\eta = g(\xi) = a \operatorname{sgn} \xi$$

воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и дисперсией σ_ξ^2 .

Определить: а) средний квадрат ε^2 разности процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ на входе и выходе квантующего устройства; б) значение

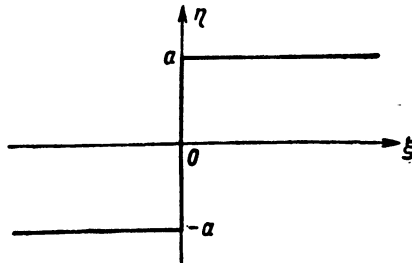


Рис. 9.20. Характеристика квантователя на два уровня.

$a = a_{\text{opt}}$, минимизирующее ε^2 , и соответствующую этому значению величину минимального среднего квадрата $\varepsilon^2_{\text{min}}$.

Ответ:

$$а) \quad \varepsilon^2 = \langle [\eta(t) - \xi(t)]^2 \rangle = \sigma_\xi^2 - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sigma_\xi + a^2;$$

$$б) \quad a_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_\xi, \quad \varepsilon^2_{\text{min}} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma_\xi^2.$$

9.8. На вход квантователя (рис. 9.20) воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ со средним значением m_ξ и дисперсией σ_ξ^2 .

Определить плотность вероятности, среднее значение и дисперсию процесса $\eta(t)$ на выходе квантователя.

Ответ:

$$W_1(\eta) = \Phi\left(\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \delta(a - \eta) + \Phi\left(-\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \delta(a + \eta);$$

$$m_\eta = a \left[\Phi\left(\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(-\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \right];$$

$$\sigma_\eta^2 = 4a^2 \Phi\left(\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right) \Phi\left(-\frac{m_\xi}{\sigma_\xi}\right).$$

9.9. На симметричный ограничитель, характеристика которого представлена на рис. 9.21, воздействует стационарный гауссов шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ_ξ^2 .

Найти одномерную плотность вероятности для напряжения $\eta(t)$ на выходе ограничителя.

Ответ:

$$W_1(\eta) = \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_\xi}\right)\right] \delta(\eta + a) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_\xi^2}} + \\ + \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_\xi}\right)\right] \delta(\eta - a), \\ -a \leq \eta \leq a,$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (2.9).

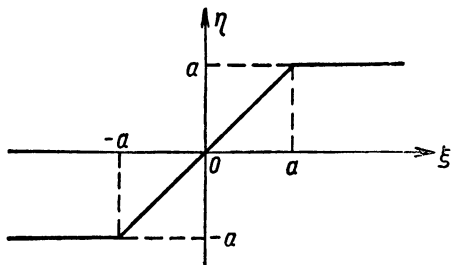


Рис. 9.21. Характеристика симметричного ограничителя.

9.10. Найти одномерную плотность вероятности, среднее значение и дисперсию напряжения $\eta(t)$ на выходе идеального ограничителя с характеристикой

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} \xi, & \xi \geq h, \\ 0, & \xi < h, \end{cases}$$

если на вход ограничителя подается случайное напряжение $\xi(t)$ с плотностью вероятности

$$W_1(\xi) = \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad \xi \geq 0.$$

Ответ:

$$W_1(\eta) = \left[1 - e^{-\frac{1}{2}h^2}\right] \delta(\eta) + (\eta + h) e^{-\frac{(\eta+h)^2}{2}}, \quad \eta \geq 0;$$

$$m_\eta = \sqrt{2\pi} [1 - \Phi(h)]; \quad \sigma_\eta^2 = 2 \left(e^{-\frac{1}{2}h^2} - hm_\eta \right) - m_\eta^2.$$

9.11. Положение отметки цели на экране индикатора типа «дальность — азимут» определяет истинные координаты цели с некоторой ошибкой, случайно изменяющейся во времени. Величина этой ошибки складывается из погрешности $\xi(t)$ измерения дальности до цели и погрешности $\eta(t)$ установления азимута цели

(рис. 9.22, а). Предполагается, что $\xi(t)$ и $\eta(t)$ представляют собой нормально распределенные коррелированные стационарные случайные процессы, совместная плотность вероятности которых равна

$$\omega_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R^2)} \left[\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} - \frac{2R\xi\eta}{\sigma_\xi\sigma_\eta} + \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2} \right] \right\}.$$

Здесь $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, σ_ξ^2 и σ_η^2 — дисперсии процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, R — коэффициент корреляции между ними.

Вычислить вероятность P того, что отметка цели относительно ее истинного положения не выйдет за пределы эллипса

$$\frac{1}{1-R^2} \left(\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} - \frac{2R\xi\eta}{\sigma_\xi\sigma_\eta} + \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2} \right) = \lambda^2,$$

где λ — некоторая постоянная величина (рис. 9.22, б).

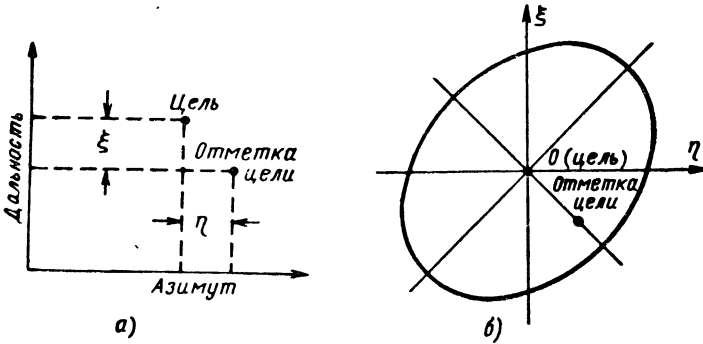


Рис. 9.22. Отметка цели на экране индикатора (а) и эллипс рассеяния (б).

Ответ:

$$P = 1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}.$$

9.12. Суммарная нестабильность $\Delta f(t)$ частоты кварцевого генератора радиостанции равна

$$\Delta f(t) = \xi(t) + \eta(t),$$

где $\xi(t)$ — случайное изменение частоты, обусловленное старением кварца, $\eta(t)$ — изменение частоты, обусловленное влиянием температуры окружающей среды.

Стационарные случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ статистически независимы и равномерно распределены соответственно на интервалах $[-a, a]$ и $[-b, b]$ (рис. 9.23, а).

Найти плотность вероятности $W_1(\Delta f)$ суммарной нестабильности $\Delta f(t)$.

Ответ:

$$W_1(\Delta f) = \begin{cases} \frac{a+b+\Delta f}{8a^2b}, & -a-b \leq \Delta f < a-b, \\ \frac{1}{4ab}, & a-b \leq \Delta f < b-a, \\ \frac{\Delta f-a-b}{8a^2b}, & b-a \leq \Delta f < a+b, \\ 0 & \text{при других } \Delta f. \end{cases}$$

График плотности вероятности приведен на рис. 9.23, б).

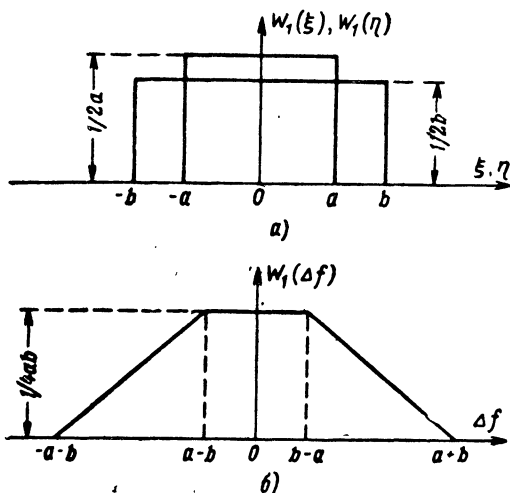


Рис. 9.23. Плотность вероятности суммы двух равномерно распределенных случайных процессов с нулевыми средними значениями.

9.13. Решить задачу 9.12 при условии, что плотности вероятностей процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно равны (рис. 9.24, а):

$$W_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq \xi \leq b, \\ 0, & \xi < a, \quad \xi > b, \end{cases} \quad W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & c \leq \eta \leq d, \\ 0, & \eta < c, \quad \eta > d. \end{cases}$$

Предполагается, что $(d-c) \geq (b-a)$.

Ответ:

$$W_1(\Delta f) = \begin{cases} \frac{\Delta f - a - c}{(b-a)(d-c)}, & a+c \leq \Delta f < b+c, \\ \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & b+c \leq \Delta f < a+d, \\ \frac{b+d-\Delta f}{(b-a)(d-c)}, & a+d \leq \Delta f < b+d, \\ 0 & \text{при других } \Delta f. \end{cases}$$

График плотности вероятности $W_1(\Delta f)$ представлен на рис. 9.24, б.

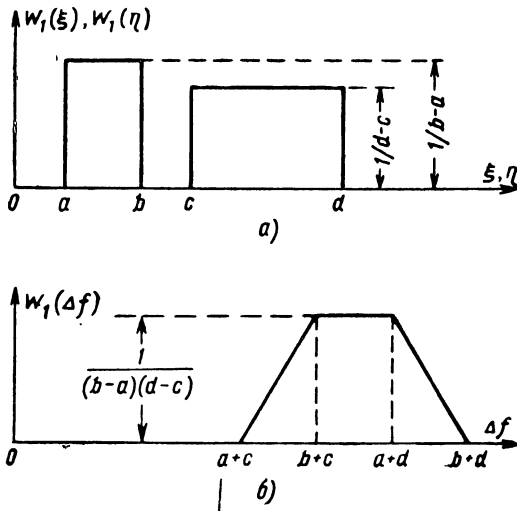


Рис. 9.24. Плотность вероятности суммы двух равномерно распределенных процессов с ненулевыми средними значениями.

9.14. Вычислить одномерную плотность вероятности $W_1(x)$ процесса

$$x(t) = \xi(t) + \eta(t),$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — независимые стационарные случайные процессы, первый из которых распределен равномерно на интервале $[-2A; 0]$, а второй — по закону Симпсона (рис. 9.25, а):

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{\eta}{A^2}, & 0 \leq \eta < A, \\ \frac{2A-\eta}{A^2}, & A \leq \eta < 2A, \\ 0 & \text{при других } \eta. \end{cases}$$

Ответ:

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{(x+2A)^2}{4A^3}, & -2A \leq x < -A, \\ \frac{2A^2 - x^2}{4A^3}, & -A \leq x < A, \\ \frac{(x-2A)^2}{4A^3}, & A \leq x < 2A, \\ 0 & \text{при других } x. \end{cases}$$

График плотности вероятности $W_1(x)$ показан на рис. 9.25, б.

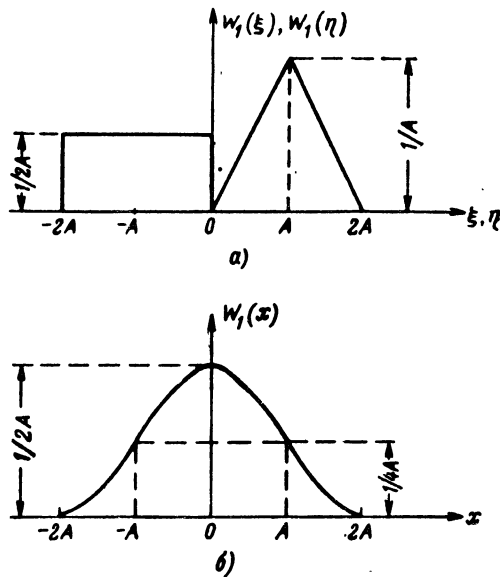


Рис. 9.25. Плотность вероятности суммы равномерно распределенного процесса и случайного процесса, распределенного по закону Симпсона.

9.15. Определить плотность вероятности $W_1(\varphi)$ процесса

$$\varphi(t) = \theta_1(t) \pm \theta_2(t),$$

где $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ — независимые стационарные случайные процессы, равномерно распределенные на интервале $[-\pi, \pi]$ (рис. 9.26, а).

Ответ:

$$W_1(\varphi) = \begin{cases} \frac{\varphi + 2\pi}{4\pi^2}, & -2\pi \leq \varphi < 0, \\ \frac{2\pi - \varphi}{4\pi^2}, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 0 & \text{при других } \varphi. \end{cases}$$

График плотности вероятности $W_1(\varphi)$ представлен на рис. 9.26, б.

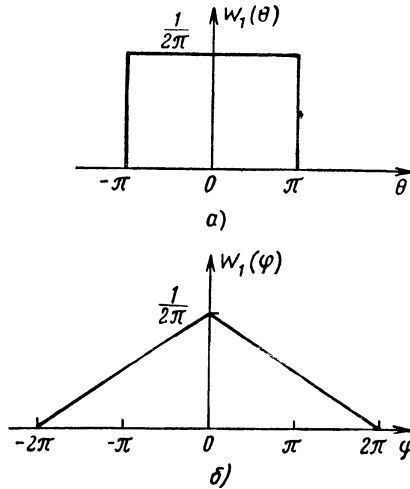


Рис. 9.26. Плотность вероятности суммы двух случайных процессов, равномерно распределенных на интервале $[-\pi, \pi]$.

9.16. Напряжение $u(t)$ на выходе фазового детектора (ФД) (рис. 9.27), состоящего из перемножителя и фильтра нижних

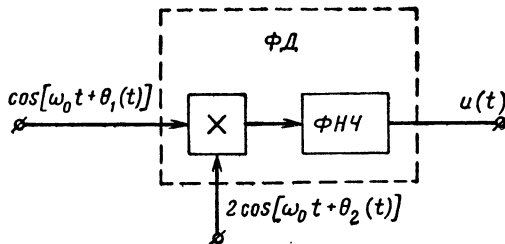


Рис. 9.27. Фазовый детектор.

частот (ФНЧ), равно

$$u(t) = \cos \varphi(t) = \cos [\theta_1(t) - \theta_2(t)].$$

Определить плотность вероятности $W_1(u)$, если $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ представляют собой независимые стационарные случайные процессы, равномерно распределенные на интервале $[-\pi, \pi]$.

Ответ:

$$W_1(u) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-u^2}}, \quad |u| \leq 1.$$

9.17. На радиотехническое устройство, состоящее из квадратичного детектора огибающей, линии задержки и преобразователя (рис. 9.28), действует нормальный стационарный квазигармонический случайный процесс

$$\xi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

Определить одномерную плотность вероятности $W_1(y)$, начальный момент n -го порядка m_n , среднее значение m_y и дисперсию σ_y^2

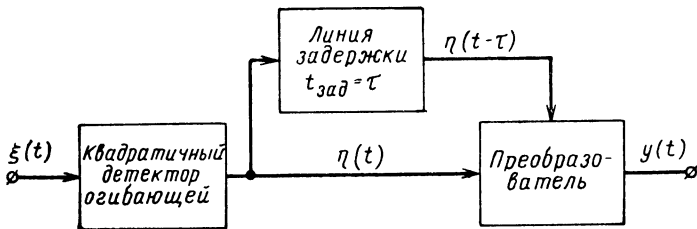


Рис. 9.28. Квадратичный детектор огибающей, линия задержки и преобразователь.

процесса $y(t)$ на выходе преобразователя, осуществляющего сложение процессов $u(t)$ и $u(t + \tau)$:

$$y(t) = u(t) + u(t + \tau),$$

где $u(t)$ — процесс на выходе детектора, равный квадрату огибающей входного шума $\xi(t)$:

$$u(t) = A^2(t).$$

Ответ:

$$W_1(y) = \frac{1}{4\sigma^2 \rho} \left[e^{-\frac{y}{2\sigma^2(1+\rho)}} - e^{-\frac{y}{2\sigma^2(1-\rho)}} \right], \quad y \geq 0;$$

$$m_n = 2^n n! \frac{(1+\rho)^{n+1} - (1-\rho)^{n+1}}{2\rho} \sigma^{2n};$$

$$m_y = 4\sigma^2; \quad \sigma_y^2 = 8(1 + \rho^2)\sigma^4; \quad \rho = \rho(\tau).$$

График функции $W_1(y)$ приведен на рис. 9.29.

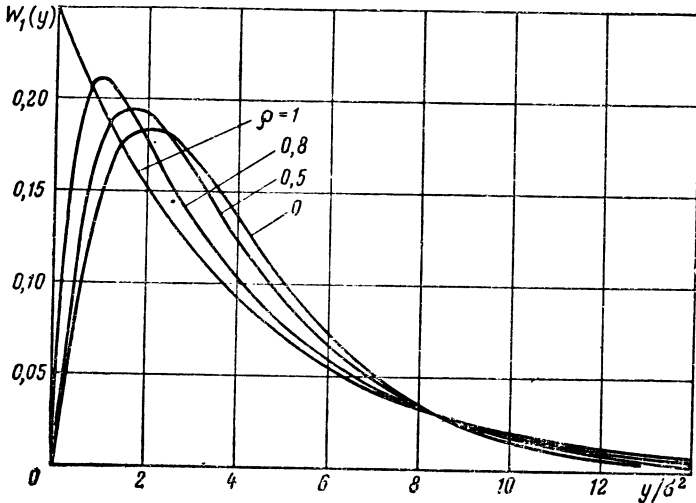


Рис. 9.29. Плотность вероятности суммы квадратов огибающей квазигармонического шума.

9.18. Решить предыдущую задачу при условии, что процесс на выходе преобразователя равен

$$y(t) = u(t) - u(t + \tau).$$

Ответ:

$$W_1(y) = \frac{1}{4\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \frac{|y|}{e^{2\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}}};$$

$$m_{2k} = 2^k k! (1-\rho^2)^k \sigma^{4k}; \quad m_y = 0; \quad \sigma_y^2 = 2\sigma^4 (1-\rho^2).$$

График функции $W_1(y)$ приведен на рис. 9.30.

9.19. Решить задачу 9.17 для случая, когда преобразователь представляет собой перемножитель, т. е.

$$y(t) = u(t) u(t + \tau).$$

Ответ:

$$W_1(y) = \frac{1}{2\sigma^4 (1-\rho^2)} I_0 \left(\frac{\rho \sqrt{|y|}}{\sigma^2 (1-\rho^2)} \right) K_0 \left(\frac{\sqrt{|y|}}{\sigma^2 (1-\rho^2)} \right), \quad y \geq 0;$$

$$m_n = 2^{2n} (n!)^2 (1-\rho^2)^2 \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!} \left(\frac{\rho^2}{1-\rho^2} \right)^k \sigma^{4n};$$

$$m_y = 4\sigma^4 (1+\rho^2); \quad \sigma_y^2 = 16\sigma^8 (3 + 14\rho^2 + 3\rho^4);$$

$I_0(z)$ и $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно 1-го и 2-го рода.

График функции $W_1(y)$ приведен на рис. 9.31.

9.20. Решить задачу 9.17 при условии, что процесс $y(t)$ на выходе преобразователя равен

$$y(t) = \frac{u(t + \tau)}{u(t)}.$$

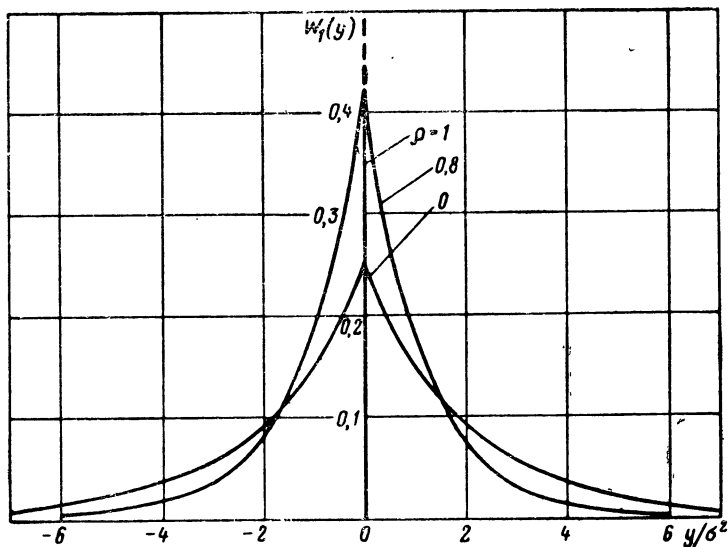


Рис. 9.30. Плотность вероятности разности квадратов огибающей квазигармонического шума.

Ответ:

$$W_1(y) = \frac{(1 - \rho^2)(1 + y)}{[1 + 2(1 - 2\rho^2)y + y^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad y \geq 0;$$

m_n , m_y и σ_y^2 элементарно не вычисляются.

График плотности вероятности $W_1(y)$ приведен на рис. 9.32.

9.21. На радиотехническое устройство, состоящее из линейного детектора огибающей, линии задержки и преобразователя (рис. 9.33), воздействует нормальный стационарный квазигармонический случайный процесс

$$\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

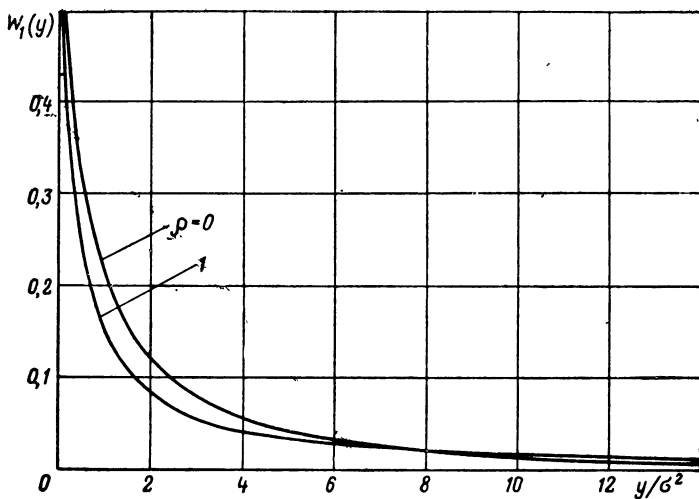


Рис. 9.31. Плотность вероятности произведения квадратов огибающей квазигармонического шума.

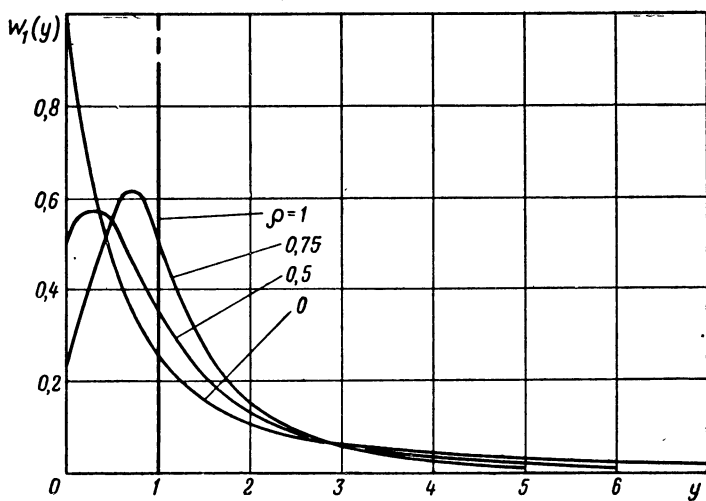


Рис. 9.32. Плотность вероятности частного квадратов огибающей квазигармонического шума.

Вычислить одномерную плотность вероятности $W_1(y)$, начальный момент n -го порядка m_n , среднее значение m_y и дисперсию σ_y^2 процесса $y(t)$ на выходе преобразователя, осуществляющего операцию суммирования:

$$y(t) = u(t) + u(t + \tau), \quad u(t) = A(t).$$

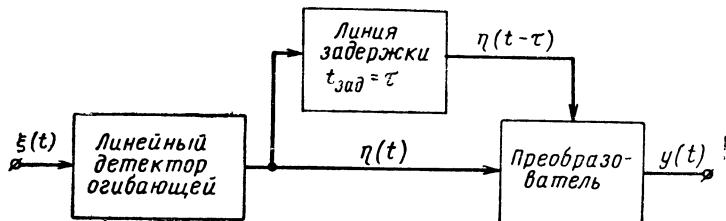


Рис. 9.33. Линейный детектор огибающей, линия задержки и преобразователь.

Ответ:

$$W_1(y) = \frac{1-\rho^2}{2\sigma} \left\{ \frac{y}{\sigma} e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} + \sqrt{\pi} \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} - 1 \right) \left[\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \right] \right\} e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} + \rho^2 \frac{y}{4\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{8\sigma^2}}, \quad y \geq 0;$$

$$m_n \approx (1-\rho^2) (\sqrt{2}\sigma)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n-k}{2}\right) + \rho^2 (2\sqrt{2}\sigma)^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right);$$

$$m_y = \sqrt{2\pi}\sigma; \quad \sigma_y^2 = (4-\pi)(1+\rho^2)\sigma^2.$$

График функции $W_1(y)$ приведен на рис. 9.34.

9.22. Решить предыдущую задачу при условии, что процесс на выходе преобразователя равен

$$y(t) = u(t) - u(t + \tau).$$

Ответ:

$$W_1(y) \approx \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\};$$

$$m_{2k} \approx (2k-1)!! (1-\rho^2)^k \sigma^{2k}; \quad m_y = 0; \quad \sigma_y^2 \approx \sigma^2 (1-\rho^2).$$

График плотности вероятности $W_1(y)$ приведен на рис. 9.35.

9.23. Решить задачу 9.21 для случая, когда преобразователь представляет собой перемножитель, т. е.

$$y(t) = u(t) u(t + \tau).$$

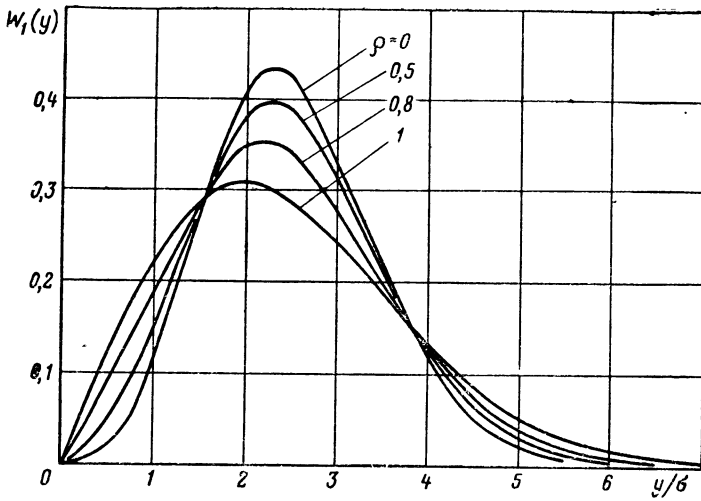


Рис. 9.34. Плотность вероятности суммы огибающих квазигармонического шума.

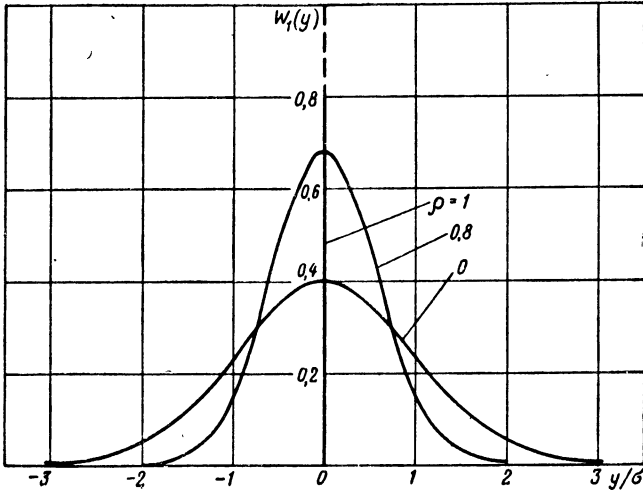


Рис. 9.35. Плотность вероятности разности огибающих квазигармонического шума.

Ответ:

$$W_1(y) = \frac{y}{\sigma^4(1-\rho^2)} I_0\left(\frac{\rho y}{\sigma^2(1-\rho^2)}\right) K_0\left(\frac{y}{\sigma^2(1-\rho^2)}\right), \quad y \geq 0;$$

$$m_n = 2^n \Gamma^2\left(1 + \frac{n}{2}\right) (1-\rho^2)^{n+1/2} F_1\left(1 + \frac{n}{2}; 1 + \frac{n}{2}; 1; \rho^2\right) \sigma^{2n};$$

$$m_y = \frac{\pi}{2} (1-\rho^2)^2 {}_2F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 1; \rho^2\right); \quad \sigma_y^2 = m_2 - m_y^2.$$

График $W_1(y)$ дан на рис. 9.36.

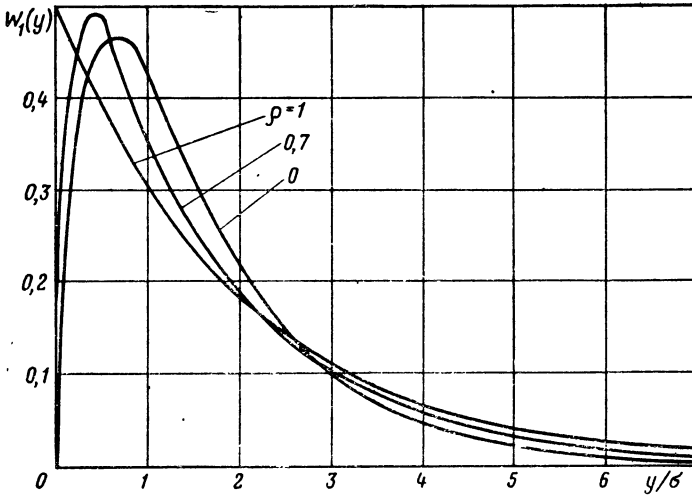


Рис. 9.36. Плотность вероятности произведения [оггибающих квазигармонического шума.

9.24. Решить задачу 9.21 при условии, что процесс $y(t)$ на выходе преобразователя равен

$$y(t) = \frac{u(t+\tau)}{u(t)}.$$

Ответ:

$$W_1(y) = \frac{2(1-\rho^2)y(1+y^2)}{[1+2(1-2\rho^2)y^2+y^4]^2}, \quad y \geq 0;$$

$m_y = E(\rho)$, $E(z)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода.

График плотности вероятности $W_1(y)$ приведен на рис. 9.37.

9.25. На вход радиотехнического устройства, состоящего из сумматора и линейного детектора оггибающей (рис. 9.38), воздействует нормальный стационарный квазигармонический шум

$$\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

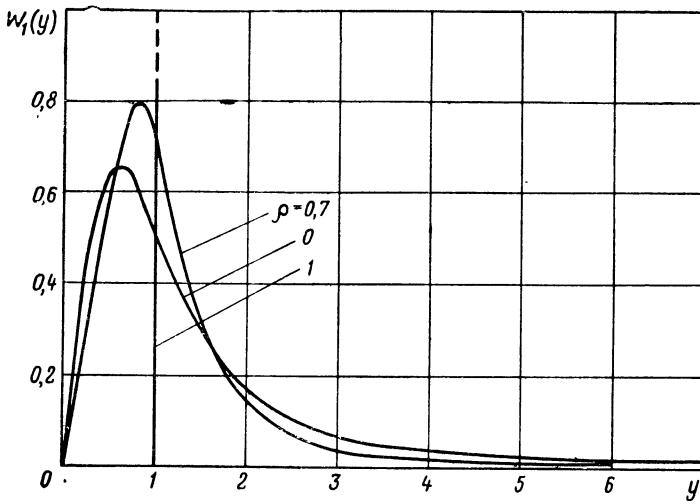


Рис. 9.37. Плотность вероятности частного огибающих квазигармонического шума.

с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 и гармоническое колебание

$$u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \psi).$$

В некоторый момент времени $t = t_0$ на третий вход сумматора подается сигнал

$$u_s(t) = U_s \cos \omega_0 t.$$

Определить отношение

$$\rho = \frac{(m_y)_{0+s} - (m_y)_0}{(\sigma_y)_{0+s}},$$

где $(m_y)_0$ — среднее значение процесса $y(t)$ на выходе устройства при воздействии на его вход процессов $\xi(t)$ и $u_0(t)$, а $(m_y)_{0+s}$ и $(\sigma_y)_{0+s}$ — соответственно среднее и среднеквадратичное значения при воздействии процессов $\xi(t)$, $u_0(t)$ и $u_s(t)$.

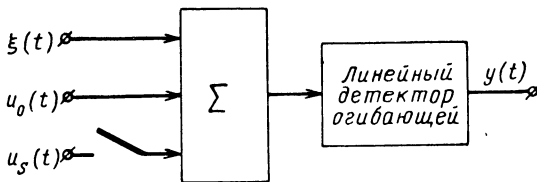


Рис. 9.38. Сумматор и линейный детектор огибающей.

Ответ:

$$\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{U^2}{2\sigma^2}\right) - {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{U_0^2}{2\sigma^2}\right)}{\left[2\left(1 + \frac{U^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\pi}{2} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{U^2}{2\sigma^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}}$$

где

$$U^2 = U_s^2 + U_0^2 + 2U_s U_0 \cos \psi.$$

При $U^2/2\sigma^2 \ll 1$ и $U_0^2/2\sigma^2 \ll 1$

$$\rho \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4 - \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{U_s^2 + 2U_s U_0 \cos \psi}{\sigma^2};$$

при $U^2/2\sigma^2 \gg 1$ и $U_0^2/2\sigma^2 \gg 1$

$$\rho = \frac{U - U_0}{\sigma}.$$

Графики функций $\rho = f(U_0/\sigma, U_s/\sigma)$ приведены на рис. 9.39.

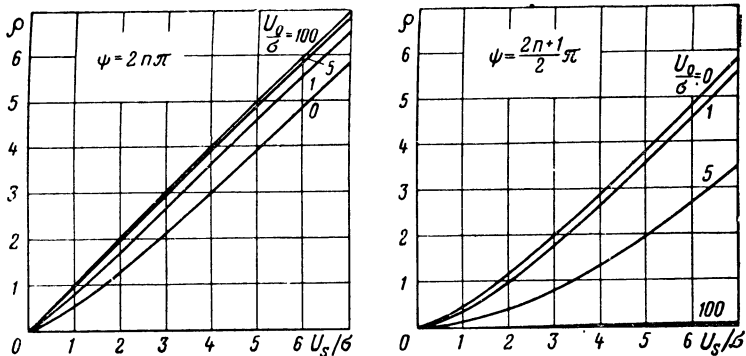


Рис. 9.39. Относительное приращение среднего значения на выходе линейного детектора огибающей.

9.26. На вход безынерционного однополупериодного линейного детектора с характеристикой (рис. 9.17)

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} a\xi, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный нормальный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Определить среднее значение m_η и функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$m_{\eta} = \frac{a\sigma}{\sqrt{2\pi}};$$

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{a^2\sigma^2}{2\pi} \left\{ [1 - R^2(\tau)]^{\frac{1}{2}} + R(\tau) \arccos[-R(\tau)] \right\} -$$

$$- m_{\eta}^2 \approx \frac{a^2}{4} \left[k_{\xi}(\tau) + \frac{k_{\xi}^2(\tau)}{\pi\sigma^2} \right]; \quad \sigma_{\eta}^2 = \frac{1}{2} a^2 \sigma^2.$$

У к а з а н и е. Следует воспользоваться разложениями в ряд

$$\arccos(-z) = \frac{\pi}{2} + z + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \dots, \quad (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2 \cdot 4} - \dots$$

9.27. Применительно к условию задачи 9.26 определить спектральную плотность $S_{\eta}(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе однополупериодного детектора, если спектральная плотность входного процесса $\xi(t)$ равна

$$S_{\xi}(\omega) = \begin{cases} N_0, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = \begin{cases} \frac{a^2 N_0}{2\pi} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_2 - \omega_1} \right), & 0 \leq \omega \leq \omega_2 - \omega_1, \\ \frac{a^2 N_0}{4}, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ \frac{a^2 N_0}{4\pi} \frac{\omega - 2\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}, & 2\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 + \omega_2, \\ \frac{a^2 N_0}{4\pi} \frac{2\omega_2 - \omega}{\omega_2 - \omega_1}, & \omega_1 + \omega_2 \leq \omega \leq 2\omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

График функции $S_{\eta}(\omega)$ представлен на рис. 9.40.

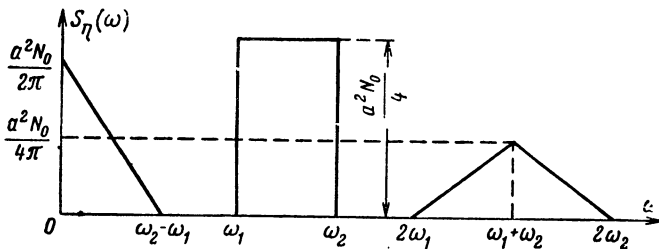


Рис. 9.40. Спектральная плотность процесса на выходе однополупериодного линейного детектора.

9.28. На вход безынерционного двухполупериодного линейного детектора с характеристикой (рис. 9.18)

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} a\xi & \text{при } \xi \geq 0, \\ -a\xi & \text{при } \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный нормальный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Определить среднее значение m_η процесса $\eta(t)$ на выходе детектора и его функцию корреляции $k_\eta(\tau)$.

Ответ:

$$m_\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a\sigma, \quad k_\eta(\tau) = \frac{a^2}{\pi\sigma^2} k_\xi^2(\tau).$$

9.29. Спектральная плотность воздействующего на двухполупериодный линейный детектор (рис. 9.18) процесса $\xi(t)$ равна

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Вычислить спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного процесса $\eta(t)$.

Ответ:

$$S_\eta(\omega) = \begin{cases} \frac{2a^2 N_0}{\pi} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_2 - \omega_1}\right), & 0 \leq \omega \leq \omega_2 - \omega_1, \\ \frac{a^2 N_0}{\pi} \frac{\omega - 2\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}, & 2\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1 + \omega_2, \\ \frac{a^2 N_0}{\pi} \frac{2\omega_2 - \omega}{\omega_2 - \omega_1}, & \omega_1 + \omega_2 < \omega \leq 2\omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

График функции $S_\eta(\omega)$ представлен на рис. 9.41.

9.30. На вход квадратичного элемента с характеристикой (рис. 9.3)

$$\eta = g(\xi) = a\xi^2, \quad a > 0,$$

воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$.

Найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ выходного процесса $\eta(t)$.

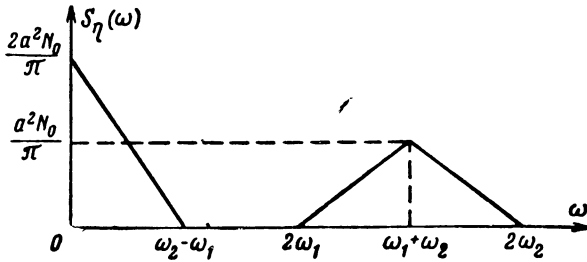


Рис. 9.41. Спектральная плотность Γ процесса на выходе двухполупериодного линейного детектора.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(x) S_{\xi}(\omega - x) dx.$$

9.31. Определить спектральную плотность $S_{\eta}(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе квадратичного устройства с характеристикой

$$\eta = g(\xi) = \xi^2$$

при воздействии на его вход нормального случайного процесса $\xi(t)$ со средним значением m_{ξ} и корреляционной функцией

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = 8\alpha\sigma_{\xi}^2 \left(\frac{\sigma_{\xi}^2}{\omega^2 + 4\alpha^2} + \frac{m_{\xi}^2}{\omega^2 + \alpha^2} \right).$$

9.32. На вход дифференцирующей схемы (рис. 9.42) воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right).$$

Определить энергетический спектр $S_{\eta}(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе квадратичного элемента.

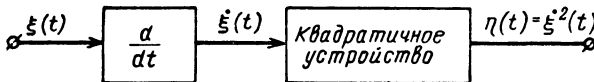


Рис. 9.42. Дифференцирующая схема и квадратичное устройство.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{4\alpha\omega_0^4\sigma^2}{\cos^2\gamma} \left[\frac{1}{\omega^2 + 4\alpha^2} + \frac{4(\alpha^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 + 4\alpha^2 - 4\omega_0^2)^2 + 16\alpha^2\omega_0^2} \right],$$

$$\gamma = \arctg \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

9.33. На логарифмическое устройство с нелинейной характеристикой вида

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} \ln(1 + \alpha\xi), & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_{\xi} = 0$ и функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Вычислить корреляционную функцию $k_{\eta}(\tau)$ и дисперсию σ_{η}^2 процесса $\eta(t)$ на выходе.

Ответ [35]:

$$k_{\eta}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \ln(1 + ax) e^{-\frac{x^2}{2}} D_n(x) dx \right\}^2 R^n(\tau),$$

где $a = \alpha\sigma\sqrt{2}$; $D_n(x)$ — функция параболического цилиндра [36];

$$\sigma_{\eta}^2 = k_{\eta}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \ln(1 + ax) dx - A^2,$$

$$A = \langle \ln(1 - \alpha\xi) \rangle.$$

9.34. На вход симметричного сглаженного ограничителя с характеристикой (рис. 9.43)

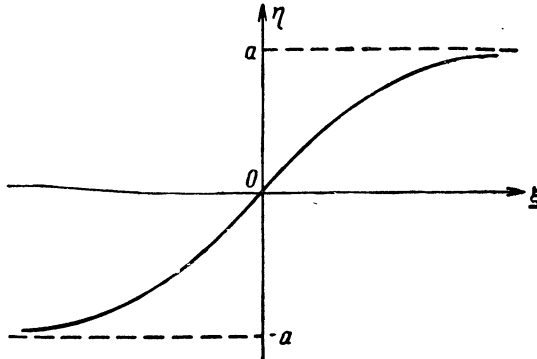


Рис.9.43. Характеристика симметричного сглаженного ограничителя.

$$\eta = g(\xi) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} dx - a$$

воздействует нормальный стационарный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 R(\tau).$$

Определить одномерную плотность вероятности и корреляционную функцию процесса $\eta(t)$ на выходе ограничителя.

Ответ [37]:

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\eta}} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma_{\eta}^2}\right\}, & \sigma_{\xi} \ll \sigma_0, \\ \frac{1}{2a}, & \sigma_{\xi} = \sigma_0, \\ \frac{1}{2}[\delta(\eta+a) + \delta(\eta-a)], & \sigma_{\xi} \gg \sigma_0; \end{cases}$$

$$k_{\eta}(\tau) = \sigma_{\eta}^2 \frac{\arcsin\left(\frac{R(\tau)}{1+\alpha}\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}, \quad \alpha = \frac{\sigma_0}{\sigma_{\xi}}.$$

9.35. На вход безынерционного нелинейного устройств (рис. 9.44) воздействуют стационарные случайные процессы $x_1(t)$

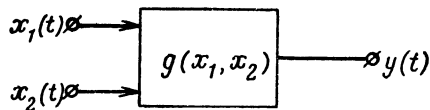


Рис. 9.44. Безынерционное нелинейное устройство с двумя входами.

$x_2(t)$ с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. Совместная плотность вероятности процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеет вид

$$\omega_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right\},$$

где ρ — коэффициент корреляции.

Процесс на выходе нелинейного устройства определяется соотношением

$$y(t) = g[x_1(t), x_2(t)].$$

Доказать, что n -я производная от среднего значения $\langle y(t) \rangle$ по ρ равна [14]

$$\frac{\partial^n \langle y(t) \rangle}{\partial \rho^n} = \left\langle \frac{\partial^{2n} g[x_1(t), x_2(t)]}{\partial^n x_1 \partial^n x_2} \right\rangle.$$

9.36. Используя результат задачи 9.35, определить среднее значение процесса $y(t)$ на выходе безынерционного нелинейного устройства с характеристикой

$$y(t) = g[x_1(t), x_2(t)] = |x_1(t) + x_2(t)| - |x_1(t) - x_2(t)|,$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — стационарные случайные процессы с нулевыми средними значениями, дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ и совместной плотностью вероятности

$$w_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)} \right\}.$$

Ответ:

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\sqrt{1+\rho} - \sqrt{1-\rho}].$$

9.37. На входы перемножителя (рис. 9.8) подаются независимые стационарные случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ со средними значениями m_{ξ_1} и m_{ξ_2} и корреляционными функциями $k_{\xi_1}(\tau)$ и $k_{\xi_2}(\tau)$.

Доказать, что: а) при $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = 0$ процесс $\eta(t)$ на выходе перемножителя некоррелирован с любым из входных процессов; б) при $m_{\xi_1} \neq 0$, $m_{\xi_2} \neq 0$ взаимные корреляционные функции выходного и входных процессов соответственно равны

$$k_{\xi_1 \eta}(\tau) = m_{\xi_2} k_{\xi_1}(\tau), \quad k_{\xi_2 \eta}(\tau) = m_{\xi_1} k_{\xi_2}(\tau).$$

9.38. Найти функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ и спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ случайного процесса

$$\eta(t) = \xi(t)\mu(t),$$

где $\xi(t)$ и $\mu(t)$ — независимые стационарные нормальные процессы с нулевыми средними значениями и автокорреляционными функциями

$$k_\xi(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad k_\mu(\tau) = e^{-\beta|\tau|}.$$

Ответ:

$$k_\eta(\tau) = e^{-(\alpha+\beta)|\tau|}, \quad S_\eta(\omega) = \frac{2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2 + \omega^2}.$$

9.39. На вход радиотехнического устройства, состоящего из дифференцирующей схемы и перемножителя (рис. 9.45), подается

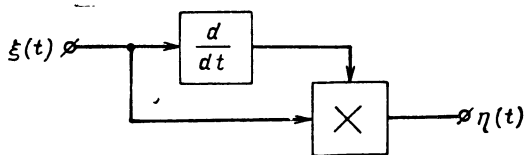


Рис. 9.45. Дифференцирующая схема и перемножитель.

нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Определить спектральную плотность $S_{\eta}(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе устройства.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{4\sigma_{\xi}^2 \alpha (\alpha^2 + \omega_0^2) \omega^2 (\omega^2 + 20\alpha^2 + 4\omega_0^2)}{(\omega^2 + 4\alpha^2) [(\omega^2 + 4\alpha^2 + 4\omega_0^2)^2 - 16\omega_0^2 \omega^2]}.$$

9.40. На входы перемножителя (рис. 9.8) подаются независимые стационарные случайные процессы $\xi(t)$ и $\mu(t)$ со средними значениями m_{ξ} и m_{μ} и корреляционными функциями

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad k_{\mu}(\tau) = \sigma_{\mu}^2 e^{-\beta|\tau|}.$$

Вычислить спектральную плотность $S_{\eta}(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе перемножителя.

Ответ:

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{2(\alpha + \beta) \sigma_{\xi}^2 \sigma_{\mu}^2}{(\alpha + \beta)^2 + \omega^2} + \frac{2\beta m_{\xi}^2 \sigma_{\mu}^2}{\beta^2 + \omega^2} + \frac{2\alpha m_{\mu}^2 \sigma_{\xi}^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

9.41. На вход радиотехнического устройства, состоящего из дифференцирующих схем и перемножителя (рис. 9.46), подаются независимые стационарные случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с нулевыми средними значениями $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = 0$ и корреляционными функциями

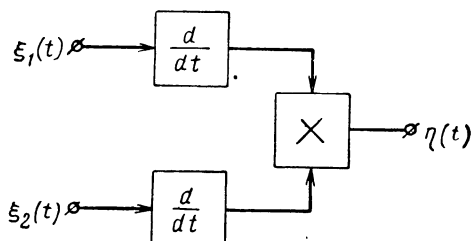


Рис. 9.46. Две дифференцирующие схемы и перемножитель.

$$k_{\xi_1}(\tau) = \sigma_{\xi_1}^2 e^{-\alpha_1 |\tau|} \left(\cos \omega_1 \tau + \frac{\alpha_1}{\omega_1} \sin \omega_1 |\tau| \right),$$

$$k_{\xi_2}(\tau) = \sigma_{\xi_2}^2 e^{-\alpha_2 |\tau|} \left(\cos \omega_2 \tau + \frac{\alpha_2}{\omega_2} \sin \omega_2 |\tau| \right).$$

Определить корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ и энергетический спектр $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе перемножителя.

Ответ:

$$k_\eta(\tau) = k_{\xi_1}(\tau) k_{\xi_2}(\tau) = \sigma_{\xi_1}^2 \sigma_{\xi_2}^2 (\alpha_1^2 + \omega_1^2) (\alpha_2^2 + \omega_2^2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) |\tau|} \times$$

$$\times \left(\cos \omega_1 \tau - \frac{\alpha_1}{\omega_1} \sin \omega_1 |\tau| \right) \left(\cos \omega_2 \tau - \frac{\alpha_2}{\omega_2} \sin \omega_2 |\tau| \right);$$

$$S_\eta(\omega) = a \left\{ \frac{\alpha \cos \delta_1 + (\omega - \omega_c) \sin \delta_1}{(\omega - \omega_c)^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha \cos \delta_1 + (\omega + \omega_c) \sin \delta_1}{(\omega + \omega_c)^2 + \alpha^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha \cos \delta_2 + (\omega - \omega_p) \sin \delta_2}{(\omega - \omega_p)^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha \cos \delta_2 + (\omega + \omega_p) \sin \delta_2}{(\omega + \omega_p)^2 + \alpha^2} \right\},$$

где

$$a = \frac{\sigma_{\xi_1}^2 \sigma_{\xi_2}^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{2 \cos^3 \gamma_1 \cos^3 \gamma_2};$$

$$\gamma_1 = \arctg \frac{\alpha_1}{\omega_1}; \quad \gamma_2 = \arctg \frac{\alpha_2}{\omega_2}; \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2;$$

$$\delta_1 = \gamma_1 + \gamma_2; \quad \delta_2 = \gamma_1 - \gamma_2; \quad \omega_c = \omega_1 + \omega_2; \quad \omega_p = \omega_1 - \omega_2.$$

9.42. На линейный детектор огибающей ЛДО₁ одного из каналов двухканального приемника (рис. 9.47) воздействует стационарный квазигармонический шум

$$\xi_1(t) = A_1(t) \cos [\omega_0 t + \Phi_1(t)],$$

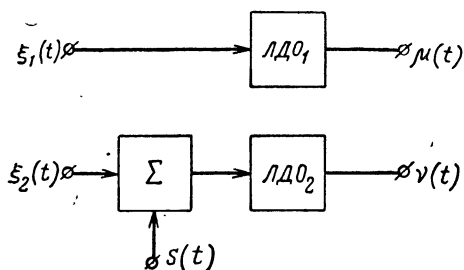


Рис. 9.47. Двухканальный приемник.

а на второй детектор ЛДО₂ — колебание

$$u(t) = \xi_2(t) + s(t),$$

где $\xi_2(t)$ — квазигармонические флуктуации

$$\xi_2(t) = A_2(t) \cos [\omega_0 t + \Phi_2(t)],$$

а $s(t)$ — некоррелированное с $\xi_2(t)$ гармоническое колебание

$$s(t) = A_m \cos \omega_0 t.$$

Коэффициент взаимной корреляции процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в совпадающие моменты времени равен ρ .

Определить значение коэффициента взаимной корреляции $\rho_{\mu\nu}$ процессов $\mu(t)$ и $\nu(t)$ на выходах каналов приемника в совпадающие моменты времени.

Ответ:

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{A-B}{C},$$

где

$$A = 2(1 - \rho_{\xi}^2) e^{-\frac{a^2}{1 - \rho_{\xi}^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m \times \\ \times \frac{\Gamma^2\left(m+k + \frac{3}{2}\right) \rho_{\xi}^{2(m+k)}}{(m+k)! k! (m!)^2 (1 - \rho_{\xi}^2)^m} a^{2m} {}_1F_1\left[m+k + \frac{3}{2}, m+1, \frac{a^2}{1 - \rho_{\xi}^2}\right] {}_1F_1\left[m+k + \frac{3}{2}, m+1, \frac{\rho_{\xi}^2 a^2}{1 - \rho_{\xi}^2}\right];$$

$$B = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{2} a^2} \left[(1 + a^2) I_0\left(\frac{a^2}{2}\right) + a^2 I_1\left(\frac{a^2}{2}\right) \right];$$

$$C = \sqrt{(4 - \pi) \left\{ 1 + a^2 - \frac{\pi}{4} \exp(-a^2) \left[(1 + a^2) I_0\left(\frac{a^2}{2}\right) + a^2 I_1\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] \right\}}.$$

Здесь a^2 — отношение сигнал/шум на входе ЛД_О₂:

$$a^2 = \frac{A_m^2}{2\sigma_2^2},$$

σ_2^2 — дисперсия процесса $\xi_2(t)$,

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\rho^2 + \rho_{\xi}^2},$$

ρ_{ξ} — коэффициент взаимной корреляции случайных процессов $\xi_1^*(t)$ и $\xi_2^*(t)$, взятых в квадратуре по отношению к входным шумам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$,

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 2 & \text{при } m \geq 1, \end{cases}$$

${}_1F_1(\alpha, \beta, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

9.43. На вход двухканальной системы (рис. 9.48) воздействует нормальный стационарный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением.

$G_1(t)$ и $G_2(t)$ — импульсные переходные функции линейных звеньев системы.

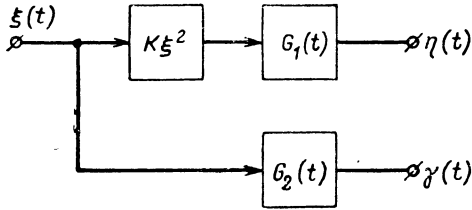


Рис. 9.48. Двухканальная схема.

Найти функцию взаимной корреляции $K_{\eta\gamma}(t_1, t_2) = \langle \eta(t_1) \gamma(t_2) \rangle$ на выходе каналов при $K = \text{const}$.

Ответ:

$$K_{\eta\gamma}(t_1, t_2) = 0.$$

9.44. Найти спектральную плотность процесса $y(t)$ на выходе умножителя синхронного детектора (рис. 9.49), если воздействующее на детектор колебание $x(t)$ равно

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где входной шум $n(t)$ представляет собой стационарный нормальный процесс с нулевым средним значением и спектральной плотностью

$$S_n(f) = \frac{\sigma_n^2}{2\alpha\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(f-f_0)^2}{2\alpha^2}} + e^{-\frac{(f+f_0)^2}{2\alpha^2}} \right], \quad \alpha \ll f_0,$$

а полезный сигнал $s(t)$ имеет вид

$$s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \theta).$$

Здесь A_m — постоянная амплитуда; θ — равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$ случайная фаза, не зависящая от шума.

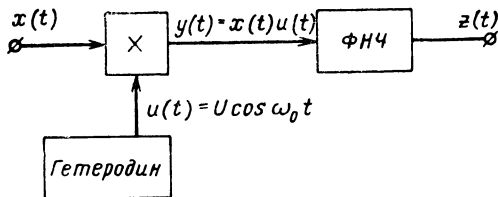


Рис. 9.49. Синхронный детектор.

Ответ:

$$S_y(f) = S_{ys}(f) + S_{yn}(f),$$

где $S_{ys}(f)$ — спектральная плотность сигнала на выходе умножителя, равная

$$S_{ys}(f) = \frac{1}{8} A_m^2 U^2 \delta(f) + \frac{1}{16} A_m^2 U^2 [\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)],$$

$S_{yn}(f)$ — спектральная плотность шума на выходе умножителя:

$$S_{yn}(f) = \frac{\sigma_n^2 U^2}{8\alpha \sqrt{2\pi}} \left[2e^{-\frac{f^2}{2\alpha^2}} + e^{-\frac{(f-2f_0)^2}{2\alpha^2}} + e^{-\frac{(f+2f_0)^2}{2\alpha^2}} \right].$$

9.45. Используя результаты задачи 9.44, определить отношение сигнал/шум на выходе фильтра нижних частот (ФНЧ), выразив его через полосу пропускания фильтра и отношение сигнал/шум на входе, если в качестве фильтра нижних частот используется простая интегрирующая цепь RC с полосой пропускания по половинной мощности $\Delta f \ll \alpha$.

Ответ:

$$\left(\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} \right)_{\text{вых}} = \left(\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} \right)_{\text{вх}} \sqrt{\frac{\alpha^2 \Delta f}{2\pi}}.$$

9.46. На вход радиотехнического устройства (рис. 9.50), состоящего из линейного фильтра (Φ) с импульсной переходной функцией

$$G(t) = \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t,$$

квадратичного детектора огибающей (КДО) и интегратора за время T , воздействует стационарный нормальный белый шум $n(t)$ с нулевым средним значением.

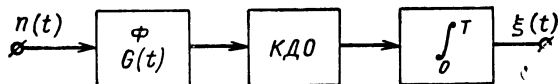


Рис. 9.50. Приемник с интегратором.

Определить коэффициент асимметрии γ процесса $\xi(t)$ на выходе устройства.

Ответ:

$$\gamma = \sqrt{\frac{4}{\alpha T}} \frac{1}{\sqrt{F(\alpha T)}} \left[1 - \frac{\alpha T}{F(\alpha T)} e^{-2\alpha T} \right],$$

где

$$F(\alpha T) = 1 - \frac{1}{2\alpha T} (1 - e^{-2\alpha T}).$$

9.47. На вход схемы рис. 9.51, состоящей из линейного детектора огибающей (ЛДО), устройства выборки и накопителя, воздействует стационарный нормальный квазигармонический шум

$$\xi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]$$

с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и дисперсией σ_ξ^2 . Выборочные значения $A_i = A(t_i)$ взаимно некоррелированы.

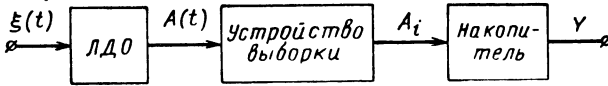


Рис. 9.51. Дискретный накопитель.

Вычислить среднее значение m_Y , дисперсию σ_Y^2 и плотность вероятности $W_1(Y)$ случайной величины Y на выходе накопителя, если

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i, \quad n \gg 1.$$

Ответ:

$$m_Y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\xi; \quad \sigma_Y^2 = \frac{4-\pi}{2n} \sigma_\xi^2;$$

$$W_1(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{4-\pi}{2n} \sigma_\xi^2}} \exp \left\{ -\frac{n \left(Y - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\xi \right)^2}{(4-\pi) \sigma_\xi^2} \right\}.$$

9.48. На систему «ограничитель — фильтр» (рис. 9.52) воздействует стационарный нормальный шум $\xi(t)$ с корреляционной функцией

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\gamma|\tau|}.$$

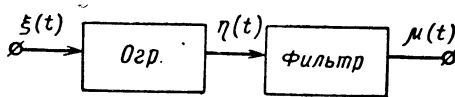


Рис. 9.52. Система «ограничитель — фильтр».

Найти корреляционную функцию $k_\mu(\tau)$ процесса $\mu(t)$ на выходе системы в предположении, что амплитудная характеристика ограничителя имеет вид (рис. 9.4)

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} -b, & \xi < -\beta, \\ s\xi, & -\beta \leq \xi \leq \alpha, \\ a, & \xi > \alpha, \end{cases}$$

а импульсная переходная характеристика фильтра равна

$$G(t) = \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{1}{\tau_1} t} - \frac{1}{\tau_2} e^{-\frac{1}{\tau_2} t},$$

причем $\tau_1 \gg 1/\gamma$, $\tau_2 \gg 1/\gamma$.

Ответ [39]:

$$k_{\mu}(\tau) = 2\sigma_{\eta}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\gamma} \left[\frac{1}{2\tau_1} e^{-\frac{1}{\tau_1} |\tau|} + \frac{1}{2\tau_2} e^{-\frac{1}{\tau_2} |\tau|} - \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \left(e^{-\frac{1}{\tau_1} |\tau|} + e^{-\frac{1}{\tau_2} |\tau|} \right) \right];$$

$$a_n = \left[\Phi^{(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) - \Phi^{(n-1)} \left(-\frac{\beta}{\sigma} \right) \right]^2 \frac{s^2 \sigma^2}{\sigma_{\eta}^2 n!};$$

$$\sigma_{\eta}^2 = \langle \eta^2(t) \rangle - \langle \eta(t) \rangle^2;$$

$$\langle \eta(t) \rangle = s\sigma \left[\left\{ \frac{\alpha}{\sigma} \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) \right] - \Phi^{(1)} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) \right\} - \left\{ \frac{\beta}{\sigma} \left[1 - \Phi \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right] - \Phi^{(1)} \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right\} \right];$$

$$\langle \eta^2(t) \rangle = s^2 \sigma^2 \left\{ \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sigma} \right)^2 - \left[\left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^2 \Phi \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) - \left(\frac{\beta}{\sigma} \right)^2 \Phi \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right] + \Phi \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) + \Phi \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) - 1 - \left[\frac{\alpha}{\sigma} \Phi^{(1)} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) + \frac{\beta}{\sigma} \Phi^{(1)} \left(\frac{\beta}{\sigma} \right) \right] \right\},$$

$\Phi^{(n)}(z)$ — n -я производная от интеграла вероятности (2.9).

9.49. На приемное устройство, схема которого изображена на рис. 9.53, воздействует стационарный белый шум $\xi(t)$, спектральная плотность которого $S_{\xi}(\omega) = N_0/2$. Передаточная функция линейной системы

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)},$$

а импульсная переходная функция $G(t)$ фильтра RC

$$G(t) = \gamma e^{-\gamma t}.$$

Определить: а) плотность вероятности $W_1(z)$ процесса $z(t)$ на выходе двухстороннего квадратичного детектора огибающей, б) среднее значение m_z процесса $z(t)$, в) функцию корреляции $k_z(\tau)$ и дисперсию σ_z^2 , г) среднее значение m_u процесса $u(t)$ на выходе фильтра RC , д) функцию корреляции $k_u(\tau)$ и дисперсию σ_u^2 на выходе фильтра RC .

Ответ:

$$а) W_1(z) = \frac{1}{2\sigma_y^2} \exp \left\{ -\frac{z}{2\sigma_y^2} \right\},$$

где $\sigma_y^2 = \frac{\alpha N_0 K_0^2}{2}$, $z(t) = Y^2(t)$, $Y(t)$ — огибающая процесса $y(t)$;

$$б) m_z = 2\sigma_y^2 = \alpha N_0 K_0^2;$$

$$в) k_z(\tau) = \alpha^2 N_0^2 K_0^4 e^{-2\alpha|\tau|}, \quad \sigma_z^2 = \alpha^2 N_0^2 K_0^4;$$

$$г) m_u = \alpha N_0 K_0^2;$$

$$д) k_u(\tau) = \frac{\gamma \alpha^2 N_0^2 K_0^4}{\gamma^2 - 4\alpha^2} (\gamma e^{-2\alpha|\tau|} - 2\alpha e^{-\gamma|\tau|}), \quad \sigma_u^2 = \alpha^2 N_0^2 K_0^4 \frac{\gamma}{\gamma + 2\alpha}.$$

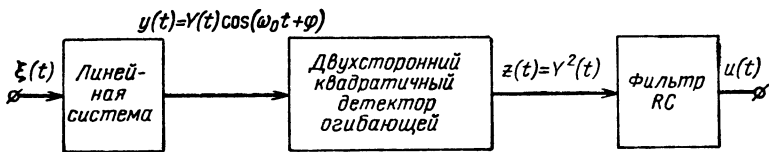


Рис. 9.53. Радиоприемное устройство.

9.50. На приемное устройство, схема которого изображена на рис. 9.53, воздействует случайный процесс

$$x(t) = \xi(t) + \eta(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный белый шум со спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = N_0/2$, а $\eta(t)$ — квазигармонический шум

$$\eta(t) = \begin{cases} A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Передаточная функция линейной системы, как и в задаче 9.49, имеет вид

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Вычислить плотность вероятности $W_1(z, t)$ процесса $z(t)$, его среднее значение $M_z(t)$ и функцию корреляции $K_z(t, \tau)$ для $t > 0$.

Ответ:

$$W_1(z, t) = \frac{1}{2\sigma_y^2(t)} \exp \left\{ -\frac{z}{2\sigma_y^2(t)} \right\}, \quad z \geq 0;$$

$$M_z(t) = 2\sigma_y^2(t); \quad K_z(t, \tau) = 4\sigma_y^2(t) \rho_y^2(t, \tau);$$

$$\rho_y(t, \tau) = \frac{K_y(t, \tau)}{\sigma_y^2(t)}.$$

Здесь

$$\sigma_y^2(t) = \sigma_\mu^2 + \sigma_v^2(t),$$

$$\sigma_\mu^2 = \frac{\alpha N_0 K_0^2}{2},$$

$$\sigma_v^2(t) = \begin{cases} \frac{\alpha \sigma_\eta^2 K_0^2}{\alpha^2 - \beta^2} [(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta) e^{-2\alpha t} - 2\alpha e^{-(\alpha + \beta)t}], & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

$$K_y(t, \tau) = k_\mu(\tau) + K_v(t, \tau),$$

$$k_\mu(\tau) = \frac{\alpha N_0 K_0^2}{2} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

$$K_v(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\alpha \sigma_\eta^2 K_0^2}{\alpha^2 - \beta^2} [(\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}) + (\alpha + \beta) e^{-\alpha\tau - 2\alpha t} - \\ - \alpha (e^{-\alpha\tau} + e^{-\beta\tau}) e^{-(\alpha + \beta)t}] \cos \omega_0 \tau, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

9.51. Используя условие и результаты задачи 9.50, определить среднее значение $M_u(t)$ процесса $u(t)$ на выходе фильтра с импульсной переходной функцией

$$G(t) = \gamma e^{-\gamma t}.$$

Ответ:

$$M_u(t) = \alpha N_0 K_0^2 + \frac{2\alpha \gamma \sigma_\eta^2 K_0^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{\alpha - \beta}{\gamma} + \left(\frac{2\alpha}{\gamma - \alpha - \beta} - \frac{\alpha - \beta}{\gamma} - \frac{\alpha + \beta}{\gamma - 2\alpha} \right) \times \right. \\ \left. \times e^{-\gamma t} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma - 2\alpha} e^{-2\alpha t} - \frac{2\alpha}{\gamma - \alpha - \beta} e^{-(\alpha + \beta)t} \right].$$

9.52. На радиотехническое устройство, состоящее из интегрирующей цепочки RC , двухполупериодного безынерционного квадратичного элемента с характеристикой $\zeta = a\eta^2$ и фильтра нижних частот (ФНЧ) (рис. 9.54), воздействует стационарный нормальный белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = N_0$, $0 \leq \omega < \infty$.

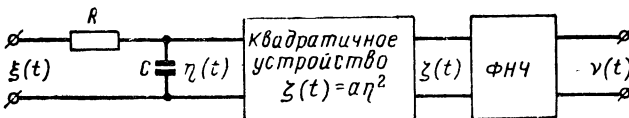


Рис. 9.54. Радиотехническая схема.

Определить корреляционную функцию $k_{\zeta}(\tau)$ и спектральную плотность $S_{\zeta}(\omega)$ процесса $\zeta(t)$ на выходе нелинейного элемента.

Ответ:

$$k_{\zeta}(\tau) = \frac{a^2 N_0^2}{4(RC)^2} \left[1 + 2e^{-\frac{2}{RC}|\tau|} \right],$$

$$S_{\zeta}(\omega) = \frac{a^2 N_0^2}{4(RC)^2} \left[\delta(\omega) + \frac{4}{4 + (\omega RC)^2} \right].$$

9.53. Используя условие и результаты задачи 9.52, определить среднее значение m_v и дисперсию σ_v^2 процесса $v(t)$ на выходе фильтра нижних частот с импульсной переходной функцией

$$G(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Вычислить отношение σ_v/m_v и его предельное значение при $T \rightarrow \infty$.

Ответ:

$$m_v = \frac{\alpha N_0}{2RC} (1 - e^{-\alpha T}); \quad \sigma_v^2 = \frac{\alpha a^2 N_0^2}{2RC} \left[\frac{1}{\alpha RC + 2} + \frac{1}{\alpha RC - 2} e^{-2\alpha T} - \frac{2\alpha RC}{(\alpha RC)^2 - 4} e^{-\frac{(\alpha RC + 2)T}{RC}} \right]; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_v}{m_v} = \sqrt{\frac{2\alpha RC}{\alpha RC + 2}}.$$

9.54. Используя условие и результаты задачи 9.52, определить среднее значение m_v и дисперсию σ_v^2 процесса $v(t)$ на выходе фильтра нижних частот с импульсной переходной функцией

$$G(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Ответ:

$$m_v = \frac{\alpha N_0 T}{2RC}; \quad \sigma_v^2 = \frac{a^2 N_0^2}{4} \left[\frac{2T}{RC} - 1 + e^{-\frac{2}{RC}T} \right].$$

9.55. На приемник (рис. 9.55) воздействует сигнал

$$x(t) = A(t) \cos 2\pi f_0 t,$$

где $A(t)$ — стационарный нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и спектральной плотностью

$$S_A(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq |f| \leq 0,05 f_0, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

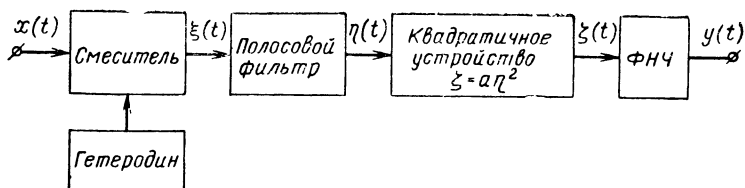


Рис. 9.55. Схема радиоприемника.

Сигнал на выходе смесителя равен

$$\xi(t) = [1 + x(t)] g(t),$$

где $g(t)$ — периодическая функция времени, изображенная на рис. 9.56.

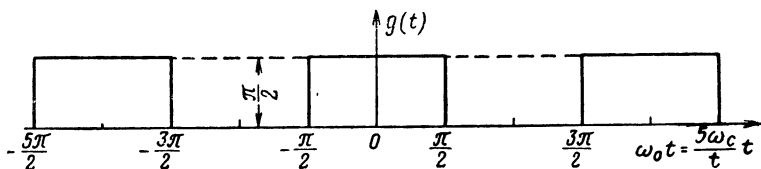


Рис. 9.56. Модулирующая функция.

Передаточные функции полосового фильтра и фильтра нижних частот (ФНЧ) соответственно равны

$$K_{\text{ПФ}}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0,1 f_0 \leq |f| \leq 0,4 f_0, \\ 0 & \text{при других } f, \end{cases}$$

$$K_{\text{ФНЧ}}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq |f| \leq 0,15 f_0, \\ 0 & \text{при других } f. \end{cases}$$

Найти: а) спектральную плотность $S_{\xi}(f)$ на выходе смесителя, б) среднее значение m_y , дисперсию σ_y^2 и спектральную плотность $S_y(f)$ процесса $y(t)$ на выходе фильтра нижних частот.

Ответ:

$$\text{а) } S_{\xi}(f) = S_x(f - f_0); \quad \text{б) } m_y = 2a\Delta F, \quad \sigma_y^2 = 8a^2\Delta F^2,$$

где ΔF — энергетическая полоса процесса $A(t)$;

$$S_y(f) = 4a^2\Delta F^2\delta(f) + 4a^2(\Delta F - |f|).$$

9.56. На рис. 9.57 приведена упрощенная схема двухканального коррелятора. На один из его входов поступает колебание

$$\xi_1(t) = s_1(t) + n_1(t),$$

а на второй —

$$\xi_2(t) = s_2(t) + n_2(t).$$

Здесь $s_i(t)$ — гармонические колебания с частотой ω_0 различными амплитудами и начальными фазами:

$$s_1(t) = A_1 \cos \omega_0 t,$$

$$s_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \theta),$$

а $n_i(t)$ — квазигармонические флуктуации:

$$n_1(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t + y_1(t) \sin \omega_0 t,$$

$$n_2(t) = [x_1(t) + kx_2(t)] \cos \omega_0 t + [y_1(t) + ky_2(t)] \sin \omega_0 t.$$

Квадратурные составляющие $x_i(t)$ и $y_i(t)$ являются независимыми стационарными случайными процессами с нулевыми средними зна-

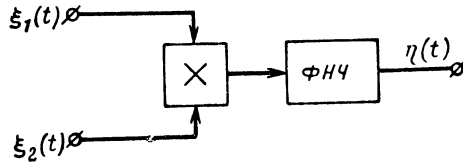


Рис. 9.57. Двухканальный коррелятор с фильтром нижних частот.

чениями и дисперсиями σ_1^2 для $x_1(t)$, $y_1(t)$ и σ_2^2 для $x_2(t)$, $y_2(t)$. Коэффициент k определяет степень коррелированности флуктуаций $n_1(t)$ и $n_2(t)$:

$$\langle n_1(t) n_2(t) \rangle = k\sigma_1^2.$$

Определить среднее значение m_η и дисперсию σ_η^2 процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра нижних частот.

Ответ:

$$m_\eta = A_1 A_2 \cos \theta + 2k\sigma_1^2,$$

$$\sigma_\eta^2 = 4k^2\sigma_1^4 + \sigma_1^2 (A_2^2 + A_1^2 k^2 + 2kA_1 A_2 \cos \theta + A_1^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_2^2).$$

9.57. Применительно к условию задачи 9.56 определить характеристическую функцию $\Theta_\eta(\Omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра нижних частот.

Ответ [40]:

$$\Theta_\eta(\Omega) = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (\alpha\beta + \Omega^2)} e^{j\Omega a (b - ak) - \frac{[\alpha a^2 + \beta (b^2 + c^2) + 2jab\Omega] \Omega^2}{2(\alpha\beta + \Omega^2)}},$$

где

$$a = A_1; \quad b = A_2 \cos \theta + A_1 k;$$

$$c = A_2 \sin \theta; \quad \alpha = \frac{1}{\sigma_1^2} - 2jk\Omega;$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma_2^2}.$$

9.58. Используя результат задачи 9.56, вычислить плотность вероятности $W_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра нижних частот для частного случая воздействия на коррелятор идентичных колебаний $\xi_1(t) = \xi_2(t)$, т. е. при $A_1 = A_2 = a$, $\theta = 0$, $k = 1$ и $\sigma_2^2 = 0$.

Ответ:

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_1^2} \exp\left\{-\frac{\eta+a^2}{2\sigma_1^2}\right\} I_0\left(\frac{a\sqrt{\eta}}{\sigma_1^2}\right), & \eta \geq 0, \\ 0, & \eta < 0. \end{cases}$$

9.59. Решить задачу 9.58 для случая отсутствия шума $n_2(t)$ на втором входе коррелятора.

Ответ:

$$W_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left\{-\frac{(\eta-m_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right\},$$

где

$$m_\eta = A_1 A_2 \cos \theta, \quad \sigma_\eta^2 = \sigma_1^2 A_2^2.$$

9.60. Решить задачу 9.58 для случая воздействия на коррелятор идентичных сигналов $s_1(t) = s_2(t)$ и некоррелированных процессов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ с равными дисперсиями, т. е. при $A_1 = A_2 = a$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, $\theta = 0$ и $k = 0$.

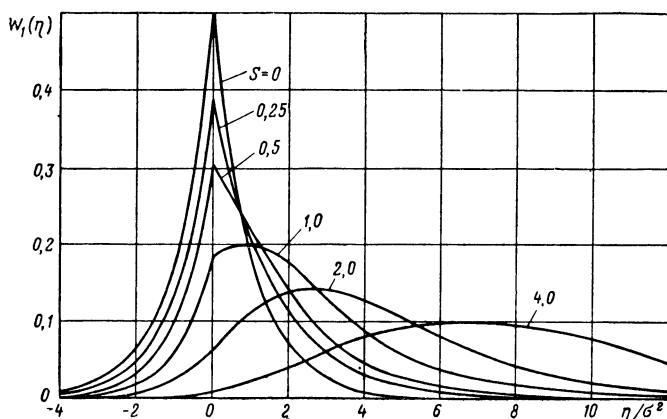


Рис. 9.58. Плотность вероятности на выходе двухканального коррелятора.

Ответ [40]:

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma^2} e^{-\frac{\eta}{2\sigma^2} - s}, & \eta < 0, \\ \frac{1}{4\sigma^2} e^{-\frac{\eta}{2\sigma^2} - s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\eta}{\sigma^2}\right)^n \left[1 - \frac{e^s}{e^s}\right], & \eta > 0. \end{cases}$$

Здесь $s = a^2/2\sigma^2$ — отношение сигнал/шум на входе коррелятора,

$$e^s = 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}.$$

График плотности вероятности $W_1(\eta)$ приведен на рис. 9.58.

9.61. На вход автокоррелятора, состоящего из линии задержки (ЛЗ) с временем задержки $t_{\text{зад}} = \tau$, перемножителя и фильтра нижних частот (ФНЧ) (рис. 9.59), поступает стационарный случайный процесс $n(t)$ с нулевым средним значением $m_n = 0$ и функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

Фильтр нижних частот пропускает без искажений только низкочастотные составляющие процесса на выходе перемножителя.

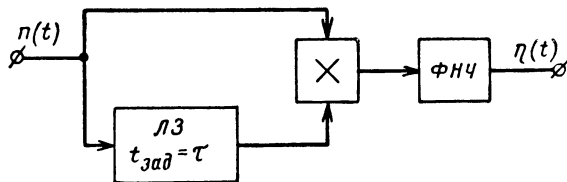


Рис. 9.59. Автокоррелятор.

Определить плотность вероятности $W_1(\eta)$ процесса $\eta(t)$ на выходе коррелятора.

Ответ [41]:

$$W_1(\eta) = \frac{1}{4\sigma^2} e^{-\frac{|\eta|}{2\sigma^2 [1 - \rho(\tau)]}}.$$

9.62. На один из входов двухканального коррелятора (рис. 9.60) поступает колебание

$$x_1(t) = s_1(t) + n_1(t),$$

а на второй —

$$x_2(t) = s_2(t) + n_2(t).$$

Здесь $s_i(t)$ — прямоугольный радиопульс длительностью T :

$$s_i(t) = \frac{A_i}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t + \psi_i), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2,$$

а $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые стационарные нормальные белые шумы с нулевыми средними значениями и функциями корреляции

$$k_{n_1}(\tau) = \frac{N_1}{2} \delta(\tau), \quad k_{n_2}(\tau) = \frac{N_2}{2} \delta(\tau),$$

$$\langle n_1(t) n_2(t) \rangle = 0.$$

В качестве входных фильтров (Φ) коррелятора используются колебательные контуры с импульсными переходными функциями

$$G_i(t) = 2\alpha_i e^{-\alpha_i t} \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0.$$

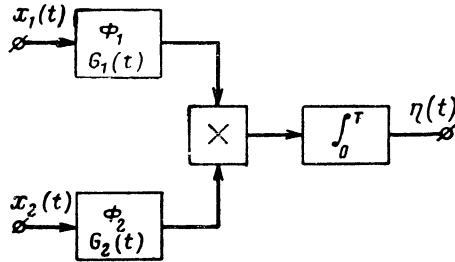


Рис. 9.60. Двухканальный коррелятор с интегратором.

Вычислить среднее значение $m_\eta(t)$ и дисперсию $\sigma_\eta^2(t)$ процесса $\eta(t)$ на выходе коррелятора в момент времени $t = T$.

Ответ:

$$m_\eta(T) = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2} \cos(\psi_2 - \psi_1) F_1(a_1, a_2);$$

где

$$a_1 = \alpha_1 T, \quad a_2 = \alpha_2 T,$$

$$E_1 = \frac{A_1^2}{2} T, \quad E_2 = \frac{A_2^2}{2} T,$$

$$F_1(a_1, a_2) = 1 - \frac{1}{a_1} (1 - e^{-a_1}) - \frac{1}{a_2} (1 - e^{-a_2}) + \frac{1}{a_1 + a_2} (1 - e^{-(a_1 + a_2)});$$

$$\sigma_\eta^2(T) = \frac{E_1 N_2}{2} a_2 F_2(a_1, a_2) + \frac{E_2 N_1}{2} F_3(a_1, a_2) + \frac{N_1 N_2}{4} a_1 a_2 F_4(a_1, a_2).$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 F_2(a_1, a_2) = & \frac{1}{2a_2^2} (a_2 - 1 + e^{-a_2}) - \frac{1}{2a_2} \left[\frac{1}{a_1} (1 - e^{-a_1}) - \right. \\
 & - \frac{1}{2(a_1 + a_2)} (1 - e^{-(a_1 + a_2)}) + \frac{1}{2(a_2 - a_1)} (e^{-a_2} - e^{-a_1}) \left. \right] - \\
 & - \frac{1}{4(a_2 - a_1)} \left[\frac{1}{a_1} (1 - e^{-a_1}) - \frac{1}{a_2} (1 - e^{-a_2}) \right] - \\
 & - \frac{1}{4(a_2 + a_1)} \left[\frac{1}{a_1} (1 - e^{-a_1}) - \frac{1}{a_2} e^{-a_1} (1 - e^{-a_2}) \right] + \\
 & + \frac{1}{4(a_2 - a_1)} \left[\frac{1}{2a_1} (1 - e^{-2a_1}) - \frac{1}{a_1 + a_2} (1 - e^{-(a_1 + a_2)}) \right] + \\
 & + \frac{1}{4(a_1 + a_2)} \left[\frac{1}{2a_1} (1 - e^{-2a_1}) + \frac{1}{a_2 - a_1} e^{-a_1} (e^{-a_2} - e^{-a_1}) \right];
 \end{aligned}$$

$F_3(a_1, a_2) = F_2(a_2, a_1)$, т. е. $F_3(a_1, a_2)$ получается из $F_2(a_1, a_2)$ путем замены a_1 на a_2 и a_2 на a_1 ;

$$F_4'(a_1, a_2) = \frac{1}{a_1 + a_2} - \frac{1}{(a_1 + a_2)^2} (1 - e^{-(a_1 + a_2)}).$$

9.63. На вход инерционного детектора (рис. 9.61, а) воздействует стационарный нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Нелинейная характеристика диода (Д) имеет вид (рис. 9.61, б)

$$i = g(u) = i_0 e^{\alpha u},$$

а постоянная времени цепи RC много больше времени корреляции процесса $\xi(t)$.

Определить плотность вероятности $W_1(\eta)$ напряжения $\eta(t)$ на нагрузке RC детектора.

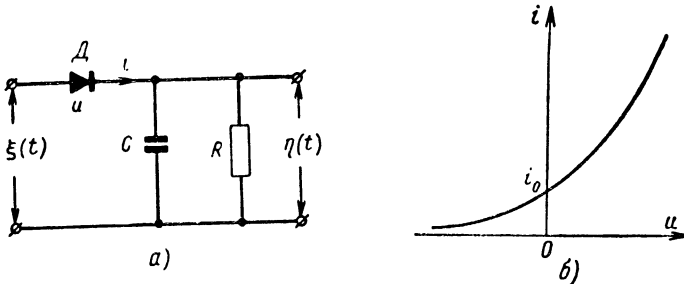


Рис. 9.61. Инерционный детектор.

Ответ [42]:

$$W_1(\eta) = N \cdot \exp \left\{ 2\alpha\eta + \frac{RC}{T_R} (\alpha i_0 R)^{-2} e^{-\alpha^2 \sigma^2} \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\eta \right) e^{2\alpha\eta} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\alpha i_0 R) e^{\alpha\eta + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2} \right] \right\},$$

где N — нормировочный множитель, определяемый из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(\eta) d\eta = 1; \\ T_R = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha\sigma)^{2n}}{n!} \int_0^{\infty} R^n(\tau) d\tau.$$

Литература

1. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, т. XIV, № 4; 1954, т. XV, № 3.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
3. Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на нелинейные радиотехнические устройства. Докторская диссертация. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1956.
4. Черенков А. П. Прохождение квазинормальных флуктуаций через детектор с фильтром низких частот. «Вестник МГУ», 1957, № 3.
5. Леонов В. П., Ширяев А. Н. К технике вычисления семинвариантов. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, вып. 3.
6. Rice S. O. Mathematical Analysis of Random Noise. BSTJ, 1944, v. 23, № 3; 1945, v. 24, № 1.
7. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Изд-во «Советское радио», 1965.
8. «Таблицы функции ошибок и ее первых двадцати производных». Пер. с англ. Барк Л. С. и Большева Л. Н. Изд. ВЦ АН СССР, 1965.
9. Tabulation of Selected Confluent Hypergeometric Functions. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1952.
10. Амиантов И. Н., Тихонов В. И. Воздействие нормальных флуктуаций на типовые нелинейные элементы. «Известия АН СССР», ОТН, 1956, № 4.
11. Тихонов В. И., Амиантов И. Н. Воздействие сигнала и шума на нелинейные элементы (прямой метод). «Радиотехника и электроника», 1957, т. II, № 5.
12. Price R. A Useful Theorem for Nonlinear Devices Having Gaussian Inputs. IRE Trans. on Inform. Theory, 1958, v. IT-4, № 2.
13. Price R. Comment on «A Useful Theorem for Nonlinear Devices Having Gaussian Inputs». IEEE Trans. on Inform. Theory, 1964, v. IT-10, № 2.
14. McMahon E. L. An Extension of Price's Theorem. IEEE Trans. on Inform. Theory, 1964, v. IT-10, № 2.
15. Blachman N. M. Band-Pass Nonlinearities. IEEE Trans. on Inform. Theory, 1964, v. IT-10, № 2.

16. Paroulis A. Comment on «An Extension of Price's Theorem». IEEE Trans. on Inform. Theory, 1965, v. IT-11, № 1.
17. Nuttall A. H. On the Envelopes of Zonal Filter Outputs of Memoryless Distortions of Narrow-Band Processes. IEEE Trans. on Inform. Theory, 1965, v. IT-11, № 2.
18. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, т. XIV, № 2.
19. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
20. Тихонов В. И. Работа частотной автоподстройки частоты при наличии шумов. «Электросвязь», 1962, № 9.
21. Тихонов В. И. Специальные случаи применения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. «Радиотехника и электроника», 1962, т. VII, № 8.
22. Казаков И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных автоматических систем. «Автоматика и телемеханика», 1956, т. XVII, № 5.
23. Пятницкий Г. И. Воздействие стационарных случайных процессов на системы автоматического регулирования, содержащие существенно нелинейные элементы. «Автоматика и телемеханика», 1960, т. XXI, № 4.
24. Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на детектор (метод огибающей). «Известия АН СССР», ОТН, 1955, № 10.
25. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, 1945.
26. Бакаев Ю. Н., Кузнецов П. И. Метод усреднения и его применение к некоторым нелинейным задачам радиотехники. «Радиотехника», 1956, т. 11, № 10.
27. Van Trees H. L. Functional Techniques for the Analysis on the Nonlinear Behavior of Phase-Locked Loops. Proc. IRE, 1964, v. 52, № 8.
28. Ralston G. Addition of Uniform and Gaussian Distributions-Exact and Approximate Solutions. Proc. IEEE, 1966, v. 54, № 7.
29. Тихонов В. И. Влияние шумов на работу системы фазовой автоподстройки частоты. «Автоматика и телемеханика», 1959, т. 20, № 9; 1960, т. 21, № 3.
30. Тихонов В. И. Влияние флуктуаций на точность работы устройств синхронизации. «Успехи физических наук», 1964, т. 28, вып. 4.
31. Стратонович Р. Л. Синхронизация автогенератора при наличии помех. «Радиотехника и электроника», 1958, т. 3, № 4.
32. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы флуктуаций в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
33. Morgan S. P. Tables of Bessel Functions of Imaginary Order and Imaginary Argument. Institute of Technology, California, 1947.
34. Тихонов В. И. К вопросу об измерении электрических флуктуаций при помощи термоэлектрических приборов. ЖТФ, 1955, т. XXV, вып. 5.
35. Билык М. Г. Корреляционная функция случайного нормального процесса на выходе логарифмического устройства. В сб. «Проблемы передачи квазистационарных сигналов». Изд-во АН УССР, 1967.
36. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. Изд-во иностранной литературы, 1963.
37. Baum R. F. The Correlation Function of Smoothly Limited Gaussian Noise. IRE Trans. on Inform. Theory, 1957, v. IT-3, № 3.
38. Даниленко В. М. К вопросу о нормализации случайного процесса при последдетекторном интегрировании. «Известия вузов», Радиотехника, 1967, т. 10, № 3.

39. Данилов Б. В., Михайлов Ю. П. Воздействие флуктуаций на систему ограничитель — инерционная цепь RC . «Известия вузов», Радиотехника, 1966, т. 8, № 6.
40. Соорег D. C. The Probability Density Function for the Output of a Correlator with Band-Pass Input Waveforms. IEEE Trans. on Inform. Theory, 1965, v. IT-11, № 2.
41. Лезин Ю. С. О распределении шума на выходе автокорреляционного устройства. «Радиотехника», 1965, т. 20, № 3.
42. Тихонов В. И. О воздействии флуктуаций на инерционный детектор. НДВШ. «Радиотехника и электроника», 1959, № 2.

10. ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Теоретические сведения

Рассмотрим какую-либо реализацию непрерывного (дифференцируемого) случайного процесса $\xi(t)$ длительностью T (рис. 10.1). Такая реализация на конечном интервале T имеет конечное число максимумов и минимумов с различными значениями H , причем в момент времени t_m реализация имеет абсолютный (наибольший) максимум H_m .

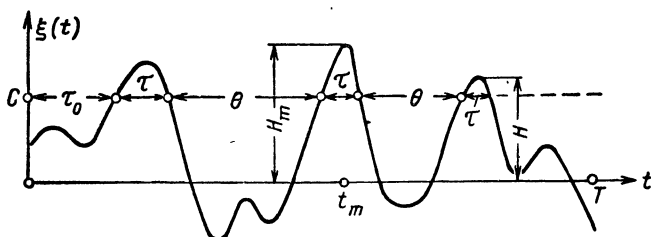


Рис. 10.1. Реализация стационарного случайного процесса.

Реализация $\xi(t)$ может несколько раз пересекать фиксированный уровень C снизу вверх (с положительной производной), причем в момент времени τ_0 впервые происходит такое пересечение (т. е. первый раз снизу достигается граница C).

Когда случайный процесс $\xi(t)$ пересекает уровень C снизу вверх, будем говорить, что имеет место положительный выброс. Если же уровень C пересекается сверху вниз, то можно говорить об отрицательном выбросе. Тогда можно сказать, что реализация $\xi(t)$ длительностью T имеет n (рис. 10.1) положительных (отрицательных) выброса на уровне C , причем указанные на рисунке величины τ и θ можно назвать соответственно длительностями положительных и отрицательных выбросов. Часто величину θ называют длительностью интервалов между выбросами.

Величины τ , θ и H в пределах одной реализации могут принимать несколько значений (в зависимости от уровня C и интервала T) и

вместе с величинами n , τ_0 и H_m изменяются случайным образом от одной реализации к другой.

При статистическом описании этих случайных величин можно интересоваться их средними значениями, дисперсиями, плотностями вероятности и другими характеристиками. Ниже в справочном виде приведены окончательные формулы в основном для средних значений, так как вычисление других характеристик, как правило, связано с выполнением численного интегрирования, что выходит за пределы целевого назначения данной книги. Другие характеристики затрагиваются лишь попутно тогда, когда они могут быть найдены без сложных математических вычислений.

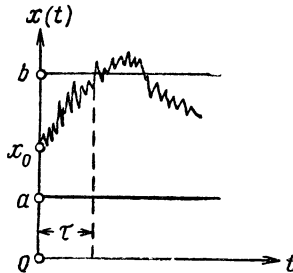


Рис. 10.2. К определению первого времени достижения границ a , b .

1. Для недифференцируемых одномерных марковских процессов известен рецептурный метод вычисления начальных моментов времени первого достижения границ [1].

Пусть случайный процесс $x(t)$ задан дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, n(t)), \quad (10.1)$$

где f — заданная функция аргументов, причем $n(t)$ входит в нее линейно и аддитивно, $n(t)$ — белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$\langle n(t_1) n(t_2) \rangle = \frac{1}{2} N_0 \delta(t_2 - t_1). \quad (10.2)$$

Предположим, что в начальный момент времени $t_0=0$ координата $x_0 = x(t_0)$ точно известна и находится внутри интервала (a, b) (рис. 10.2), т. е. плотность вероятности координаты x в момент времени $t_0 = 0$ является дельта-функцией

$$W_0(x) = \delta(x - x_0), \quad a < x_0 < b. \quad (10.3)$$

Обозначим через $\tau(a, x_0, b)$ случайное время первого достижения границ a или b точки, первоначально находящейся в x_0 , а через $T_n(a, x_0, b) = \langle \tau^n(a, x_0, b) \rangle$ — соответствующие начальные моменты этого времени.

Моменты T_n определяются цепочкой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2 T_n}{dx_0^2} + K_1(x_0) \frac{dT_n}{dx_0} = -nT_{n-1} \quad (T_0 = 1). \quad (10.4)$$

Коэффициенты $K_1(x_0)$ и $K_2(x_0)$ находятся из исходного уравнения (10.1) по формулам

$$K_1(x_0) = \langle f(x_0, n(t)) \rangle, \quad K_2(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} k(f, f_\tau) d\tau, \quad (10.5)$$

где через $k(f, f_\tau)$ обозначена корреляционная функция правой части уравнения (10.1):

$$k(f, f_\tau) = \langle [f(x_0, n(t)) - \langle f(x_0, n(t)) \rangle] [f(x_0, n(t+\tau)) - \langle f(x_0, n(t+\tau)) \rangle] \rangle. \quad (10.6)$$

Уравнения (10.4) должны решаться при краевых условиях

$$T_n(a, a, b) = T_n(a, b, b) = 0, \quad (10.7)$$

причем по физическому смыслу все моменты T_n должны быть положительными величинами, т. е. $T_n(a, x_0, b) \geq 0$.

Система уравнений (10.4) в принципе решается сравнительно просто, так как при помощи замены $z_n = dT_n/dx_0$ каждое уравнение сводится к линейному уравнению первого порядка, и решение может быть записано в квадратуре. Начиная решение с $n = 1$, последующие моменты T_n можно выразить в квадратуре через предыдущие $T_m, m < n$. В частности, при $n = 1$ и $n = 2$ из (10.4) соответственно получим

$$\frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2 T_1}{dx_0^2} + K_1(x_0) \frac{dT_1}{dx_0} + 1 = 0, \quad (10.8)$$

$$\frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2 T_2}{dx_0^2} + K_1(x_0) \frac{dT_2}{dx_0} + 2T_1 = 0. \quad (10.9)$$

Найдя решения этих двух уравнений, можно вычислить дисперсию первого времени достижения границ:

$$\sigma_T^2(a, x_0, b) = T_2(a, x_0, b) - T_1^2(a, x_0, b). \quad (10.10)$$

При краевых условиях (10.7) решение уравнения (10.8) имеет вид

$$T_1(a, x_0, b) = \left\{ \int_{x_0}^b e^{-\varphi(y)} \left[\int_a^y \frac{2}{K_2(z)} e^{\varphi(z)} dz \right] dy \int_a^{x_0} e^{-\varphi(s)} ds + \right.$$

$$+ \int_{x_0}^a e^{-\varphi(y)} \left[\int_a^y \frac{2}{K_2(z)} e^{\varphi(z)} dz \right] dy \int_{x_0}^b e^{-\varphi(s)} ds \left\} \left[\int_a^b e^{-\varphi(y)} dy \right]^{-1}, \quad (10.11)$$

где

$$\varphi(z) = 2 \int \frac{K_1(z)}{K_2(z)} dz. \quad (10.12)$$

2. Среднее число пересечений дифференцируемым случайным процессом $\xi(t)$ непрерывной кривой $a(t)$ снизу вверх (рис. 10.3) на интервале $(t_0, t_0 + T)$ вычисляется по формуле

$$N_a^+(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^\infty \dot{\xi}(t) W_2(a(t), \dot{a}(t) + \dot{\xi}(t)) d\dot{\xi}. \quad (10.13)$$

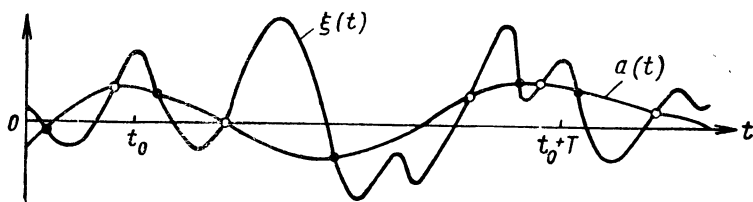


Рис. 10.3. Пересечения случайного процесса $\xi(t)$ и детерминированной функции $a(t)$.

Здесь $W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t))$ — совместная плотность вероятности для процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot{\xi}(t)$ в тот же момент времени.

Аналогичное число пересечений процессом $\xi(t)$ сверху вниз кривой $a(t)$ равно

$$N_a^-(T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^0 \dot{\xi}(t) W_2(a(t), \dot{a}(t) + \dot{\xi}(t)) d\dot{\xi}. \quad (10.14)$$

Пусть на интервале $(t_0, t_0 + T)$ заданы две непрерывные кривые $a(t)$ и $b(t)$, удовлетворяющие неравенству $a(t) < b(t)$. Среднее число раз, когда процесс выйдет из границ $a(t) < \xi(t) < b(t)$ на интервале $(t_0, t_0 + T)$, определяется формулой

$$N_{ab}(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^\infty \dot{\xi}(t) [W_2(b(t), \dot{b}(t) + \dot{\xi}(t)) + W_2(a(t), \dot{a}(t) - \dot{\xi}(t))] d\dot{\xi}. \quad (10.15)$$

В том частном случае, когда рассматриваются пересечения процесса $\xi(t)$ с горизонтальной прямой, т. е. $a(t) = C = \text{const}$, формулы (10.13) и (10.14) принимают соответственно вид

$$N^+(C, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^\infty \dot{\xi}(t) W_2(C, \dot{\xi}(t)) d\dot{\xi}, \quad (10.16)$$

$$N^-(C, T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^0 \dot{\xi}(t) W_2(C, \dot{\xi}(t)) d\dot{\xi}. \quad (10.17)$$

Применительно к стационарным в узком смысле процессам $\xi(t)$ внутренние интегралы в формулах (10.16) и (10.17) не будут зависеть от времени, и целесообразно ввести среднее число пересечений в единицу времени. Для среднего числа пересечений в единицу времени стационарным случайным процессом $\xi(t)$ фиксированного уровня C снизу вверх и сверху вниз из (10.16) и (10.17) получаем простые формулы

$$N_1^+(C) = N^+(C, 1) = \int_0^\infty \dot{\xi} W_2(C, \dot{\xi}) d\dot{\xi}, \quad (10.18)$$

$$N_1^-(C) = N^-(C, 1) = - \int_{-\infty}^0 \dot{\xi} W_2(C, \dot{\xi}) d\dot{\xi}. \quad (10.19)$$

Для ряда стационарных процессов (например, нормальных) значения процесса $\xi(t)$ и его производной $\dot{\xi}(t)$ в совпадающие моменты времени оказываются статистически независимыми, т. е.

$$W_2(C, \dot{\xi}) = W_1(C) w(\dot{\xi}). \quad (10.20)$$

При выполнении этого условия формулы (10.18) и (10.19) еще более упрощаются:

$$N_1^+(C) = W_1(C) \int_0^\infty \dot{\xi} w(\dot{\xi}) d\dot{\xi}, \quad N_1^-(C) = -W_1(C) \int_{-\infty}^0 \dot{\xi} w(\dot{\xi}) d\dot{\xi}. \quad (10.21)$$

Применительно к нормальному стационарному дифференцируемому процессу $\xi(t)$ со средним значением m и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau) \quad (10.22)$$

формулы (10.21) принимают вид

$$N_1^+(C) = N_1^-(C) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R_0''} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C-m}{\sigma} \right)^2 \right],$$

$$R_0'' = \left. \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}. \quad (10.23)$$

Для огибающей $V(t)$ суммы гармонического колебания $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и нормального квазигармонического (узкополосного) случайного процесса $\xi(t)$, имеющего нулевое среднее значение и функцию корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad (10.24)$$

получается следующая формула:

$$N_1^+(C) = N_1^-(C) = \left(\frac{-\rho_0''}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{C}{\sigma} \right) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (A_m^2 + C^2) \right] \times \\ \times I_0 \left(\frac{A_m C}{\sigma^2} \right), \quad \rho_0'' = \frac{d^2 \rho(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}, \quad C \geq 0. \quad (10.25)$$

Здесь $I_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. При $A_m = 0$ формула (10.25) определяет число выбросов огибающей $A(t)$ одного квазигармонического процесса $\xi(t)$

$$N_1^+(C) = N_1^-(C) = \left(\frac{-\rho_0''}{2\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{C}{\sigma} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sigma} \right)^2 \right], \quad C \geq 0. \quad (10.26)$$

3. Среднее число максимумов дифференцируемого процесса $\xi(t)$ на интервале $(t_0, t_0 + T)$ определяется формулой

$$N_{\max}(T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi}(t) W_2(0, \xi(t)) d\xi, \quad (10.27)$$

где $W_2(\xi(t), \ddot{\xi}(t))$ — совместная плотность вероятности для первой и второй производных процесса $\xi(t)$ в один и тот же момент времени.

Для среднего числа минимумов процесса справедлива формула

$$N_{\min}(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^{\infty} \ddot{\xi}(t) W_2(0, \xi(t)) d\xi. \quad (10.28)$$

Среднее число максимумов на интервале $(t_0, t_0 + T)$, превышающих фиксированный уровень C , равно

$$N_{\max}(H > C, T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_C^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi}(t) W_3(\xi(t), 0, \xi(t)) d\xi, \quad (10.29)$$

где $W_3(\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t))$ — совместная плотность вероятности самого процесса и его первых двух производных в один и тот же момент времени.

Применительно к стационарным процессам можно интересоваться средним числом максимумов в единицу времени. При этом из формул (10.27) и (10.29) имеем

$$N_{1 \max} = N_{\max}(1) = - \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_2(0, \xi) d\xi, \quad (10.30)$$

$$N_{1 \max}(H > C) = N_{\max}(H > C, 1) = - \int_C^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^0 \ddot{\xi} W_3(\xi, 0, \xi) d\xi. \quad (10.31)$$

Формулы (10.30) и (10.31) для нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции (10.22) принимают соответственно вид

$$N_{1 \max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_0^{(4)}}{-R_0''}}, \quad R_0^{(4)} = \frac{d^4 R(\tau)}{d\tau^4} \Big|_{\tau=0}, \quad (10.32)$$

$$N_{1 \max}(H > C) = N_{1 \max} \left[\Phi\left(-\frac{c}{v}\right) + \sqrt{1-v^2} e^{-\frac{1}{2}c^2} \Phi\left(\frac{v\sqrt{1-v^2}}{v} c\right) \right], \quad (10.33)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности,

$$c = \frac{C}{\sigma}, \quad v = \left(1 - \frac{R_0''^2}{R_0^{(4)}}\right)^{1/2}. \quad (10.34)$$

4. Средняя длительность выброса стационарного эргодического процесса $\xi(t)$ над фиксированным уровнем C вычисляется по формуле

$$\bar{\tau}(C) = \frac{1}{N_1^+(C)} \int_C^\infty W_1(\xi) d\xi. \quad (10.35)$$

Средний интервал между выбросами на уровне C равен

$$\bar{\theta}(C) = \frac{1}{N_1^+(C)} \int_{-\infty}^C W_1(\xi) d\xi. \quad (10.36)$$

Применительно к нормальному стационарному процессу со средним значением m и функцией корреляции (10.22) формулы (10.35) и (10.36) принимают вид

$$\bar{\tau}(C) = \frac{2\pi}{\sqrt{-R_0''}} [1 - \Phi(\gamma)] e^{\gamma^2/2}, \quad \gamma = \frac{C-m}{\sigma}, \quad (10.37)$$

$$\bar{\theta}(C) = \frac{2\pi}{\sqrt{-R_0''}} \Phi(\gamma) e^{\gamma^2/2}. \quad (10.38)$$

Для огибающей $A(t)$ квазигармонического процесса $\xi(t)$, имеющего функцию корреляции (10.24), справедливы следующие соотношения:

$$\bar{\tau}(C) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{-\rho_0}}, \quad \gamma = \frac{C}{\sigma} > 0, \quad (10.39)$$

$$\bar{\theta}(C) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{-\rho_0}} \left[\exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2\right) - 1 \right]. \quad (10.40)$$

Средняя длительность интервала между минимумом и следующим за ним соседним максимумом $\bar{\tau}_m$, а также между максимумом и последующим соседним минимумом $\bar{\theta}_m$ находится по формулам

$$\bar{\tau}_m = \frac{1}{N_{1 \min}} \int_0^{\infty} \omega(\xi) d\xi, \quad \bar{\theta}_m = \frac{1}{N_{1 \max}} \int_{-\infty}^0 \omega(\xi) d\xi. \quad (10.41)$$

Для нормального стационарного процесса

$$\bar{\tau}_m = \bar{\theta}_m = \pi \sqrt{\frac{-R_0''}{R_0^{(4)}}}. \quad (10.42)$$

5. В радиотехнических приложениях рассмотрение выбросов часто связывают с анализом действия полезных регулярных импульс-

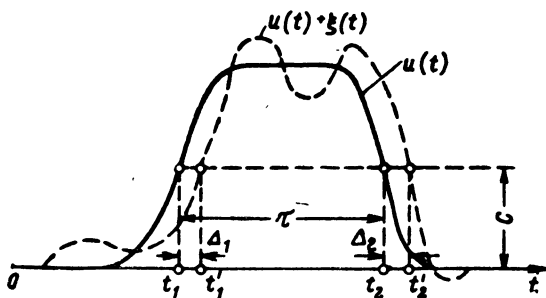


Рис. 10.4. Смещения моментов срабатывания реле из-за шума.

ных сигналов $u(t)$ совместно с помехами $\xi(t)$ на электронные реле и другие пороговые устройства. В том случае, когда детерминированный полезный сигнал складывается с «гладкими» помехами малой интенсивности, помехи вызывают случайное дрожание момента срабатывания реле и момента окончания его работы.

Пусть в отсутствие помех реле срабатывает от полезного импульса $u(t)$ в некоторый момент времени t_1 и затем через промежуток времени τ , т. е. в момент $t_2 = t_1 + \tau$, скачком возвращается в первоначальное состояние (рис. 10.4). При наличии слабых помех $\xi(t)$ эти моменты времени будут смещены на малые случайные величины Δ_1 и Δ_2 , т. е. $t'_1 = t_1 + \Delta_1$, $t'_2 = t_2 + \Delta_2$.

В линейном приближении смещения равны

$$\Delta_1 = \frac{\xi(t_1)}{s(t_1)}, \quad \Delta_2 = \frac{\xi(t_2)}{s(t_2)}, \quad (10.43)$$

где $s(t_i) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=t_i}$ — крутизна полезного импульса на уровне срабатывания C .

Если стационарный шум $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и функцию корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$, то дисперсии момента срабатывания реле и момента окончания работы равны соответственно

$$\sigma_{\Delta_1}^2 = \frac{\sigma^2}{s^2(t_1)}, \quad \sigma_{\Delta_2}^2 = \frac{\sigma^2}{s^2(t_2)}. \quad (10.44)$$

Из равенства

$$\tau' = t_2' - t_1' = \tau + (\Delta_2 - \Delta_1)$$

по известным правилам находим дисперсию длительности импульса на выходе реле

$$\sigma_{\tau'}^2 = \frac{\sigma^2}{s^2(t_1)} \left[1 - 2 \frac{s(t_1)}{s(t_2)} R(\tau) + \frac{s^2(t_1)}{s^2(t_2)} \right]. \quad (10.45)$$

§ 2. Примеры

Пример 10.1. Пусть случайный процесс $x(t)$ задан дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = n(t), \quad x(0) = x_0, \quad (10.46)$$

где $n(t)$ — белый шум с нулевым средним значением.

Вычислить среднее время первого достижения границ интервала (a, b) , причем $a < x_0 < b$.

Решение. Воспользуемся формулой (10.11). Предварительно найдем коэффициенты $K_1(x_0)$ и $K_2(x_0)$ согласно (10.5). Укажем, что при выполнении статистического усреднения в (10.5) x_0 считается фиксированной, а не случайной величиной.

Применительно к уравнению (10.46) имеем $f(x_0) = -\alpha x_0 + n(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} K_1(x_0) &= \langle f(x_0) \rangle = -\alpha x_0, \\ k(f, f_\tau) &= \langle [f(x_0) - K_1(x_0)] [f_\tau(x_0) - K_1(x_0)] \rangle = \\ &= \langle n(t) n(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau), \\ K_2(x_0) &= \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} N_0. \end{aligned}$$

Подставив найденные значения коэффициентов в (10.12), имеем

$$\varphi(z) = 2 \int \frac{K_1(z)}{K_2(z)} dz = -\frac{2\alpha z^2}{N_0} = -\frac{z^2}{2\sigma^2},$$

где $\sigma^2 = N_0/4\alpha$ — дисперсия процесса $x(t)$ в стационарном состоянии.

Теперь по формуле (10.11) находим среднее время $T_1(a, x_0, b)$ первого достижения границ интервала (a, b) точкой, первоначально находящейся в x_0 ,

$$\begin{aligned}
 T_1(a, x_0, b) &= \frac{4}{N_0} \left\{ \int_{x_0}^b e^{y^2/2\sigma^2} dy \left[\int_a^y e^{-z^2/2\sigma^2} dz \right] \int_a^{x_0} e^{s^2/2\sigma^2} ds + \right. \\
 &+ \left. \int_{x_0}^a e^{y^2/2\sigma^2} dy \left[\int_a^y e^{-z^2/2\sigma^2} dz \right] \int_{x_0}^b e^{s^2/2\sigma^2} ds \right\} \left[\int_a^b e^{y^2/2\sigma^2} dy \right]^{-1} = \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \left\{ J\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{x_0}{\sigma}\right) \int_{x_0/\sigma}^{b/\sigma} \left[\Phi(y) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] e^{y^2/2} dy + \right. \\
 &+ \left. J\left(\frac{x_0}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\right) \int_{x_0/\sigma}^{a/\sigma} \left[\Phi(y) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \right] e^{y^2/2} dy \right\} J^{-1}\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\right), \tag{10.47}
 \end{aligned}$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности,

$$J(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} e^{x^2/2} dx.$$

Рассмотрим несколько частных случаев формулы (10.47). Пусть $x_0 = 0$ и границы расположены симметрично, т. е. $a = -b$. Тогда с учетом соотношения $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ из (10.47) получим

$$T_1(-b, 0, b) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{b/\sigma} [2\Phi(y) - 1] e^{y^2/2} dy. \tag{10.47'}$$

Предположим, что $a \rightarrow -\infty$. Так как $\Phi(-\infty) = 0$ и

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} J^{-1}\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\right) J\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{x_0}{\sigma}\right) = 1,$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} J^{-1}\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\right) \int_{x_0/\sigma}^{a/\sigma} \Phi(y) e^{y^2/2} dy = 0,$$

то формула (10.47) принимает вид

$$T_1(-\infty, x_0, b) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \int_{x_0/\sigma}^{b/\sigma} \Phi(y) e^{y^2/2} dy. \tag{10.47''}$$

Пусть $b \rightarrow \infty$. Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{b \rightarrow \infty} J^{-1} \left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma} \right) J \left(\frac{x_0}{\sigma}, \frac{b}{\sigma} \right) = 1, \lim_{b \rightarrow \infty} J^{-1} \left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma} \right) \times \\ \times \int_{x_0/\sigma}^{b/\sigma} \left[\Phi(y) - \Phi \left(\frac{a}{\sigma} \right) \right] e^{y^2/2} dy = 1 - \Phi \left(\frac{a}{\sigma} \right).$$

Поэтому из (10.47) получим

$$T_1(a, x_0, \infty) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \int_{a/\sigma}^{x_0/\sigma} [1 - \Phi(y)] e^{y^2/2} dy. \quad (10.47''')$$

Пример 10.2. Требуется определить число положительных выбросов на уровне $C = 3\sigma$ во временном интервале $T = 100$ мксек нормального стационарного процесса $\xi(t)$, имеющего нулевое среднее значение ($m = 0$) и спектральную плотность

$$S(\omega) = \frac{1}{2} N_0 \left[e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{4\alpha}} \right],$$

если $f_0 = \omega_0/2\pi = 60$ МГц и энергетическая ширина спектра $\Delta f_s = 2$ МГц.

Решение. Обозначим среднее число интересующих нас выбросов через $N^+(C, T)$. Так как процесс $\xi(t)$ стационарен, то

$$N^+(C, T) = TN_1^+(C).$$

Для рассматриваемого примера среднее число положительных выбросов в единицу времени определяется формулой (10.23) при $m = 0$, т. е.

$$N_1^+(C, T) = \frac{1}{2\pi} T \sqrt{-R_0''} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sigma} \right)^2 \right].$$

Пользуясь формулой (5.18), можем написать

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

где σ^2 — дисперсия процесса $\xi(t)$, равная

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = N_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

Следовательно,

$$R_0'' = R''(0) = -\frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega.$$

Подставив сюда выражение спектральной плотности и выполнив интегрирование, получим

$$R_0'' = -(\omega_0^2 + 2\alpha).$$

Поэтому

$$N^+(C, T) = f_0 T \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{\omega_0^2}} e^{-4,5} \simeq f_0 T \left(1 + \frac{\alpha}{\omega_0^2}\right) e^{-4,5}.$$

На основании определения энергетической ширины спектра

$$\Delta f_{\text{э}} = \frac{1}{2\pi S_0} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{4\pi S_0} N_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}} d\omega \simeq \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

находим $\alpha = \pi \Delta f_{\text{э}}^2$. С учетом этого соотношения получаем окончательную расчетную формулу

$$N^+(C, T) \simeq f_0 T \left[1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta f_{\text{э}}}{f_0}\right)^2\right] e^{-4,5} = 60 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{60}\right)^2\right] e^{-4,5} \simeq 67.$$

Пример 10.3. Определить относительный уровень C/σ , при котором огибающая $A(t)$ квазигармонического процесса $\xi(t)$, имеющего постоянную и отличную от нуля спектральную плотность только при частотах $|f - f_0| \leq \Delta f/2 = 0,5 \text{ МГц}$, на интервале $T = 1000 \text{ мксек}$ превышает уровень C в среднем один раз.

Решение. Воспользовавшись формулой (10.26), можем написать

$$N^+(C, T) = T N_1^+(C) = T \sqrt{\frac{-\rho_0''}{2\pi}} \left(\frac{C}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right].$$

В данном примере

$$\rho(\tau) = \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{\pi \Delta f \tau}$$

и

$$\rho_0'' = -\frac{\pi^2}{3} \Delta f^2.$$

Поэтому

$$N^+(C, T) = \Delta f T \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{C}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right].$$

После подстановки сюда отдельных значений приходим к трансцендентному уравнению относительно C/σ

$$1 = 10^6 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{C}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

приближенное решение которого дает следующий ответ:

$$C/\sigma \simeq 4.$$

Пример 10.4. Найти среднее число максимумов в единицу времени над уровнем $C = 2\sigma$ нормального стационарного процесса с коэффициентом корреляции

$$R(\tau) = e^{-\alpha\tau}, \quad \alpha = 4\pi \Delta f_0^2.$$

Решение. Ответ на данный пример дается формулами (10.32) и (10.33). Так как $R_0'' = -2\alpha$, $R_0^{(4)} = 12\alpha^2$, то $\nu = \sqrt{2/3}$. Подставив отдельные величины в формулу (10.33), получим

$$N_{1 \max}(H > 2\sigma) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \Delta f_0 \left[\Phi\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \sqrt{\frac{1}{3}} e^{-2} \Phi\left(\sqrt{3}\right) \right] \simeq 0,256 \Delta f_0.$$

Пример 10.5. Вычислить средний интервал времени между максимумом (минимумом) и соседним минимумом (максимумом) нормального стационарного процесса с коэффициентом корреляции

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \rho(0) = 1.$$

Рассмотреть частный случай, когда $\rho(\tau) = \exp(-\pi \Delta f_0^2 \tau^2)$, причем $\Delta f_0 \ll f_0 = \omega_0/2\pi$.

Решение. Для рассматриваемого коэффициента корреляции находим

$$R_0'' = -(\omega_0^2 - \rho_0''), \quad R_0^{(4)} = \omega_0^4 - 6\omega_0^2 \rho_0'' + \rho_0^{(4)}.$$

Подставив эти величины в формулу (10.42), получим

$$\bar{\tau}_m = \bar{\theta}_m = \frac{1}{2f_0} \left(\frac{1 - \frac{\rho_0''}{\omega_0^2}}{1 - 6 \frac{\rho_0''}{\omega_0^2} + \frac{\rho_0^{(4)}}{\omega_0^4}} \right)^{1/2}. \quad (10.48)$$

Для

$$\rho(\tau) = \exp(-\pi \Delta f_0^2 \tau^2)$$

имеем

$$\rho_0'' = -2\pi \Delta f_0^2, \quad \rho_0^{(4)} = 12\pi^2 \Delta f_0^4.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_m = \bar{\theta}_m &= \frac{1}{2f_0} \left[\frac{1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta f_0}{f_0}\right)^2}{1 + \frac{3}{\pi} \left(\frac{\Delta f_0}{f_0}\right)^2 + \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{\Delta f_0}{f_0}\right)^4} \right]^{1/2} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2f_0} \left[1 - \frac{5}{4\pi} \left(\frac{\Delta f_0}{f_0}\right)^2 \right], \quad f_0 \gg \Delta f_0. \end{aligned}$$

Пример 10.6. На «безынерционное» электронное реле воздействует сумма сигнала в виде импульса гауссовой формы

$$u(t) = A_0 \exp \left[-2,8 \left(\frac{t}{\tau_{\text{н}}} \right)^2 \right]$$

и дифференцируемого флуктуационного шума с малой дисперсией $\sigma^2 = N_0 \Delta f_{\text{ш}}$.

Определить возможную наименьшую нестабильность момента срабатывания реле, обусловленную шумом.

Решение. Первая из формул (10.44) показывает, что при заданной дисперсии шума σ^2 наименьшая нестабильность момента срабатывания будет при пороге срабатывания реле, соответствующем максимальной крутизне импульса.

Из равенства $u'(t) = 0$ находим момент времени t_1 , при котором гауссов импульс имеет максимальную крутизну: $t_1 = -\tau_{\text{н}}/\sqrt{5,6}$. Максимальное значение крутизны равно

$$s(t_1) = u'(t) |_{t=t_1} = A_0 \sqrt{5,6} e^{-0,5} \frac{1}{\tau_{\text{н}}} = 1,435 A_0/\tau_{\text{н}}.$$

Подставив отдельные величины в первую формулу (10.44), находим наименьшую нестабильность момента срабатывания реле

$$\sigma_{\Delta} = \frac{\tau_{\text{н}} \sqrt{N_0 \Delta f_{\text{ш}}}}{1,435 A_0}.$$

§ 3. Задачи и ответы

10.1. Случайный процесс $x(t)$ задан дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = an(t), \quad x(0) = x_0, \quad a < x_0 < b,$$

где $n(t)$ — белый шум с нулевым средним значением.

Найти среднее время первого достижения границ a , b точкой, находящейся в x_0 при $t = 0$, и вычислить дисперсию этого времени.

Ответ [1]:

$$T_1(a, x_0, b) = \frac{2(b-x_0)(x_0-a)}{\alpha^2 N_0},$$

$$\sigma_T^2(a, x_0, b) = \frac{4}{3\alpha^4 N_0^2} \left[-2x_0^4 + 4(a+b)x_0^3 - 3(a+b)^2 x_0^2 + (a+b)^3 x_0 - ab(a^2 + b^2) \right].$$

У к а з а н и е. Для вычисления σ_T^2 нужно сначала решить дифференциальное уравнение (10.9) при краевых условиях (10.7) и затем воспользоваться формулой (10.10).

10.2. Пусть остаются в силе все другие условия задачи 10.1, за исключением того, что начальное значение x_0 случайно и равномерно распределено в интервале $(c - h, c + h)$, где $h > 0$, причем $a < c - h$, $b > c + h$.

Найти среднее время первого достижения границ интервала (a, b) .

Ответ:

$$T_1(a, b) = \frac{2}{\alpha^2 N_0} \left[-ab + c(a + b) - c^2 - \frac{1}{3} h^2 \right].$$

10.3. Сравнить аналогичные результаты решения задач 10.1 и 10.2 для случая $x_0 = c = (a + b)/2$ и дать физическое пояснение. Рассмотреть частный случай, когда $h = (b - a)/2$.

Ответ:

$$T_1(a, x_0, b) = \frac{1}{2\alpha^2 N_0} (b - a)^2 > T_1(a, b) = \frac{1}{2\alpha^2 N_0} \left[(b - a)^2 - \frac{4}{3} h^2 \right];$$

$$T_1(a, b) = \frac{(b - a)^2}{3\alpha^2 N_0} \text{ при } h = \frac{1}{2} (b - a).$$

10.4. Поведение системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = K_1 + n(t), \quad a < x(0) = x_0 < b,$$

где K_1 — постоянный коэффициент, $n(t)$ — белый шум.

Вычислить среднее время первого достижения границ a, b . Рассмотреть частный случай, когда $a = -b, x_0 = 0$.

Ответ:

$$T_1(a, x_0, b) = \frac{(b - x_0)(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x_0}) - (x_0 - a)(e^{-\lambda x_0} - e^{-\lambda b})}{K_1(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})},$$

$$\lambda = \frac{4K_1}{N_0},$$

$$T_1(-b, 0, b) = \frac{b}{K_1} th \left(\frac{1}{2} \lambda b \right).$$

10.5. На вход взаимокорреляционного приемника (рис. 10.5) в течение большого интервала времени $(0, T)$ воздействует сумма белого шума $n(t)$ и детерминированного сигнала в виде одиночного прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = A_m \sin \omega_0 t, \quad 0 < t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_{\text{и}} < T \quad (\omega_0 T \gg 1),$$

где t_0 — момент времени, соответствующий началу импульса, $\tau_{\text{и}}$ — длительность радиоимпульса.

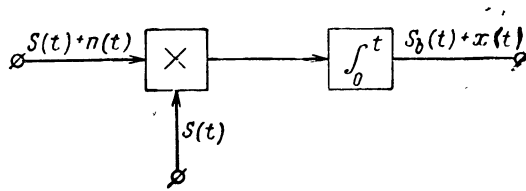


Рис. 10.5. Простейшая схема взаимокорреляционного приемника.

Нужно найти среднее время первого достижения выходным шумом

$$x(t) = \int_0^t s(\tau) n(\tau) d\tau$$

границ интервала $(-b, b)$, где b — максимальное значение выходного сигнала.

Ответ:

$$T_1(-b, 0, b) = \frac{4b^2}{A_m^2 N_0} = \frac{A_m^2 \tau_n}{N_0}, \quad b = \frac{1}{2} A_m^2 \tau_n.$$

У к а з а н и е. Рассматриваемый процесс $x = s(t)n(t)$ периодически нестационарен и не охватывается уравнением (10.1), в правую часть которого время входит только через шум $n(t)$. В данном случае коэффициент $K_1 = 0$, а коэффициент K_2 должен вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} K_2 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} s(\tau_1) s(\tau_2) \langle n(\tau_1) n(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} N_0 s^2(\tau) d\tau = \frac{1}{4} A_m^2 N_0. \end{aligned}$$

Формально это можно учесть, если в задаче 10.1 положить $\alpha = A_m/2$. Полагая затем в ответе к этой задаче $x_0 = 0$, $-a = b = A_m^2 \tau_n/2$, получим требуемый результат.

10.6. Найти среднее число положительных выбросов в единицу времени на уровне $C < A_m$ для гармонического колебания $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, начальная фаза которого случайна и распределена равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ:

$$N_1^+(C) = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad C < A_m.$$

У к а з а н и е. Так как производная по времени от процесса равна

$$\dot{s}(t) = -\omega_0 A_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \pm \omega_0 \sqrt{A_m^2 - s^2(t)},$$

то совместная плотность вероятности определяется формулой

$$W_2(s(t), \dot{s}(t)) = W_1(s)\omega(s|s) = \frac{1}{2\pi \sqrt{A_m^2 - s^2}} \left[\delta\left(\dot{s} - \omega_0 \sqrt{A_m^2 - s^2}\right) + \delta\left(\dot{s} + \omega_0 \sqrt{A_m^2 - s^2}\right) \right] \neq W_1(s)\omega(\dot{s}),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

В данном случае условие независимости (10.20) не выполняется и поэтому следует применять формулу (10.18).

10.7. Найти на интервале T дисперсию числа нулей $\sigma_n^2(T)$ гармонического колебания $s(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$, у которого случайная начальная фаза распределена равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответ [1]:

$$\sigma_n^2(T) = (2f_0 T - [2f_0 T]) (1 - 2f_0 T + [2f_0 T]),$$

где $[2f_0 T]$ — целая часть числа $2f_0 T$.

10.8. Получить явные выражения $N_1^+(C)$ для нормальных стационарных процессов с нулевыми средними значениями, одинаковыми дисперсиями и тремя разными коэффициентами корреляции

$$R_1(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|}, \quad R_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}, \quad R_3(\tau) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega\tau\right)}{\frac{1}{2}\Delta\omega\tau}.$$

Сравнить полученные результаты при одном и том же значении уровня C и одинаковой энергетической полосе спектров Δf_0 .

Ответ:

$$N_{1,1}^+(C) = \frac{2}{\pi} \Delta f_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right] = 0,63662 \Delta f_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$N_{1,2}^+(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta f_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right] = 0,38894 \Delta f_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$N_{1,3}^+(C) = \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta f_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right] = 0,28867 \Delta f_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$N_{1,1}^+(C) > N_{1,2}^+(C) > N_{1,3}^+(C).$$

10.9. Даны два нормальных стационарных узкополосных процесса с корреляционными функциями

$$k_1(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right),$$

$$k_2(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Какой из двух процессов является дифференцируемым? Вычислить для него среднее число положительных выбросов $N_1^+(C)$.

Ответ: первый процесс дифференцируем, второй — нет;

$$N_1^+(C) \simeq f_0 \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\Delta f_0}{f_0} \right)^2 \right]^{1/2} \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad \Delta f_0 \simeq \frac{1}{2} \alpha.$$

10.10. Найти среднее значение полного числа пересечений $N_1(C)$ уровня C для суммы

$$\eta(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t),$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два независимых нормальных стационарных дифференцируемых процесса, имеющих нулевые средние значения и функции автокорреляции

$$k_1(\tau) = \sigma_1^2 R_1(\tau), \quad k_2(\tau) = \sigma_2^2 R_2(\tau).$$

Ответ:

$$N_1(C) = \frac{1}{\pi} \left(- \frac{\sigma_1^2 R''_{10} + \sigma_2^2 R''_{20}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{C^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right],$$

$$R''_{i0} = \left. \frac{d^2 R_i(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

10.11. Решить задачу 10.10 для случая, когда

$$\eta(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t).$$

Ответ:

$$N_1(C) = \frac{1}{\pi} \left(- \frac{\sigma_1^2 R''_{10} + \sigma_2^2 R''_{20}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{C^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right].$$

10.12. В задаче 10.10 найти среднее число «положительных» нулей $N_1^+(0)$ процесса $\eta(t)$, когда

$$k_1(\tau) = \sigma_1^2 \rho_1(\tau) \cos \omega_1 \tau, \quad k_2(\tau) = \sigma_2^2 \rho_2(\tau) \cos \omega_2 \tau, \quad \rho_1(0) = \rho_2(0) = 1.$$

Ответ:

$$N_1^+(0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sigma_1^2 (\omega_1^2 - \rho''_{10}) + \sigma_2^2 (\omega_2^2 - \rho''_{20})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right]^{1/2},$$

$$\rho''_{i0} = \left. \frac{d^2 \rho_i(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

10.13. Требуется найти на интервале $(t_0, t_0 + T)$ среднее число превышений уровня C суммой нормального стационарного

процесса $\xi(t)$ и прямой линии $a(t) = a_0 + a_1 t$, где a_0 и a_1 — постоянные коэффициенты. Процесс $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и дважды дифференцируемую функцию корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ:

$$N^+(C, T) = \left[\frac{\sigma}{a_1} \sqrt{\frac{-R_0''}{2\pi}} \exp\left(\frac{a_1^2}{2\sigma^2 R_0''}\right) + \Phi\left(\frac{a_1}{\sigma \sqrt{-R_0''}}\right) \right] \times \\ \times \left[\Phi\left(\frac{C - a_0 - a_1 t_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{C - a_0 - a_1(t_0 + T)}{\sigma}\right) \right],$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

У к а з а н и е. Нужно предварительно найти совместную плотность вероятности $W_2(\eta(t), \dot{\eta}(t))$ для нормального нестационарного процесса $\eta(t) = a_0 + a_1 t + \xi(t)$ и его производной $\dot{\eta}(t) = a_1 + \dot{\xi}(t)$, а затем следует воспользоваться формулой (10.16).

10.14. Вычислить среднее число нулей на интервале $[0, mT_0]$, где m — целое положительное число, для периодически нестационарного нормального процесса

$$\eta(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t, \quad T_0 = 2\pi/\omega_0.$$

Здесь $\xi(t)$ — нормальный стационарный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ:

$$N(0, mT_0) = \frac{mT_0}{\pi} \left(\omega_0 + \sqrt{-R_0''} \right).$$

10.15. Найти среднее число нулей в единицу времени $N_1(0)$ процесса $\eta(t) = \xi_1(t)\xi_2(t)$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два нормальных стационарных независимых дифференцируемых процесса с нулевыми средними значениями и автокорреляционными функциями

$$k_1(\tau) = \sigma_1^2 R_1(\tau), \quad k_2(\tau) = \sigma_2^2 R_2(\tau).$$

Ответ:

$$N_1(0) = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{-R_{10}''} + \sqrt{-R_{20}''} \right), \quad R_{i0}'' = \left. \frac{d^2 R_i(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

У к а з а н и е. Поскольку независимые процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ дифференцируемы, то их реализации представляют собой плавно изменяющиеся функции времени. Вероятность совпадения нулей двух таких функций практически равна нулю. Поэтому число нулей произведения двух функций равно сумме чисел нулей каждой из перемножаемых функций.

10.16. Вычислить среднее число выбросов $N_1^+(C)$ квадрата стационарного случайного процесса $\xi(t)$, имеющего нулевое среднее значение и функцию корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ:

$$N_1^+(C) = \frac{1}{\pi} \sqrt{-R_0''} \exp(-C/2\sigma^2), \quad C \geq 0.$$

10.17. Найти среднее число выбросов $N_1^+(C)$ случайного процесса $\eta(t) = \sqrt{\xi^2(t)} = |\xi(t)|$, если нормальный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ:

$$N_1^+(C) = \frac{1}{\pi} \sqrt{-R_0''} \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad C \geq 0.$$

10.18. Получить выражение $N_1^+(C)$ для стационарного процесса

$$\eta(t) = \sqrt{\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)},$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два независимых нормальных стационарных процесса с нулевыми средними значениями и одинаковыми автокорреляционными функциями

$$k_1(\tau) = k_2(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Ответ:

$$N_1^+(C) = \sqrt{\frac{-R_0''}{2\pi}} \left(\frac{C}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sigma}\right)^2\right], \quad C \geq 0.$$

10.19. Имеется линейный фильтр (рис. 10.6), согласованный с детерминированным импульсом гауссовой формы

$$s(t) = A_0 \exp\left[-2,8 \left(\frac{t - \tau_0}{\tau_n}\right)^2\right], \quad 0 < \tau_0 < T, \quad T \gg \tau_n,$$

где τ_0 — момент времени, соответствующий середине импульса; τ_n — длительность импульса на уровне 0,5; T — интервал наблюдения.

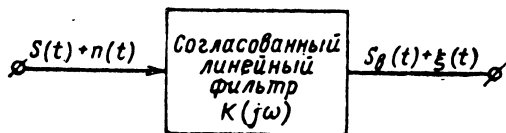


Рис. 10.6. Воздействие суммы сигнала и белого шума на согласованный фильтр.

Функция передачи согласованного фильтра имеет вид

$$K(j\omega) = A_0 \tau_n \sqrt{\frac{\pi}{2,8}} \exp \left[-\frac{(\omega \tau_n)^2}{11,2} - j\omega (t_0 - \tau_0) \right],$$

где t_0 — момент времени, соответствующий наибольшему значению выходного сигнала $s_{\text{max}} = s_0(t_0) = E = A_0^2 \tau_n \sqrt{\pi/5,6}$.

Найти среднее число положительных выбросов $N^+(C, T)$ выходного шума $\xi(t)$ на уровне C , равном наибольшему значению выходного сигнала.

Ответ:

$$N^+(C, T) = \frac{\sqrt{0,7}}{\pi} \left(\frac{T}{\tau_n} \right) \exp \left(-\frac{E}{N_0} \right).$$

10.20. Получить явные выражения $N_1^+(C)$ для нормальных стационарных узкополосных процессов с нулевыми средними значениями, одинаковыми дисперсиями и тремя разными коэффициентами корреляции

$$R_1(\tau) = (1 + \alpha |\tau|) e^{-\alpha |\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad R_2(\tau) = e^{-\alpha \tau^2} \cos \omega_0 \tau,$$

$$R_3(\tau) = \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \Delta \omega \tau \right)}{\frac{1}{2} \Delta \omega} \cos \omega_0 \tau.$$

Сравнить полученные результаты при одном и том же значении уровня C и одинаковой энергетической полосе спектров Δf_3 .

Ответ:

$$N_{1,1}^+(C) \simeq f_0 \left[1 + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\Delta f_3}{f_0} \right)^2 \right] \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad f_0 = \omega_0/2\pi,$$

$$N_{1,2}^+(C) \simeq f_0 \left[1 + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta f_3}{f_0} \right)^2 \right] \exp(-C^2/2\sigma^2),$$

$$N_{1,3}^+(C) \simeq f_0 \left[1 + \frac{1}{24} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 \right] \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad \Delta f = \Delta \omega/2\pi.$$

$$N_{1,1}^+(C) > N_{1,2}^+(C) > N_{1,3}^+(C).$$

10.21. Получить формулу для среднего числа положительных выбросов в единицу времени на уровне C нормального стационарного процесса с функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \gamma(\tau)], \quad \rho(0) = 1.$$

Ответ:

$$N_1^+(C) = \frac{\omega_0}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{\gamma_0'}{\omega_0} \right)^2 - \frac{\rho_0''}{\omega_0^2} \right]^{1/2} \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad \gamma_0' = \left. \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}.$$

10.22. Определить среднее число выбросов $N^+(C, T)$ огибающей $A(t)$ квазигармонического шума, спектральная плотность которого постоянна в интервале частот $|f - f_0| \leq \Delta f/2$ и равна нулю вне этого интервала. Рассмотреть случай, когда $T = 1000$ мксек, $\Delta f = 1$ МГц и $C = 3\sigma$.

Ответ:

$$N^+(C, T) = TN_1^+(C) = T\Delta f \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{C}{\sigma}\right) \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad C > 0,$$

$$N^+(3\sigma, 10^{-3}) \simeq 24 \text{ 1/сек.}$$

10.23. На вход системы, представленной на рис. 10.7, воздействует белый шум $n(t)$, односторонняя спектральная плотность которого равна $S_n(f) = N_0, f \geq 0$.

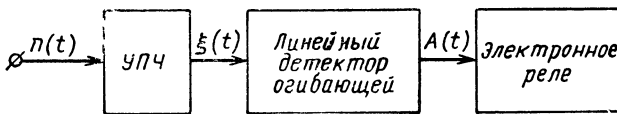


Рис. 10.7. Простейшая схема амплитудного радиоприемника с электронным реле.

Определить число срабатываний «безынерционного» электронного реле от шумовых выбросов при порогах срабатывания $C_1 = 2\sigma$ и $C_2 = 3\sigma$ за время $T = 1000$ мксек, если квадрат частотной характеристики усилителя промежуточной частоты (УПЧ) имеет вид

$$K^2(f) = K_0 \exp\left[-2,8 \left(\frac{f-f_0}{\Delta f}\right)^2\right], \quad \Delta f \ll f_0,$$

где f_0 — резонансная частота; Δf — полоса пропускания УПЧ на уровне 0,5. Вычисления выполнить для $\Delta f = 2$ МГц.

Ответ:

$$N^+(C, T) = TN_1^+(C) = T\Delta f_0 \frac{C}{\sigma} \exp(-C^2/2\sigma^2), \quad \Delta f_0 = \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{2,8}}.$$

$$N^+(2\sigma, 10^{-3}) \simeq 540 \text{ 1/сек, } N^+(3\sigma, 10^{-3}) \simeq 66 \text{ 1/сек.}$$

У к а з а н и е. На выходе линейного детектора огибающей воспроизводится огибающая $A(t)$ квазигармонического шума $\xi(t)$, воздействующего на входе детектора.

10.24. Пусть на схему рис. 10.7 воздействует сумма гармонического сигнала $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и квазигармонического шума $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\pi \Delta f_s^2 \tau^2) \cos \omega_0 \tau.$$

Найти среднее число срабатываний реле за фиксированное время T при пороге срабатывания реле $C = 3\sigma$, если отношение сигнал/шум $a = A_m/\sigma = 2$.

Ответ:

$$N^+(C, T) = TN_1^+(C) = T \Delta f_0 \frac{C}{\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{C^2}{\sigma^2} \right) \right] I_0 \left(a \frac{C}{\sigma} \right) \simeq \\ \simeq 0,3T \Delta f_0.$$

У к а з а н и е. На выходе линейного детектора огибающей воспроизводится огибающая $V(t)$ суммы сигнала и шума.

10.25. Решить задачу 10.24 для случая, когда функция корреляции шума $\xi(t)$ имеет вид

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{\pi \Delta f \tau} \cos \omega_0 \tau$$

и сравнить ответы.

Ответ:

$$N^+(C, T) = T \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{C}{\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{C^2}{\sigma^2} \right) \right] I_0 \left(a \frac{C}{\sigma} \right) \simeq 0,22T \Delta f.$$

10.26. Вычислить средние числа максимумов в единицу времени $N_{1\max}$ нормальных стационарных процессов с коэффициентами корреляции

$$R_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}, \quad R_3(\tau) = \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{\pi \Delta f \tau}.$$

Сравнить полученные результаты при одинаковой энергетической полосе спектров.

Ответ:

$$N_{1,2\max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{6\alpha} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \Delta f_0 = 1,382 \Delta f_0,$$

$$N_{1,3\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} \Delta f = 0,387 \Delta f_0 < N_{1,2\max}.$$

10.27. Для процессов, указанных в задаче 10.26, вычислить средний временной интервал между максимумом (минимумом) и соседним минимумом (максимумом).

Ответ:

$$\bar{\tau}_{2m} = \pi / \sqrt{6\alpha} = \frac{1}{2\Delta f_0} \sqrt{\frac{\pi}{6}} = 0,362 / \Delta f_0,$$

$$\bar{\tau}_{3m} = \frac{1}{\Delta f} \sqrt{\frac{5}{3}} = 1,292 / \Delta f > \bar{\tau}_{2m}, \quad \Delta f = \Delta f_0.$$

10.28. Найти среднее число максимумов в единицу времени $N_{1\max}$ нормального стационарного процесса с коэффициентом корреляции

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \rho(0) = 1.$$

Ответ:

$$N_{1 \max} = f_0 \left(\frac{1 - 6 \frac{\rho_0''}{\omega_0^2} + \frac{\rho_0^{(4)}}{\omega_0^4}}{1 - \frac{\rho_0''}{\omega_0^2}} \right)^{1/2}, \quad f_0 = \omega_0/2\pi.$$

10.29. Решить задачу 10.28 для коэффициента корреляции

$$R(\tau) = \frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{\pi\Delta f\tau} \cos \omega_0\tau,$$

считая $\Delta f \ll f_0 = \omega_0/2\pi$.

Ответ:

$$N_{1 \max} = f_0 \left[\frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 + \frac{1}{90} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^4}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2} \right]^{1/2} \approx f_0 \left[1 + \frac{5}{24} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 \right].$$

10.30. Решить задачу 10.28 для коэффициента корреляции

$$R(\tau) = \exp(-\pi\Delta f_s^2\tau^2) \cos \omega_0\tau, \quad \Delta f_s \ll f_0 = \omega_0/2\pi.$$

Ответ:

$$N_{1 \max} = f_0 \left[\frac{1 + \frac{3}{\pi} \left(\frac{\Delta f_s}{f_0} \right)^2 + \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{\Delta f_s}{f_0} \right)^4}{1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta f_s}{f_0} \right)^2} \right]^{1/2} \approx f_0 \left[1 + \frac{5}{4\pi} \left(\frac{\Delta f_s}{f_0} \right)^2 \right].$$

10.31. Выразить через энергетическую ширину спектра Δf_n среднее время между двумя соседними положительными выбросами на уровне C для нормальных стационарных процессов с нулевыми средними значениями и коэффициентами корреляции

$$R_1(\tau) = (1 + \alpha|\tau|) e^{-\alpha|\tau|}, \quad R_2(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}, \\ R_3(\tau) = \frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{\pi\Delta f\tau}.$$

Сопоставить полученные ответы с результатами решения задачи 10.8.

Ответ:

$$\bar{\tau}_1(C) = \frac{\pi}{4\Delta f_n} \left[1 - \Phi \left(\frac{C}{\sigma} \right) \right] \exp(C^2/2\sigma^2),$$

$$\bar{\tau}_2(C) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta f_n} \left[1 - \Phi \left(\frac{C}{\sigma} \right) \right] \exp(C^2/2\sigma^2),$$

$$\bar{\tau}_3(C) = \frac{2\sqrt{3}}{\Delta f} \left[1 - \Phi \left(\frac{C}{\sigma} \right) \right] \exp(C^2/2\sigma^2).$$

10.32. Для нормальных процессов, указанных в задаче 10.31, найти средний интервал времени между соседними нулями.

Ответ:

$$\frac{1}{2} \bar{\tau}_1(0) = \frac{\pi}{8\Delta f_3} = 0,3927/\Delta f_3, \quad \frac{1}{2} \bar{\tau}_2(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\Delta f_3} = 0,6267/\Delta f_3,$$

$$\frac{1}{2} \bar{\tau}_3(0) = \frac{\sqrt{3}}{\Delta f} = 1,732/\Delta f.$$

10.33. Определить средний интервал между положительными выбросами на уровне C нормального стационарного процесса с нулевым средним значением и коэффициентом корреляции

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \omega_0^2 \gg -\rho_0'', \quad \rho(0) = 1.$$

Ответ:

$$\bar{\tau}(C) \simeq \frac{1}{f_0} \left(1 + \frac{\rho_0''}{2\omega_0^2} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{C}{\sigma} \right) \right] \exp(C^2/2\sigma^2).$$

10.34. Пользуясь ответом к задаче 10.33, определить средний интервал между соседними нулями процессов с функциями корреляции

$$R_2(\tau) = \exp(-\pi\Delta f_3^2 \tau^2) \cos \omega_0 \tau,$$

$$R_3(\tau) = \frac{\sin(\pi\Delta f_3 \tau)}{\pi\Delta f_3 \tau} \cos \omega_0 \tau.$$

Ответ:

$$\frac{1}{2} \bar{\tau}_2(0) \simeq \frac{1}{2f_0} \left[1 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta f_3}{f_0} \right)^2 \right], \quad \frac{1}{2} \bar{\tau}_3(0) \simeq \frac{1}{2f_0} \left[1 - \frac{1}{24} \left(\frac{\Delta f_3}{f_0} \right)^2 \right].$$

10.35. Определить средний интервал между соседними положительными и отрицательными выбросами огибающей $A(t)$ на некотором уровне $C > 0$ для нормальных стационарных процессов с коэффициентами корреляции, указанными в задаче 10.34.

Ответ:

$$\bar{\tau}_2(C) = \frac{1}{\Delta f_3} \left(\frac{\sigma}{C} \right), \quad \bar{\tau}_3(C) = \frac{1}{\Delta f_3} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(\frac{\sigma}{C} \right),$$

$$\bar{\theta}_2(C) = \frac{1}{\Delta f_3} \left(\frac{\sigma}{C} \right) [\exp(C^2/2\sigma^2) - 1],$$

$$\bar{\theta}_3(C) = \frac{1}{\Delta f_3} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(\frac{\sigma}{C} \right) [\exp(C^2/2\sigma^2) - 1].$$

10.36. Найти наибольшую точность определения положения τ_0 центра видеопульса гауссовой формы (рис. 10.8)

$$u(t) = A_0 \exp \left[-2,8 \left(\frac{t - \tau_0}{\tau_{\text{н}}} \right)^2 \right],$$

где τ_n — известная длительность импульса на уровне 0,5, в двух случаях: 1) для определения τ_0 используется пороговое устройство, реагирующее только на передний фронт импульса, и 2) момент τ_0 определяется пороговым устройством, реагирующим как на передний, так и на задний фронт импульса.

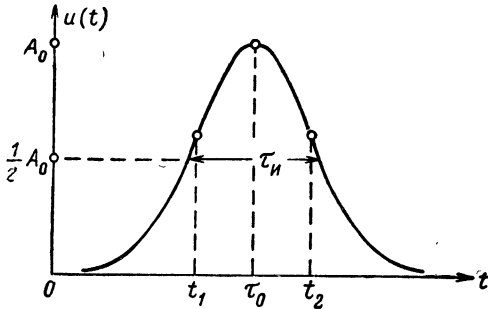


Рис. 10.8. Видеоимпульс гауссовой формы.

Указанный импульс принимается на фоне аддитивного флуктуационного шума малой интенсивности с функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\pi}{4} \Delta f_s^2 \tau^2\right), \quad \Delta f_s \approx 1/\tau_n.$$

Ответ:

$$1) \sigma_{\tau_0} = \frac{\sigma \tau_n}{1,435 A_0};$$

$$2) \sigma_{\tau_0} = \frac{\sigma \tau_n}{1,435 \sqrt{2} A_0} \sqrt{1 + \exp(-\pi \Delta f_s^2 \tau_n^2 / 5,6)} \approx \frac{0,886 \sigma \tau_n}{1,435 A_0}.$$

У к а з а н и е. Рассматриваемый гауссов видеоимпульс имеет максимальную крутизну фронтов $u'_{\max}(t_{1,2}) = \pm A_0 \sqrt{5,6} e^{-0,5/\tau_n}$ в точках $t_{1,2} = \tau_0 \pm \tau_n / \sqrt{5,6}$, отстоящих друг от друга на $\tau = \tau_n / \sqrt{1,4}$. Пороговые устройства должны иметь порог срабатывания $C = A_0 e^{-0,5}$. Центр импульса во втором случае определяется из равенства

$$\tau_0 = (t_1 + t_2)/2.$$

10.37. Определить временную нестабильность положения какого-либо нуля суммы гармонического колебания $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и плавно изменяющегося флуктуационного шума с нулевым средним значением и малой дисперсией $\sigma^2 \ll A_m^2$.

Ответ:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\omega_0 A_m}.$$

10.38. Найти плотность вероятности временного интервала τ между соседними нулями суммы гармонического колебания $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и нормального стационарного шума (малой интенсивности) с нулевым средним значением и дифференцируемой функцией корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$.

Ответ:

$$P_0(\tau) = \frac{a\omega_0}{2\sqrt{\pi} \left[1 + R\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\pi^2 a^2 \left(\frac{\omega_0 \tau}{\pi} - 1\right)^2}{4 \left[1 + R\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)\right]}\right\},$$

$$a = A_m / \sigma.$$

У к а з а н и е. Как следует из (10.43), в линейном приближении плотность вероятности интервала времени между соседними нулями будет нормальной. При этом среднее значение интервала, очевидно, равно π/ω_0 , а для вычисления дисперсии нужно воспользоваться формулой (10.45).

Л и т е р а т у р а

1. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. Изд-во «Наука», 1970.

ТЕОРИЯ
ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ11. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ
СИГНАЛОВ

§ 1. Теоретические сведения

При рассмотрении помехоустойчивости различных радиотехнических систем следует различать две группы задач.

1. Заданы статистические характеристики сигналов и помех и структурная схема приемного устройства. Требуется определить количественные характеристики помехоустойчивости приема данных сигналов данным приемником.

2. Заданы статистические характеристики сигналов и помех и характер их взаимодействия. Требуется определить структуру устройства, осуществляющего оптимальную, по определенному критерию, обработку смеси сигнала и шума, и вычислить соответствующие количественные характеристики помехоустойчивости оптимального приема данных сигналов.

Задачи первой группы по существу сводятся к анализу воздействия на данное радиотехническое устройство заданной смеси сигнала и шума. Конечной целью анализа является вычисление статистических характеристик случайных процессов на выходе приемника, необходимых для последующего определения требуемых количественных характеристик помехоустойчивости. Задачи этой группы решаются рассмотренными в предыдущих главах методами анализа воздействия случайных процессов на линейные и нелинейные звенья радиотехнических устройств.

Для решения задач второй группы необходимо использовать аппарат теории статистических решений [1—12]. Основные результаты этой теории для рассматриваемого случая обнаружения и различения сигналов приводятся ниже.

Предположим, что на вход приемного устройства поступает смесь сигнала и шума

$$x(t) = f[s(t), \xi(t)], \quad (11.1)$$

где $s(t)$ — полезный сигнал; $\xi(t)$ — помеха. Функция $f[s, \xi]$, т. е. характер взаимодействия сигнала и помехи, а также статистические характеристики шума $\xi(t)$ и сигнала $s(t)$ предполагаются известными.

Применительно к случаю различения m сигналов, принимаемых на фоне помех, входящий в (11.1) сигнал $s(t)$ можно представить в виде суммы

$$s(t) = s(t, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_k^{(i)}), \quad (11.2)$$

где λ_i — параметр, определяющий, какой из сигналов $s_i(t) = s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_k^{(i)})$ присутствует на входе приемника в данный момент времени; $l_k^{(i)}$ — параметр сигнала $s_i(t)$. Параметр λ_i представляет собой случайную величину, принимающую на интервале наблюдения $[0, T]$ значения $\lambda_i = \lambda_{i0} = 0$, либо $\lambda_i = \lambda_{i1} = 1$, причем, если $\lambda_i = \lambda_{i1} = 1$, то все остальные входящие в (11.2) параметры λ_j с индексами $j \neq i$ равны $\lambda_j = \lambda_{j0} = 0$. Приемник, осуществляющий различение m сигналов, должен определить, какой из коэффициентов λ_i равен единице, т. е. какой из сигналов $s_i(t)$ присутствует в принятом колебании $x(t)$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь случая различения двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, принимаемых на фоне помех. При этом сигнал (11.2) может быть представлен в виде

$$s(t) = s(t, \lambda) = \lambda s_1(t, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_k^{(1)}) + (1 - \lambda) s_2(t, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \dots, l_k^{(2)}). \quad (11.3)$$

Здесь λ — параметр, случайным образом принимающий два значения: $\lambda = \lambda_1 = 1$, что соответствует наличию в принятой реализации $x(t)$ сигнала $s_1(t)$, или $\lambda = \lambda_0 = 0$, когда в реализации $x(t)$ присутствует сигнал $s_2(t)$. Представление сигнала $s(t)$ в форме (11.3) характерно для различных систем передачи двоичной информации, широко используемых в связи, телеметрии, телеуправлении и т. п.

Применительно к случаю обнаружения сигнал $s(t)$ представляется в виде

$$s(t) = s(t, \lambda) = \lambda s_1(t, l_1, l_2, \dots, l_k). \quad (11.4)$$

Значение параметра $\lambda = \lambda_1 = 1$ соответствует наличию на входе приемника смеси сигнала и шума, $\lambda = \lambda_0 = 0$ означает, что на входе приемника имеется только шум. Приемник, предназначенный для обнаружения сигналов, должен определить, какое значение на данном интервале наблюдения $[0, T]$ имеет параметр λ , т. е. должен решить, представляет ли принимаемое колебание $x(t)$ только шум или смесь сигнала и шума.

В соответствии с теорией статистических решений принятие гипотезы $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_0$ должно основываться на результатах анализа отношения правдоподобия. При дискретной обработке ре-

лизации $x(t)$ это отношение имеет вид

$$\Lambda [x(t)] = \frac{W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_1)}{W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_0)}, \quad (11.5)$$

где $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_1)$ и $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_0)$ — n -мерные плотности вероятностей выборок $x_k = x(t_k)$ процесса $x(t)$ соответственно при гипотезах $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_0$. Рассматриваемая как функция параметра λ , условная плотность вероятности $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda)$ обозначается через $L(\lambda)$ и называется функцией правдоподобия. В случае непрерывной обработки реализации $x(t)$ отношение правдоподобия

$$\Lambda [x(t)] = \frac{F[x(t) | \lambda_1]}{F[x(t) | \lambda_0]}, \quad (11.6)$$

где $F[x(t) | \lambda]$ — так называемый функционал плотности вероятности

$$F[x(t) | \lambda] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda). \quad (11.7)$$

Здесь Δ — временной интервал $\Delta = t_{k+1} - t_k$ между соседними выборками $x_k = x(t_k, \lambda)$ и $x_{k+1} = x(t_{k+1}, \lambda)$. Рассматриваемый как функция от параметра λ , он называется функционалом правдоподобия и обозначается через $F(\lambda)$.

Следует отметить, что конечный предел, определяемый соотношением (11.7), не существует. Можно показать [7], что в правую часть равенства (11.7) входит множитель $k = k(\Delta)$, не зависящий от выборки x_1, x_2, \dots, x_n , но зависящий от Δ так, что при $\Delta \rightarrow 0$ множитель $k \rightarrow \infty$. Однако в результате того, что неопределенный множитель k не зависит от x_1, x_2, \dots, x_n , имеется возможность вычислить конечный предел отношения (11.5):

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \frac{W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_1)}{W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_0)} = \frac{F[x(t) | \lambda_1]}{F[x(t) | \lambda_0]}. \quad (11.8)$$

Наиболее просто функции правдоподобия $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda) = L(\lambda)$ вычисляются в том случае, когда $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь сигнала $s(t, \lambda)$, зависящего только от одного случайного параметра λ , и шума $\xi(t)$:

$$x(t) = s(t, \lambda) + \xi(t). \quad (11.9)$$

В этом случае [7]

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda) = L(\lambda) = W_{n\xi} [x_1 - s_1(\lambda), x_2 - s_2(\lambda), \dots, x_n - s_n(\lambda)], \quad (11.10)$$

где $W_{n\xi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — n -мерная плотность вероятности шума $\xi(t)$; $x_k = x(t_k)$; $s_k(\lambda) = s(t_k, \lambda)$.

Переходя в (11.10) к пределу при $\Delta = t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$, получаем

$$F[x(t) | \lambda] = F(\lambda) = F_\xi [x(t) - s(t, \lambda)]. \quad (11.11)$$

В более общем случае полезный сигнал может зависеть не только от параметра λ , называемого существенным, но и от ряда несущественных случайных параметров l_1, l_2, \dots, l_k . При этих условиях и функционал плотности вероятности $F_\xi[x(t) - s(t, \lambda, l_1, l_2, \dots, l_k)]$ оказывается зависящим от несущественных случайных параметров и для определения функционала правдоподобия $F[x(t) | \lambda]$ требуется его усреднение по несущественным параметрам:

$$F[x(t) | \lambda] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi[x(t) - s(t, \lambda, l_1, l_2, \dots, l_k)] W_k(l_1, l_2, \dots, l_k) dl_1 dl_2 \dots dl_k. \quad (11.11a)$$

Здесь $W_k(l_1, l_2, \dots, l_k)$ — совместная плотность вероятности несущественных параметров l_1, l_2, \dots, l_k . Если $\xi(t)$ представляет собой нормальный случайный процесс с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции $k_\xi(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle$, то его n -мерная плотность вероятности определяется формулой

$$W_{n\xi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n D_{\mu\nu} \frac{\xi_\mu}{\sigma_\mu} \frac{\xi_\nu}{\sigma_\nu} \right\}. \quad (11.12)$$

Здесь $\sigma_i^2 = \langle \xi_i^2 \rangle$ — дисперсия случайной величины $\xi_i = \xi(t_i)$; D — определитель n -го порядка, составленный из коэффициентов корреляции $R_{\mu\nu} = R(t_\mu, t_\nu) = \langle \xi_\mu \xi_\nu \rangle / \sigma_\mu \sigma_\nu$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

$D_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $R_{\mu\nu}$ определителя D . Переходя в (11.12) к пределу при $\Delta = t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$, получим следующее выражение для функционала плотности вероятности нормального случайного процесса $\xi(t)$:

$$F_\xi[\xi(t)] = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \xi(t_1) \xi(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\}, \quad (11.13)$$

где $\theta(t_1, t_2)$ определяется интегральным уравнением

$$\int_0^T K_\xi(t_1, \tau) \theta(\tau, t_2) d\tau = \delta(t_2 - t_1). \quad (11.14)$$

Иногда удобно преобразовать (11.13), введя функцию

$$\varphi(t) = \int_0^T x(t_1) \theta(t, t_1) dt_1. \quad (11.14a)$$

При этом получим

$$F_{\xi} [\xi(t)] = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \xi(t) \varphi(t) dt \right\}, \quad (11.13a)$$

где функция $\varphi(t)$, как это следует из (11.14) и (11.14a), удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^T K_{\xi}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \xi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.14б)$$

Предположим, что $\xi(t)$ представляет собой нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1). \quad (11.15)$$

Подставляя (11.15) в (11.14б), находим, что

$$\varphi(t) = \frac{2}{N_0} \xi(t),$$

в соответствии с чем для функционала плотности вероятности белого шума получаем следующее выражение:

$$F_{\xi} [\xi(t)] = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt \right\}. \quad (11.16)$$

Аналогичным образом находится функционал плотности вероятности для нормального процесса $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha |t_2 - t_1|}. \quad (11.17)$$

В этом случае [7]

$$F_{\xi} [\xi(t)] = k \cdot \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4\sigma^2} \left[\int_0^T \xi^2(t) dt + \int_0^T \left(\frac{\dot{\xi}(t)}{\alpha} \right)^2 dt \right] + \frac{1}{4\sigma^2} [\xi^2(0) + \xi^2(T)] \right\}. \quad (11.18)$$

Для нормального процесса $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha |t_2 - t_1|} \left[\cos \omega_1 (t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 |t_2 - t_1| \right] \quad (11.19)$$

имеем [7]

$$F_{\xi} [\xi(t)] = k \cdot \exp \left[-\frac{1}{4\sigma^2 \alpha_0 \omega_0^2} \left\{ \int_0^T [\ddot{\xi}(t)]^2 dt + \alpha_0^2 \int_0^T [\dot{\xi}(t)]^2 dt + \omega_0^4 \int_0^T \xi^2(t) dt + 2\omega_0^2 \int_0^T \xi(t) \ddot{\xi}(t) dt + \alpha_0 \omega_0^2 [\xi^2(0) + \xi^2(T)] + \right. \right.$$

$$+ \alpha_0 [\xi^2(0) + \xi^2(T)] \Bigg\}, \quad (11.20)$$

где

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 + \alpha^2; \quad \alpha_0 = 2\alpha_1.$$

Если в результате дискретной обработки принятой реализации $x(t)$ окажется, что отношение правдоподобия (11.5) превышает некоторую величину C , т. е.

$$\Lambda [x(t)] = \frac{W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_1)}{W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_0)} = \frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_0)} > C, \quad (11.21)$$

принимается решение $\lambda = \lambda_1$. В противном случае принимается $\lambda = \lambda_0$.

Принятие решения означает разбиение всей области изменения выборок x_1, x_2, \dots, x_n , обозначаемой через Γ , на две области Γ_1 и Γ_0 . При попадании принятой выборки x_1, x_2, \dots, x_n в область Γ_0 принимается решение $\lambda = \lambda_0$, а при попадании x_1, x_2, \dots, x_n в область Γ_1 принимается решение $\lambda = \lambda_1$. Так как $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_1)$ и $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_0)$ определены во всей области Γ , всегда имеется вероятность того, что при $\lambda = \lambda_0$ выборка x_1, x_2, \dots, x_n попадает в область Γ_1 , или, наоборот, при $\lambda = \lambda_1$ выборка x_1, x_2, \dots, x_n попадает в область Γ_0 . Таким образом, при приеме реализации $x(t)$ всегда имеется вероятность принять ошибочное решение $\lambda = \lambda_1$, тогда как в действительности $\lambda = \lambda_0$, и наоборот. Эти условные вероятности называются соответственно вероятностями ложной тревоги F_1 и ложного отбоя F_0 и определяются соотношениями

$$F_1 = P(\lambda_1 | \lambda_0) = \int_{\Gamma_1} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_0) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (11.22)$$

$$F_0 = P(\lambda_0 | \lambda_1) = \int_{\Gamma_0} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (11.23)$$

Вероятности принятия правильных решений $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_0$ называются мощностью решения и обозначаются соответственно через D_1 и D_0 :

$$D_1 = P(\lambda_1 | \lambda_1) = \int_{\Gamma_1} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (11.24)$$

$$D_0 = P(\lambda_0 | \lambda_0) = \int_{\Gamma_0} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda_0) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (11.25)$$

Следует отметить, что условные вероятности F_1 и F_0 еще не полностью характеризуют ошибки решения. Относительная важность последних зависит от априорных вероятностей $p(\lambda_1)$ и $p(\lambda_0)$, т. е. от того, насколько часто априори на входе решающего устройства появляется сигнал, соответствующий $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_0$.

Поэтому в ряде случаев ошибки решения характеризуются полными вероятностями ошибок первого рода P_1 и второго рода P_2 :

$$P_1 = p(\lambda_1) F_0 = p(\lambda_1) P(\lambda_0 | \lambda_1), \quad (11.26)$$

$$P_2 = p(\lambda_0) F_1 = p(\lambda_0) P(\lambda_1 | \lambda_0). \quad (11.27)$$

Величина вероятностей ошибок зависит от правила принятия решения (11.21) и определяется значением постоянной C . Естественно выбрать такую константу C , при которой правило (11.21) оказалось бы в определенном смысле оптимальным. В задачах связи, телеметрии и телеуправления в качестве критерия оптимальности обычно используют критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова — Зигерта), совпадающий с Байесовым критерием минимального среднего риска при простой функции потерь, когда ошибочному решению приписывается вес, равный единице, а правильному — равный нулю. Согласно этому критерию оптимальным считается соотношение (11.21), минимизирующее суммарную вероятность ошибок первого и второго рода

$$P = p(\lambda_1) P(\lambda_0 | \lambda_1) + p(\lambda_0) P(\lambda_1 | \lambda_0). \quad (11.28)$$

Можно показать [7], что это условие выполняется при $C = p(\lambda_0)/p(\lambda_1)$, в соответствии с чем оптимальное по критерию идеального наблюдателя правило принятия решения $\lambda = \lambda_1$ принимает вид

$$\frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_0)} > \frac{p(\lambda_0)}{p(\lambda_1)}. \quad (11.29)$$

В случае непрерывной обработки реализации $x(t)$ правило (11.29) преобразуется к виду

$$\frac{F(\lambda_1)}{F(\lambda_0)} > \frac{p(\lambda_0)}{p(\lambda_1)}. \quad (11.29a)$$

В задачах радиолокации широко используется другой критерий оптимальности, называемый критерием Неймана — Пирсона. Согласно этому критерию оптимальным считается правило (11.21), максимизирующее вероятность правильного решения D_1 (т. е. максимизирующее мощность решения) при заданной вероятности ложной тревоги F_1 . Можно показать [7], что это условие выполняется при $C = h$, где h определяется по наперед заданной вероятности ложной тревоги F_1 . Таким образом, оптимальное по критерию Неймана — Пирсона правило принятия решения $\lambda = \lambda_1$ имеет вид

$$\frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_0)} > h \quad (11.30)$$

или

$$\frac{F(\lambda_1)}{F(\lambda_0)} > h. \quad (11.30a)$$

В двух рассмотренных выше критериях предполагалось, что решение принимается в конце фиксированного интервала наблюдения $[0, T]$. Однако в отдельных случаях принимаемая реализация $x(t)$ может оказаться настолько благоприятной, что надежное обнаружение или различие сигналов можно произвести значительно быстрее, чем в случае приема менее благоприятной реализации. Поэтому, если заранее не фиксировать длительность T наблюдения, можно получить в среднем значительную экономию во времени обработки принимаемых реализаций $x(t)$. Такое наблюдение, при котором длительность обработки $x(t)$ заранее не фиксируется, а определяется самим ходом эксперимента, называется последовательным наблюдением (последовательным анализом) [13, 14].

При последовательном наблюдении производятся непрерывный анализ отношения правдоподобия и сравнение его с двумя порогами h_1 и $h_0 < h_1$. Если отношение правдоподобия меньше h_0 , принимается гипотеза $\lambda = \lambda_0$. Если же отношение правдоподобия $\Lambda [x(t)] > h_1$, принимается гипотеза $\lambda = \lambda_1$. В том случае, когда отношение правдоподобия находится между нижним h_0 и верхним h_1 уровнями, считается, что полученная в результате обработки реализации $x(t)$ статистика недостаточна для принятия решения, и испытание продолжается.

Таким образом, решение сформулированных выше задач второй группы сводится к отысканию оптимального устройства, осуществляющего обработку принимаемой смеси $x(t)$ в соответствии с правилами (11.29) или (11.30), и вычислению соответствующих им вероятностей ошибочных решений.

§ 2. Примеры

Пример 11.1. На вход радиоприемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda s_1(t, l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_m^{(1)}) + (1 - \lambda) s_2(t, l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \dots, l_m^{(2)}) + \xi(t), \quad (11.31)$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (11.32)$$

а $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_m^{(i)})$ — детерминированные узкополосные радиосигналы вида

$$s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_m^{(i)}) = f(t, l_1^{(i)}, \dots, l_k^{(i)}) \cos[\omega_i t + \Phi_i(t, l_{k+1}^{(i)}, \dots, l_m^{(i)})], \quad i = 1, 2. \quad (11.33)$$

Здесь ω_i — несущие частоты; $f_i(t)$ и $\Phi_i(t)$ — функции, отображающие законы амплитудной и угловой модуляции; $I_k^{(i)}$ — априорно известные параметры сигналов $s_i(t)$, $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}$, ..., $I_m^{(i)} = s_i(t)$. Предполагается, что ширина спектров сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ много меньше их несущих частот и, кроме того, $|\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega \ll \omega_i$, а сами сигналы $s_i(t)$ полностью определены на интервалах времени длительностью T и равны нулю вне этого интервала. Параметр λ представляет собой случайную величину, принимающую на фиксированном интервале $[kT, (k+1)T]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, значение $\lambda = \lambda_1 = 1$, что соответствует наличию в принятом колебании $x(t)$ сигнала $s_1(t)$, или $\lambda = \lambda_0 = 0$, когда в колебании $x(t)$ присутствует сигнал $s_2(t)$. Априорные вероятности $p(s_1) = p(\lambda_1)$ и $p(s_2) = p(\lambda_0)$ присутствия сигналов (11.33) в колебании (11.31) считаются известными.

Определить структуру приемного устройства, осуществляющего оптимальную по критерию идеального наблюдателя обработку реализации $x(t)$ и вычислить соответствующую ей минимальную суммарную вероятность ошибочного приема детерминированных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Решение. Как следует из (11.11) и (11.16), в случае приема детерминированных сигналов $s_i(t)$, $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}$, ..., $I_m^{(i)} = s_i(t)$ на фоне белого шума $\xi(t)$ функционалы правдоподобия $F(\lambda_1)$ и $F(\lambda_0)$ определяются соотношениями

$$F(\lambda_1) = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt \right\}, \quad (11.34)$$

$$F(\lambda_0) = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_2(t)]^2 dt \right\}. \quad (11.35)$$

Подставляя (11.34) и (11.35) в (11.29а) и логарифмируя полученное выражение, найдем, что оптимальный приемник для различения двух детерминированных сигналов $s_i(t)$ ($i = 1; 2$) на фоне белого шума должен сформировать величину (рис. 11.1)

$$U = \int_0^T x(t) s_1(t) dt - \int_0^T x(t) s_2(t) dt \quad (11.36)$$

и сравнить ее с порогом H , равным

$$H = \frac{1}{2} \left[E_1 - E_2 + N_0 \ln \frac{p(s_2)}{p(s_1)} \right]. \quad (11.37)$$

Здесь E_1 и E_2 — энергии сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, соответственно равные

$$E_1 = \int_0^T [s_1(t)]^2 dt, \quad E_2 = \int_0^T [s_2(t)]^2 dt. \quad (11.38)$$

Решение $\lambda = 1$ принимается при $U > H$, в противном случае принимается решение $\lambda = 0$.

В соответствии с (11.36) и (11.37) искомое оптимальное приемное устройство должно состоять из двух перемножителей, интеграторов

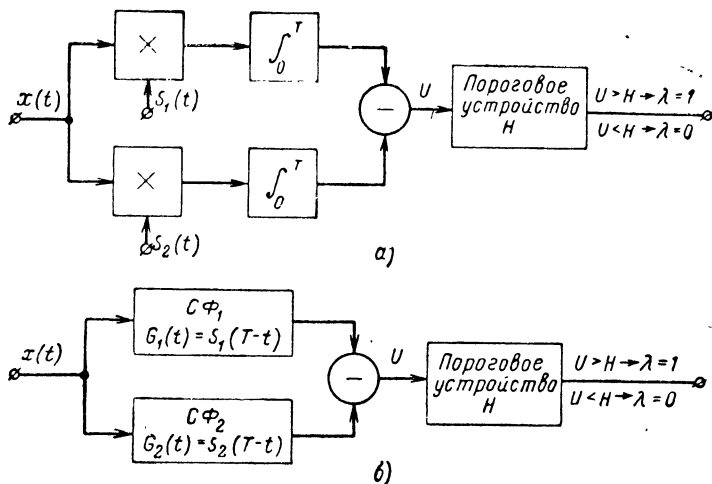


Рис. 11.1. Оптимальные устройства для различения двух детерминированных сигналов.

торов и порогового устройства с порогом H (рис. 11.1, а). Перемножители и интеграторы можно заменить согласованными фильтрами (СФ) [15, 16] с импульсными переходными функциями

$$G_i^*(t) = s_i(T-t), \quad (11.39)$$

при этом блок-схема оптимального приемника преобразуется к виду, изображенному на рис. 11.1, б.

Предположим, что колебание (11.31) на входе приемного устройства имеет вид $x(t) = s_1(t) + \xi(t)$, а сформированная приемником величина $U < H$. В этом случае будет иметь место ошибка (принимается решение $\lambda = 0$, когда в действительности $\lambda = 1$), вероятность которой равна

$$P_1 = p(s_1) P(s_2 | s_1) = p(s_1) \int_{-\infty}^H W_1(U | \lambda = 1) dU. \quad (11.40)$$

Здесь $W_1(U | \lambda = 1)$ — условная плотность вероятности случайной величины U при наличии на входе приемника сигнала $s_1(t)$.

Из (11.36) следует, что U является нормальной случайной величиной с плотностью вероятности

$$W_1(U | \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\lambda} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{U - m_\lambda}{\sigma_\lambda} \right)^2 \right\}, \quad (11.41)$$

среднее значение m_λ и дисперсия σ_λ^2 которой зависят от параметра λ . Подставляя, в частности, в (11.36) колебание $x(t) = s_1(t) + \xi(t)$, после несложных вычислений находим

$$m_{\lambda=1} = E_1 - B_s, \quad \sigma_{\lambda=1}^2 = \frac{N_0}{2} (E_1 + E_2 - 2B_s),$$

где

$$B_s = \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt. \quad (11.42)$$

Таким образом, вероятность принятия ошибочного решения $\lambda = 0$ равна

$$P_1 = p(s_1) \left[1 - \Phi \left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s - N_0 \ln \frac{p(s_2)}{p(s_1)}}{2 \sqrt{\frac{N_0}{2} (E_1 + E_2 - 2B_s)}} \right) \right], \quad (11.43)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (2.9).

Пусть $U > H$, а $x(t) = s_2(t) + \xi(t)$. В этом случае также имеет место ошибка (принимается решение $\lambda = 1$, когда в действительности $\lambda = 0$), вероятность которой равна

$$P_2 = p(s_2) P(s_1 | s_2) = p(s_2) \int_H^\infty W_1(U | \lambda = 0) dU. \quad (11.44)$$

В данном случае

$$m_{\lambda=0} = B_s - E_2, \quad \sigma_{\lambda=0}^2 = \frac{N_0}{2} (E_1 + E_2 - 2B_s), \quad (11.45)$$

и формула (11.44) принимает вид

$$P_2 = p(s_2) \left[1 - \Phi \left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s + N_0 \ln \frac{p(s_2)}{p(s_1)}}{2 \sqrt{\frac{N_0}{2} (E_1 + E_2 - 2B_s)}} \right) \right]. \quad (11.46)$$

Подставляя (11.43) и (11.46) в (11.28), находим следующее выражение для суммарной вероятности ошибок при оптимальном приеме детерминированных сигналов:

$$P = p(s_1) \left[1 - \Phi \left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s - N_0 \ln \frac{\rho(s_2)}{\rho(s_1)}}{2 \sqrt{\frac{N_0}{2} (E_1 + E_2 - 2B_s)}} \right) \right] +$$

$$+ p(s_2) \left[1 - \Phi \left(\frac{E_1 + E_2 - 2B_s + N_0 \ln \frac{\rho(s_2)}{\rho(s_1)}}{2 \sqrt{\frac{N_0}{2} (E_1 + E_2 - 2B_s)}} \right) \right]. \quad (11.47)$$

При $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$ формула (11.47) значительно упрощается

$$P = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{4} q_1 (1 + \delta - 2\rho_{s1})} \right), \quad (11.48)$$

где

$$q_1 = \frac{2E_1}{N_0}; \quad \delta = \frac{E_2}{E_1}; \quad \rho_{s1} = \frac{B_s}{E_1}. \quad (11.49)$$

Для большинства применяемых в системах радиотелеграфии сигналов характерным является равенство их энергий: $E_i = E$. При этом условии из формулы (11.48) получим [4]

$$P = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} q (1 - \rho_s)} \right), \quad (11.50)$$

где ρ_s — коэффициент взаимной корреляции сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$

$$\rho_s = \frac{B_s}{E} = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt. \quad (11.51)$$

Из (11.50) следует, что определение потенциальной помехоустойчивости для случая оптимального приема детерминированных сигналов сводится к вычислению коэффициента их взаимной корреляции. Учитывая монотонно возрастающий характер функции $\Phi(z)$, приходим к выводу, что при одинаковых отношениях сигнал/шум $q = 2E/N_0$ наиболее помехоустойчивыми являются сигналы $s_i(t)$, для которых коэффициент ρ_s минимален. Значения $P = f(q, \rho_s)$, вычисленные по формуле (11.50), представлены на рис. 11.2.

Пример 11.2. На вход радиоприемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda s(t, l_1, l_2, \dots, l_m) + \xi(t), \quad (11.52)$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32), а $s(t, l_1, l_2, \dots, l_m)$ — детерминированный узкополосный радиосигнал:

$$s(t, l_1, l_2, \dots, l_m) = f(t, l_1, \dots, l_k) \cos[\omega_0 t + \Phi(t, l_{k+1}, \dots, l_m)]. \quad (11.53)$$

Здесь ω_0 — несущая частота; $f(t)$ и $\Phi(t)$ — функции, отображающие законы амплитудной и угловой модуляции, l_k — априорно известные параметры сигнала $s(t, l_1, l_2, \dots, l_m) = \tilde{s}(t)$. Предполагается, что ширина спектра сигнала $s(t)$ много меньше его несущей частоты, а сам сигнал полностью определен на интервале длительностью T и равен нулю вне этого интервала. Параметр λ представляет собой случайную величину, принимающую на фиксированном интервале наблюдения $[0, T]$ значение $\lambda = 1$ или $\lambda = 0$.

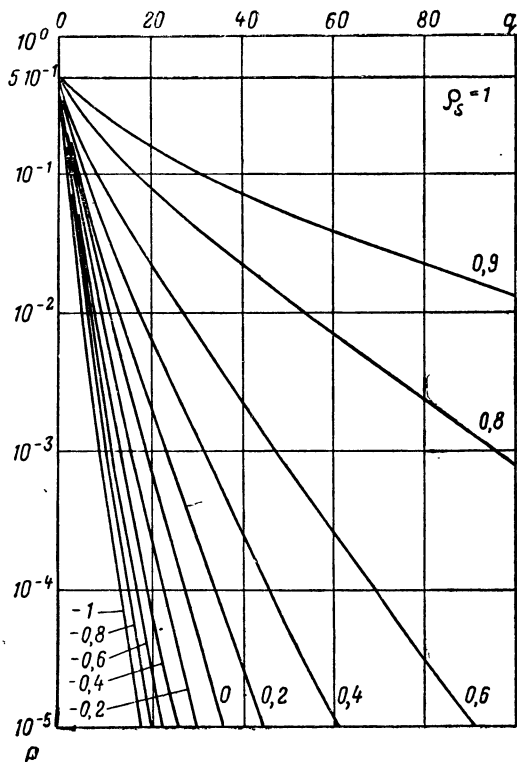


Рис. 11.2. Зависимость суммарной вероятности ошибочного приема детерминированных сигналов от коэффициента взаимной корреляции.

Определить структуру приемного устройства, осуществляющего оптимальную по критерию Неймана — Пирсона обработку реализации $x(t)$, и вычислить характеристики обнаружения детерминированного сигнала $s(t)$ на фоне белого шума.

Решение. В соответствии с (11.11) и (11.16) для рассматриваемого случая

$$F(\lambda_1) = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t)]^2 dt \right\}, \quad (11.54)$$

$$F(\lambda_0) = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\}. \quad (11.55)$$

Подставляя (11.54) и (11.55) в (11.30а) и логарифмируя полученное выражение, находим, что оптимальный приемник для обнару-

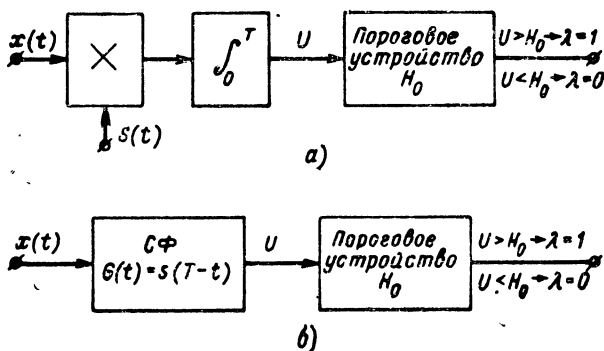


Рис. 11.3. Оптимальные устройства для обнаружения детерминированного сигнала.

жения детерминированного сигнала $s(t)$ должен сформировать величину

$$U = \int_0^T x(t) s(t) dt \quad (11.56)$$

и сравнить ее с порогом

$$H_0 = \frac{1}{2} (E + N_0 \ln h), \quad (11.57)$$

где E — энергия сигнала $s(t)$:

$$E = \int_0^T s^2(t) dt. \quad (11.58)$$

При $U > H_0$ принимается решение $\lambda = 1$, в противном случае принимается $\lambda = 0$.

На основании (11.56) и (11.57) искомый оптимальный приемник должен состоять из множителя, интегратора и порогового устройства с порогом H_0 (рис. 11.3, а). Как отмечалось ранее, множитель и интегратор можно заменить согласованным фильтром с импульсной переходной функцией

$$G(t) = s(T-t), \quad (11.59)$$

при этом блок-схема оптимального обнаружителя преобразуется к виду, изображенному на рис. 11.3, б.

Найдем характеристики обнаружения. Вероятность ложной тревоги F_1 равна вероятности того, что $U > H_0$ при условии $\lambda = 0$, и определяется формулой

$$F_1 = \int_{H_0}^{\infty} W_1(U | \lambda = 0) dU. \quad (11.60)$$

Здесь $W_1(U | \lambda = 0)$ — плотность вероятности случайной величины U при $\lambda = 0$, т. е. при наличии на входе приемника только шума.

Как следует из (11.56), U представляет собой нормальную случайную величину с плотностью вероятности (11.41). При $\lambda = 0$

$$U = \int_0^T \xi(t) s(t) dt,$$

откуда находим

$$m_{\lambda=0} = 0, \quad \sigma_{\lambda=0}^2 = \frac{EN_0}{2}. \quad (11.61)$$

Подставляя (11.41) в (11.60) и учитывая соотношения (11.61), получим

$$F_1 = 1 - \Phi\left(\frac{h_0}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}\right), \quad (11.62)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (2.9),

$$h_0 = \frac{2H_0}{N_0} = \frac{E}{N_0} + \ln h. \quad (11.63)$$

Вероятность правильного обнаружения (мощность решения) D_1 равна вероятности $U > H_0$ при условии $\lambda = 1$:

$$D_1 = \int_{H_0}^{\infty} W_1(U | \lambda = 1) dU. \quad (11.64)$$

Подставляя в (11.64) плотность вероятности (11.41) и учитывая, что при $\lambda = 1$ среднее значение и дисперсия случайной величины U равны

$$m_{\lambda=1} = E, \quad \sigma_{\lambda=1}^2 = \frac{EN_0}{2}, \quad (11.65)$$

находим

$$D_1 = 1 - \Phi \left(\frac{h_0}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right). \quad (11.66)$$

Формулы (11.62) и (11.66) показывают, что как вероятность ложной тревоги F_1 , так и вероятность правильного обнаружения D_1 однозначно определяются пороговым уровнем h_0 и отношением сигнал/шум $q = 2E/N_0$. Задавая значение вероятности ложной тревоги F_1 , по формуле (11.62) можно вычислить зависимость

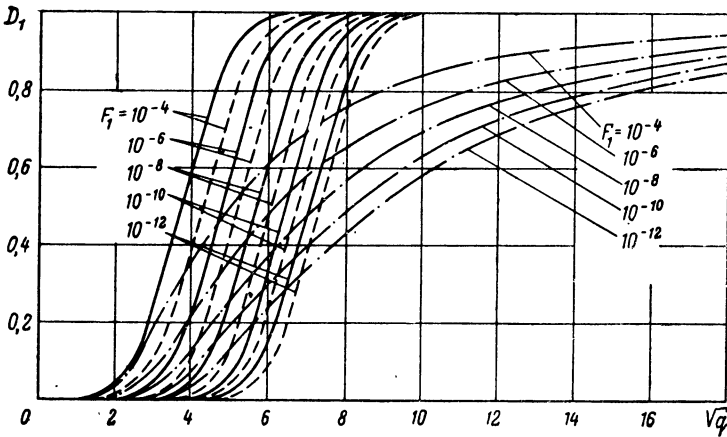


Рис. 11.4. Характеристики обнаружения детерминированного сигнала (сплошные линии), сигнала со случайной начальной фазой (пунктир) и сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой (штрих-пунктир).

$h_0 = f_1(q)$, а затем определить функцию $D_1 = f_2(q)$, называемую характеристикой обнаружения. Значения $D_1 = f_2(q)$, вычисленные по формуле (11.66) для нескольких значений вероятностей ложной тревоги, представлены на рис. 11.4 (сплошные линии).

Пример 11.3. Решить пример 11.2 при условии, что процесс $\xi(t)$ в (11.52) представляет собой стационарный нормальный шум с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции $K_\xi(t_1, t_2)$.

Решение [7]. В соответствии с (11.11) и (11.13) функционалы правдоподобия для рассматриваемого примера определяются соотношениями

$$F(\lambda_0) = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \theta(t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2 \right\}, \quad (11.67)$$

$$F(\lambda_1) = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \theta(t_1, t_2) [x(t_1) - s(t_1)] [x(t_2) - s(t_2)] dt_1 dt_2 \right\}, \quad (11.68)$$

где функция $\theta(t_1, t_2)$ удовлетворяет интегральному уравнению (11.14). Подставляя (11.67) и (11.68) в (11.30а), находим

$$\Lambda[x(t)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T s(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_0^T \int_0^T x(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\}.$$

Здесь учтено, что вследствие симметрии функции $\theta(t_1, t_2)$

$$\int_0^T \int_0^T x(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^T \int_0^T x(t_2) s(t_1) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Вводя далее функцию

$$\varphi(t) = \int_0^T \theta(t, t_2) s(t_2) dt_2,$$

удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^T K_\xi(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = s(t),$$

окончательно получаем

$$\Lambda[x(t)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T s(t) \varphi(t) dt + \int_0^T x(t) \varphi(t) dt \right\}. \quad (11.69)$$

Согласно критерию Неймана—Пирсона решение $\lambda = 1$ принимается при

$$\Lambda[x(t)] > h. \quad (11.70)$$

После логарифмирования это условие приводится к виду

$$U = \int_0^T x(t) \varphi(t) dt > h_0, \quad (11.71)$$

где

$$h_0 = \ln h + \frac{1}{2} \int_0^T s(t) \varphi(t) dt. \quad (11.72)$$

Соотношение (11.71) определяет структуру оптимального обнаружителя, осуществляющего интегрирование реализации $x(t)$ с весом $\varphi(t)$, зависящим как от вида сигнала $s(t)$, так и от корреляционной функции $K_{\xi}(t_1, t_2)$ шума $\xi(t)$. Результат интегрирования сравнивается с порогом h_0 , величина которого определяется по заданной вероятности ложной тревоги F_1 . Если окажется, что $U > h_0$, принимается решение $\lambda = 1$, в противном случае принимается решение $\lambda = 0$.

Определим характеристики обнаружения. Вероятность ложной тревоги определяется формулой (11.60), где $W_1(U|\lambda = 0)$ — плотность вероятности случайной величины U , которая при $\lambda = 0$ равна

$$U = \int_0^T \xi(t) \varphi(t) dt \quad (11.73)$$

и, следовательно, представляет собой нормальную случайную величину с плотностью вероятности (11.41), нулевым средним значением $m_{\lambda=0} = 0$ и дисперсией

$$\sigma_{\lambda=0}^2 = \int_0^T \int_0^T K_{\xi}(t_1, t_2) \varphi(t_1) \varphi(t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^T s(t) \varphi(t) dt = \sigma_0^2.$$

После подстановки (11.41) в (11.60) получаем

$$F_1 = 1 - \Phi\left(\frac{h_0}{\sigma_0}\right).$$

Вероятность правильного обнаружения равна

$$D_1 = 1 - \Phi\left(\frac{h_0}{\sigma_0} - \sigma_0\right).$$

Пример 11.4. Входящие в (11.31) сигналы $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_m^{(i)})$ имеют вид

$$s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_m^{(i)}) = s_i(t, \varphi_i) = \\ = f_i(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t) + \varphi_i], \quad i = 1, 2, \quad (11.74)$$

причем все параметры $l_k^{(i)}$ таких сигналов, кроме начальных фаз φ_i , априори известны, а начальные фазы φ_i представляют собой случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[-\pi, \pi]$, и считаются несущественными параметрами. Сохраняя в силе остальные условия примера 11.1, определить структурную схему оптимального по критерию Котельникова — Зигерта приемника сигналов $s_i(t, \varphi_i)$ со случайными начальными фазами и вычислить суммарную вероятность ошибочного приема.

Решение [17]. В этом случае функционалы правдоподобия $F(\lambda_1)$ и $F(\lambda_0)$ следует вычислять по формуле (11.11а), осуществляя усреднение по случайным фазам φ_i как несущественным параметрам:

$$F(\lambda_1) = \frac{k}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - f_1(t) \cos(\omega_1 t + \psi_1(t) + \varphi_1)]^2 dt \right\} d\varphi_1, \quad (11.75)$$

$$F(\lambda_0) = \frac{k}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - f_2(t) \cos(\omega_2 t + \psi_2(t) + \varphi_2)]^2 dt \right\} d\varphi_2. \quad (11.76)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} X_i &= \int_0^T x(t) f_i(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t)] dt, \\ Y_i &= \int_0^T x(t) f_i(t) \sin[\omega_i t + \psi_i(t)] dt, \end{aligned} \quad (11.77)$$

и учтем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{R \cos \theta\} d\theta = I_0(R),$$

где $I_0(R)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Тогда после подстановки (11.75) и (11.76) в (11.29) и ряда несложных преобразований найдем, что оптимальный приемник для различения двух сигналов (11.74) с неизвестными начальными фазами должен сформировать величину

$$U = \ln I_0\left(\frac{2R_1}{N_0}\right) - \ln I_0\left(\frac{2R_2}{N_0}\right) \quad (11.78)$$

и сравнить ее с порогом H , равным

$$H = \frac{E_1 - E_2}{N_0} + \ln \frac{\rho(s_2)}{\rho(s_1)}. \quad (11.79)$$

Здесь E_1 и E_2 — энергии сигналов $s_1(t, \varphi_1)$ и $s_2(t, \varphi_2)$, определяемые формулами (11.38), а величины R_i определяются соотношениями

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \geq 0.$$

Физически величины R_i представляют собой значения огибающих суммы сигнала $s_i(t, \varphi_i)$ и шума (в моменты времени $t = kT$) на выходе согласованных фильтров с импульсными переходными функциями $G_i(t) = s_i(T - t)$.

Структурная схема такого приемника представлена на рис. 11.5, а. Принятое колебание $x(t)$ воздействует на два согласо-

ванных фильтра с импульсными переходными функциями $G_i(t)$. На выходе каждого из фильтров стоят детекторы, выходные напряжения которых вычитаются и разность (11.78) подается на пороговое устройство с порогом H . При $U > H$ принимается решение $\lambda = 1$, при $U < H$ — принимается $\lambda = 0$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь симметричных систем передачи двоичных сигналов, для которых $E_1 = E_2 = E$, $P(s_1 | s_2) = P(s_2 | s_1)$ и $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$. Для таких систем, как это следует из (11.79), порог $H = 0$ и выражение (11.78) приводится к виду

$$U = I_0 \left(\frac{2R_1}{N_0} \right) - I_0 \left(\frac{2R_2}{N_0} \right).$$

Следует отметить, что при сделанных здесь предположениях закон детектирования не имеет существенного значения. Важно лишь,

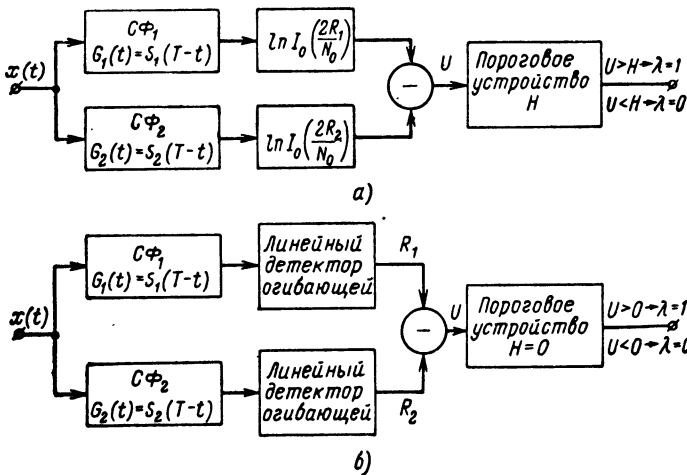


Рис. 11.5. Оптимальные устройства для различения двух сигналов со случайными начальными фазами.

чтобы выходное напряжение детектора было монотонной функцией огибающей $R_i(t)$. Если, например, в оптимальном приемнике применить линейное детектирование огибающей (рис. 11.5, б), то с нулевым порогом нужно сравнивать величину

$$U = R_1 - R_2.$$

Суммарная вероятность ошибок при этом определяется формулой

$$P = \int_0^{\infty} dR_1 \int_{R_1}^{\infty} W_2(R_1, R_2) dR_2, \quad (11.80)$$

где $W_2(R_1, R_2)$ — совместная плотность вероятности случайных величин R_1 и R_2 , равная

$$W_2(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{\sigma^4 (1-\rho^2)} e^{-\frac{1}{2} q - \frac{R_1^2 + R_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} \times \\ \times I_0\left(\sqrt{q} \frac{R_1}{\sigma}\right) I_0\left(\frac{\rho R_1 R_2}{\sigma^2(1-\rho^2)}\right). \quad (11.81)$$

Здесь $q = 2E/N_0$ — отношение сигнал/шум на входе приемника (на входе согласованных фильтров); $\sigma^2 = EN_0/2$ — дисперсия шума на выходе каждого из фильтров; ρ — коэффициент, имеющий смысл коэффициента взаимной корреляции между огибающими сигналов:

$$\rho = \frac{1}{E} \left| \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right|, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (11.82)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t) f_2(t) \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \psi_2(t) - \psi_1(t)] dt,$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t) f_2(t) \sin [(\omega_2 - \omega_1)t + \psi_2(t) - \psi_1(t)] dt.$$

Подставив (11.81) в (11.80) и выполнив интегрирование, получим следующее выражение для суммарной вероятности ошибок при приеме сигналов $s_i(t, \varphi_i)$ с неизвестными начальными фазами:

$$P = Q\left(\frac{1}{2} \sqrt{q(1-\sqrt{1-\rho^2})}; \frac{1}{2} \sqrt{q(1+\sqrt{1-\rho^2})}\right) - \\ - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4} q} I_0\left(\frac{1}{4} q \rho\right), \quad (11.83)$$

где $Q(v, u)$ — функция распределения Релея — Райса [18,19]

$$Q(v, u) = \int_u^\infty x \cdot \exp\left\{-\frac{x^2+v^2}{2}\right\} I_0(vx) dx. \quad (11.84)$$

Пример 11.5. Решить пример 11.2 при условии, что входящий в (11.52) сигнал $s(t, l_1, l_2, \dots, l_m)$ имеет вид

$$s(t, l_1, l_2, \dots, l_m) = s(t, \varphi) = f(t) \cos [\omega_0 t + \psi(t) + \varphi], \quad (11.85)$$

где φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$.

Решение. Функционалы правдоподобия для рассматриваемого случая в соответствии с (11.11а) равны:

$$F(\lambda_1) = k \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T x^2(t) dt + E \right]\right\} I_0\left(\frac{2R}{N_0}\right), \quad (11.86)$$

$$F(\lambda_0) = k \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\}. \quad (11.87)$$

После подстановки (11.86) и (11.87) в (11.30а) получаем следующее правило принятия решения $\lambda = 1$ (рис. 11.6,а):

$$e^{-\frac{E}{N_0}} I_0 \left(\frac{2R}{N_0} \right) > h \quad (11.88)$$

или

$$I_0 \left(\frac{2R}{N_0} \right) > h_0 = h \cdot e^{\frac{E}{N_0}}, \quad (11.88a)$$

где

$$R = |\sqrt{X^2 + Y^2}|, \quad (11.89)$$

$$X = \int_0^T x(t) f(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)] dt,$$

$$Y = \int_0^T x(t) f(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t)] dt.$$

Так как функция $I_0(z)$ является монотонной, решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \varphi)$ на входе приемника можно принимать на основании сравнения с некоторым порогом любой монотонной функции аргумента R , представляющего собой, как отмечалось в примере 11.4, значения огибающей $R(t)$ на выходе согласованного фильтра с импульсной переходной функцией $G(t) = s(T - t)$ в момент времени $t = T$. Если сравнивать с порогом H саму огибающую $R(t)$, то правило принятия решения $\lambda = 1$ принимает вид

$$R > H. \quad (11.88б)$$

Соответствующая этому правилу структурная схема оптимального приемника приведена на рис. 11.6, б.

На основании (11.88б), (11.22) и (11.24) вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения определяются формулами

$$F_1 = \int_H^\infty W_1(R | \lambda = 0) dR, \quad (11.90)$$

$$D_1 = \int_H^\infty W_1(R | \lambda = 1) dR. \quad (11.91)$$

Нетрудно показать, что входящие в (11.90) и (11.91) плотности вероятностей равны

$$W_1(R | \lambda = 1) = \frac{R}{\sigma_0^2} \exp \left\{ -\frac{R^2 + E}{2\sigma_0^2} \right\} I_0 \left(\frac{RE}{\sigma_0^2} \right),$$

$$W_1(R | \lambda = 0) = \frac{R}{\sigma_0^2} \exp \left\{ -\frac{R^2}{2\sigma_0^2} \right\}, \quad \sigma_0^2 = \frac{EN_0}{2}.$$

После подстановки $W_1(R | \lambda = 1)$ и $W_1(R | \lambda = 0)$ в (11.90) и (11.91), находим

$$F_1 = e^{-\frac{1}{2} h_0^2}, \quad h_0 = \frac{\sqrt{2} H}{\sqrt{EN_0}} = \frac{H}{\sigma_0}, \quad (11.90a)$$

$$D_1 = Q(\sqrt{q}, h_0),$$

где функция $Q(v, u)$ определена соотношением (11.84). Значения $D_1 = f(q)$, вычисленные по формулам (11.90a) для заданных значений вероятности ложной тревоги F_1 , представлены на рис. 11.4 (пунктирные линии).

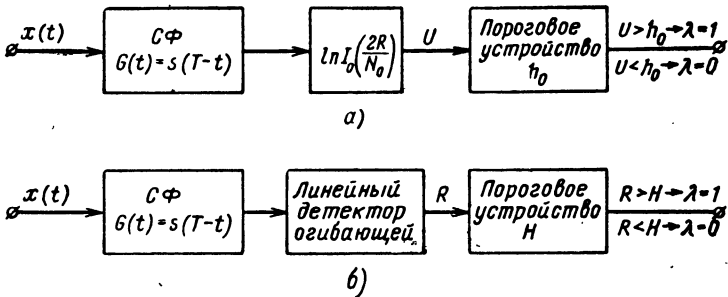


Рис. 11.6. Оптимальные устройства для обнаружения сигнала со случайной начальной фазой.

Пример 11.6. На вход приемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda) u_2(t) + \xi(t), \quad (11.91a)$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32), $u_i(t)$ — федингующие сигналы вида

$$u_i(t) = a \cdot e^{-j\theta} s_i(t). \quad (11.92)$$

Здесь $s_i(t)$ — детерминированные узкополосные радиосигналы, равные

$$s_i(t) = f_i(t) \exp \{ j[\omega_i t + \psi_i(t)] \}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

a и θ — независимые случайные величины, характеризующие медленные изменения амплитуды и фазы сигналов $s_i(t)$.

Принимаемые сигналы $u_i(t)$ состоят из детерминированной и случайной составляющих:

$$u_i(t) = s_i(t) [\alpha e^{-j\delta} + \beta e^{-j\epsilon}], \quad (11.92a)$$

т. е.

$$ae^{-j\theta} = \alpha e^{-j\delta} + \beta e^{-j\epsilon}, \quad (11.93)$$

где α и δ представляют собой амплитудный коэффициент и фазовый сдвиг детерминированной составляющей сигнала $u_i(t)$ (α и δ — постоянные величины), а β и ϵ — амплитудный множитель и фазовый сдвиг случайной компоненты, постоянные на интервале наблюдения $[0, T]$. В дальнейшем будем предполагать, что β и ϵ представляют собой независимые случайные величины, причем β распределена по закону Релея, а ϵ — равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$, вследствие чего их совместная плотность вероятности имеет вид

$$W_2(\beta, \epsilon) = \begin{cases} \frac{\beta}{2\pi\sigma_\Phi^2} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2\sigma_\Phi^2}\right\}, & \begin{cases} 0 \leq \beta < \infty, \\ -\pi \leq \epsilon \leq \pi, \end{cases} \\ 0 & \text{при других } \beta \text{ и } \epsilon. \end{cases}$$

При сделанных предположениях совместная плотность вероятности случайных величин a и θ определяется законом Райса:

$$W_2(a, \theta) = \begin{cases} \frac{a}{2\pi\sigma_\Phi^2} \exp\left\{-\frac{a^2 + \alpha^2 - 2a\alpha \cos(\theta - \delta)}{2\sigma_\Phi^2}\right\}, & \begin{cases} 0 \leq a < \infty, \\ -\pi \leq \theta - \delta \leq \pi, \end{cases} \\ 0 & \text{при других } a \text{ и } \theta, \end{cases} \quad (11.94)$$

а средние энергии сигналов $u_i(t)$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i = \langle E_{ui} \rangle &= \left\langle \int_0^T u_i^2(t) dt \right\rangle = E_{si} \int_0^\infty a^2 W_1(a) da = \\ &= 2\sigma_\Phi^2 E_{si} \left(1 + \frac{\gamma^2}{2}\right), \end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha/\sigma_\Phi$ характеризует соотношение между детерминированной и случайной составляющими сигнала $u_i(t)$.

Параметр λ в колебании (11.91) может принимать значение $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(u_1) = p(\lambda_0) = p(u_2) = 1/2$. По принятой реализации $x(t)$ требуется решить с минимальной суммарной вероятностью ошибок (11.28), какое значение имеет параметр λ на данном интервале наблюдения $[0, T]$.

Решение [20]. При решении сформулированной задачи следует различать два частных случая:

1. Среднее значение δ фазового сдвига θ принимаемых сигналов (11.92) априори известно.
2. Среднее значение фазового сдвига θ на приемной стороне неизвестно.

Подставляя в (11.11а) вместо сигналов $s_i(t, l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_m^{(i)})$ сигналы $u_i(t) = u_i(t, a, \theta)$, определяемые соотношением (11.92), и осуществляя усреднение по несущественным параметрам a и θ с плотностью вероятности (11.94), находим, что оптимальный по критерию идеального наблюдателя приемник сигналов (11.92) с равными энергиями $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}$, равными априорными вероятностями $p(u_1) = p(u_2) = 1/2$ и известным средним значением δ их фазового сдвига θ должен сформировать величину

$$U = \left[\frac{\sigma_\Phi^2}{\alpha N_0} |r_1|^2 + \operatorname{Re} \{r_1 e^{-j\delta}\} \right] - \left[\frac{\sigma_\Phi^2}{\alpha N_0} |r_2|^2 + \operatorname{Re} \{r_2 e^{-j\delta}\} \right] \quad (11.95)$$

и сравнить ее с порогом $H = 0$. При $U < H$ выносится решение $\lambda = 0$, при $U > H$ принимается $\lambda = 1$.

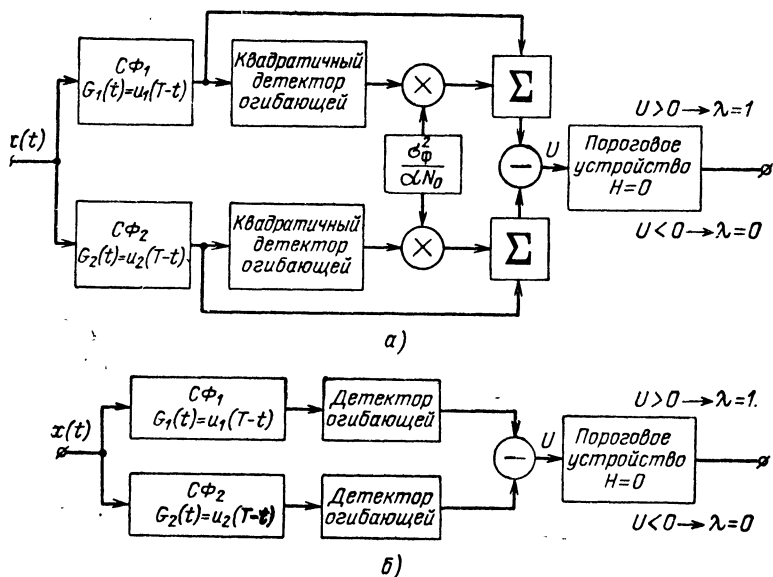


Рис. 11.7. Квазикогерентное (а) и некогерентное (б) устройства для различения двух медленно федингующих сигналов.

Входящие в (11.95) величины $r_i = r_i(0)$ представляют собой значения комплексных взаимокорреляционных функций сигналов (11.92) и принятого колебания (11.91), равных

$$r_i(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^T x^*(t) u_i(t - \tau) dt.$$

Здесь $x^*(t)$ — функция, комплексно сопряженная с $x(t)$. Используя условие узкополосности сигналов $u_i(t)$, можно показать, что действительная часть функции $r_i(\tau)$ представляет собой взаимную корреляционную функцию для действительных частей колебаний $u_i(t)$ и $x(t)$:

$$\operatorname{Re}\{r_i(\tau)\} = \int_0^{\tau} \operatorname{Re}\{x(t)\} \operatorname{Re}\{u_i(t-\tau)\} dt,$$

а значения $|r_i(\tau)|$ совпадают со значениями огибающей этой корреляционной функции. В соответствии с этим структурная схема оптимального приемника для рассматриваемого случая может быть представлена в виде, изображенном на рис. 11.7, а. При этом суммарная вероятность P ошибок квазикогерентного приема медленно федингующих сигналов (11.92) подсчитывается по формуле

$$P = Q(ac, bc) - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\mu \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\mu^2\rho^2}} \right] e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)c^2} I_0(abc^2), \quad (11.96)$$

где

$$a = 1 - \frac{\mu \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\mu^2\rho^2}}, \quad b = 1 + \frac{\mu \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1-\mu^2\rho^2}}, \quad (11.97)$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma^2 [(1-\rho^2)\sigma_\Phi^2 q + 2(1-\rho_s)]}{4\sigma_\Phi^2 q (1-\rho^2)}}, \quad \mu = \frac{2\sigma_\Phi^2 q}{2\sigma_\Phi^2 q + 4}, \quad q = \frac{2E}{N_0},$$

а коэффициенты ρ_s и ρ определяются соотношениями (11.51) и (11.82).

Если среднее значение δ фазового сдвига θ принимаемых сигналов (11.92) неизвестно, оптимальный приемник для различения двух федингующих сигналов должен выносить решение о приеме $u_1(t)$ или $u_2(t)$ на основе анализа следующего простого выражения (рис. 11.7, б):

$$U = |r_1| - |r_2|.$$

При $U < 0$ принимается решение $\lambda = 0$, в противном случае принимается $\lambda = 1$. Отметим, что при некогерентном приеме не требуется знания отношения $\sigma_\Phi^2/\alpha N_0$.

Суммарная вероятность ошибок при некогерентном приеме подсчитывается по формуле (11.96), в которой

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{1 - \frac{\sqrt{(1-\rho^2)(1-\mu^2\rho^2)}}{1-\mu\rho^2}}, \\ b &= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{(1-\rho^2)(1-\mu^2\rho^2)}}{1-\mu\rho^2}}, \\ c &= \sqrt{\frac{\mu\gamma^2}{2} \frac{1-\mu\rho^2}{1-\mu^2\rho^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11.98)$$

Пример 11.7. На выходе УПЧ приемника амплитудно-манипулированных радиосигналов, блок-схема которого представлена на рис. 11.8, имеет место смесь сигнала и шума

$$x(t) = \lambda s_1(t, \varphi_1) + (1 - \lambda) s_2(t, \varphi_2) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — нормальный квазигармонический шум

$$\xi(t) = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t$$

с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

$s_i(t, \varphi_i)$ — амплитудно-манипулированные радиосигналы:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t, \varphi_1) &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t, \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Начальная фаза φ_1 случайна и равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$. Параметр λ представляет собой случайную вели-

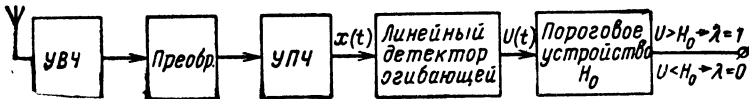


Рис. 11.8. Блок-схема приемника АМ сигналов со случайной начальной фазой.

чину, принимающую на интервале $[0, T]$ значение $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(s_1) = p(\lambda_0) = p(s_2) = 1/2$. Решение $\lambda = \lambda_1$ принимается в тех случаях, когда значение огибающей $U = U(T)$, выделяемой линейным детектором огибающей, превышает порог H . В противном случае принимается $\lambda = \lambda_0$.

Определить оптимальный порог H_0 , минимизирующий суммарную вероятность ошибочных решений (11.28), и вычислить соответствующую ему суммарную вероятность ошибок.

Решение. По формуле (11.28) суммарная вероятность ошибок приема амплитудно-манипулированных сигналов равна

$$P_{AM} = p(s_1) \int_0^{H_0} W_1(U | \lambda = 1) dU + p(s_2) \int_{H_0}^{\infty} W_1(U | \lambda = 0) dU, \quad (11.99)$$

где $W_1(U | \lambda = 1)$ — плотность вероятности огибающей суммы сигнала $s_1(t)$ и квазигармонического шума $\xi(t)$:

$$W_1(U | \lambda = 1) = \frac{U}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma^2} \right\} I_0 \left(\frac{UU_m}{\sigma^2} \right), \quad U \geq 0,$$

а $W_1(U | \lambda = 0)$ — плотность вероятности огибающей только шума $\xi(t)$:

$$W_1(U | \lambda = 0) = \frac{U}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{U^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad U \geq 0.$$

Подставляя $W_1(U | \lambda_i)$ в (11.98), находим

$$P_{AM} = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{H_0}{\sigma} \right)^2} - Q \left(\frac{U_m}{\sigma}, \frac{H_0}{\sigma} \right) \right]. \quad (11.100)$$

Взяв производную по H_0 от выражения (11.100) и приравняв ее нулю, получим уравнение, связывающее оптимальный порог H_0 с отношением сигнал/шум U_m/σ :

$$I_0 \left(\frac{H_0 U_m}{\sigma^2} \right) = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{U_m}{\sigma} \right)^2}.$$

§ 3. Задачи и ответы

11.1. На вход приемного устройства, оптимального по критерию идеального наблюдателя, воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_2(t) + \xi(t), \quad (11.101)$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32), а $s_i(t)$ — детерминированные амплитудно-манипулированные сигналы:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Параметр λ принимает значение $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$.

Вычислить суммарную вероятность ошибочного приема сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Ответ:

$$\begin{aligned} P_{AM} &= 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{4} q} \right), \\ \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2} x^2} dx, \\ q = q_1 &= \frac{2E_1}{N_0} = \frac{A_m^2 T}{N_0}. \end{aligned}$$

График функции $P_{AM} = f(q)$ приведен на рис. 11.9.

11.2. Решить задачу 11.1 для случая оптимального приема детерминированных частотно-манипулированных сигналов

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

при условии, что $|\omega_1 - \omega_2|T \gg 1$.

Ответ:

$$P_{\text{ЧМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{2}q}\right), \quad q = \frac{A_m^2 T}{N_0} = \frac{2E}{N_0}.$$

График функции $F_{\text{ЧМ}} = f(q)$ приведен на рис. 11.9.

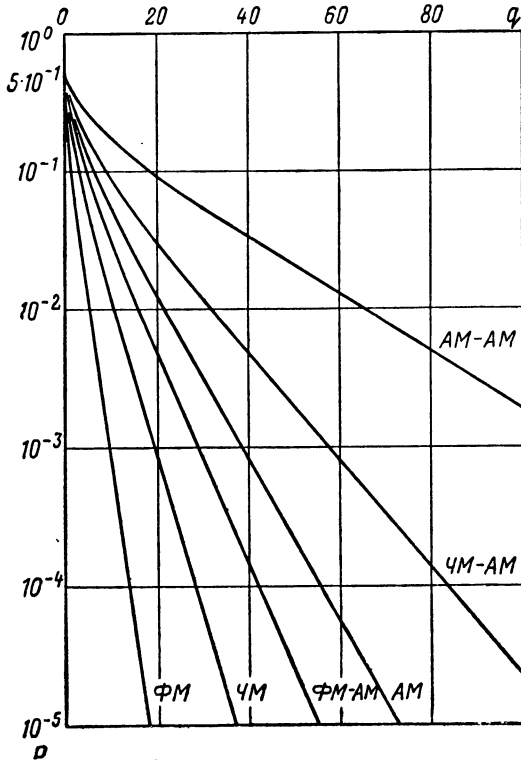


Рис. 11.9. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при оптимальном различении детерминированных сигналов.

11.3. Решить задачу 11.1 для случая оптимального приема фазо-манипулированных сигналов

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ s_2(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ:

$$P_{\text{ФМ}} = 1 - \Phi(\sqrt{q}).$$

График функции $P_{\text{ФМ}} = f(q)$ дан на рис. 11.9.

11.4. На вход оптимального по критерию Котельникова — Зигерта приемника воздействует колебание (11.101), где $s_i(t)$ — детерминированные тонально-манипулированные сигналы вида АМ — АМ:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m [1 + m_1 \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m [1 + m_2 \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Вычислить суммарную вероятность ошибочного приема таких сигналов при условии равенства априорных вероятностей сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Предполагается, что период тональных колебаний $T_\Omega = 2\pi/\Omega \ll T$ и $\Omega \ll \omega_0$.

Ответ:

$$P_{\text{АМ-АМ}} = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{4} q_1 \frac{(m_1 - m_2)^2}{2 + m_1^2}} \right), \quad q = q_1 = \frac{2E_1}{N_0}.$$

Значения $P_{\text{АМ-АМ}} = f(q)$ для случая $m_1 = 1$ и $m_2 = 0$ приведены на рис. 11.9.

11.5. Решить задачу 11.4 для случая оптимального приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ — АМ:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega_1 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega_2 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предполагается, что тональные частоты $\Omega_i \ll \omega_0$ и, кроме того, период тональных колебаний $T_\Omega = 2\pi/\Omega_i$ много меньше длительности T сигналов $s_i(t)$.

Ответ [21]:

$$P_{\text{ЧМ-АМ}} = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} q \frac{m^2}{2 + m^2}} \right).$$

Значения $P_{\text{ЧМ-АМ}} = f(q)$ при $m = 1$ приведены на рис. 11.9.

11.6. Решить задачу 11.4 для случая оптимального приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ФМ — АМ:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m [1 - m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ [21]:

$$P_{\text{ФМ-АМ}} = 1 - \Phi \left(\sqrt{q \frac{m^2}{2 + m^2}} \right).$$

Значения $P_{\text{ФМ-АМ}} = f(q)$ для случая $m = 1$ приведены на рис. 11.9.

11.7. Определить суммарную вероятность ошибки при оптимальном по критерию идеального наблюдателя приеме на фоне бе-

лого шума детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида АМ — ЧМ :

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos [\omega_0 t + \beta_1 \cos \Omega t + \varphi_1] \\ s_2(t) &= A_m \cos [\omega_0 t + \beta_2 \cos \Omega t + \varphi_2] \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ:

$$P_{AM-ЧМ} = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} q [1 - J_0(\beta_2 - \beta_1)]} \right),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода.

11.8. Решить задачу 11.4 для случая оптимального приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ — ЧМ :

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos [\omega_0 t + \beta \cos \Omega_1 t + \varphi_1] \\ s_2(t) &= A_m \cos [\omega_0 t + \beta \cos \Omega_2 t + \varphi_2] \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ [21]:

$$P_{ЧМ-ЧМ} = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} q [1 - J_0^2(\beta)]} \right).$$

11.9. Решить задачу 11.4 для случая приема детерминированных тонально-манипулированных сигналов вида ФМ — ЧМ:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos [\omega_0 t + \beta \cos \Omega t + \varphi_1] \\ s_2(t) &= A_m \cos [\varphi_0 t - \beta \cos \Omega t + \varphi_2] \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ [21]:

$$P_{ФМ-ЧМ} = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} q [1 - J_0(2\beta)]} \right).$$

11.10. На вход радиоприемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda s_1(t, \varphi_1) + (1 - \lambda) s_2(t, \varphi_2) + \xi(t), \quad (11.102)$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32), а $s_i(t, \varphi_i)$ — амплитудно-манипулированные сигналы:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t, \varphi_1) &= A_m \cos (\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t, \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Начальная фаза φ_1 сигнала $s_1(t, \varphi_1)$ является случайной, равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$ и считается несущественным параметром. Предполагается, что входящий в (11.102) параметр λ представляет собой случайную величину, принимающую значение $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с равными априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(s_1) = p(\lambda_0) = p(s_2) = 1/2$.

Определить структуру оптимального по критерию Котельникова — Зигерта приемника амплитудно-манипулированных сигналов с неизвестными начальными фазами и вычислить суммарную вероятность ошибочного приема.

Ответ: Оптимальный приемник должен состоять из согласованного фильтра с импульсной переходной функцией $G(t) = s_1(T - t)$, линейного детектора огибающей и порогового устройства с порогом h_0 , определяемым соотношением

$$I_0(h_0 \sqrt{q_1}) = e^{\frac{1}{2} q_1}, \quad q_1 = \frac{2E_1}{N_0} = \frac{A_m^2 T}{N_0}.$$

Суммарная вероятность ошибочного приема амплитудно-манипулированных сигналов при этом вычисляется по формуле

$$P_{AM} = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{1}{2} h_0^2} - Q(\sqrt{q_1}, h_0) \right].$$

Значения $P_{AM} = f(q)$ приведены на рис. 11.10.

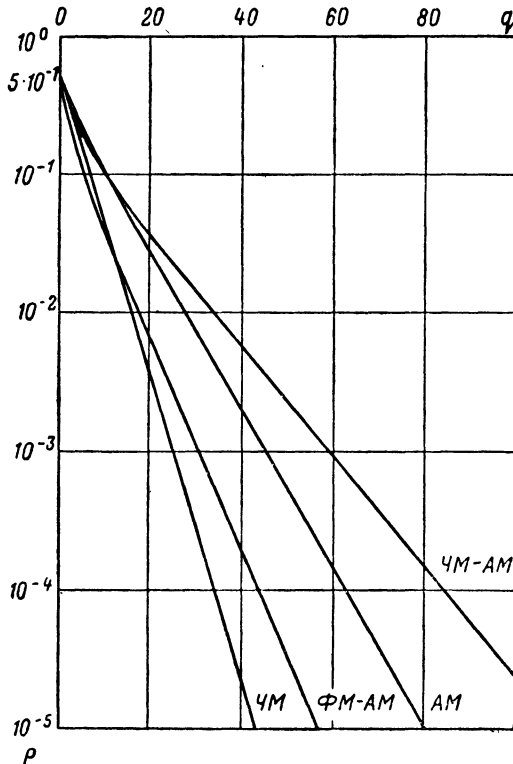


Рис. 11.10. Зависимость вероятности ошибок от отношения сигнал/шум при оптимальном различении сигналов со случайной начальной фазой.

11.11. Вычислить суммарную вероятность ошибок при оптимальном по критерию идеального наблюдателя приеме априори равновероятных частотно-манипулированных сигналов

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

на фоне стационарного нормального белого шума с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32). Случайные начальные фазы φ_1 и φ_2 сигналов $s_1(t, \varphi_1)$ и $s_2(t, \varphi_2)$ равномерно распределены на интервале $[-\pi, \pi]$ и считаются несущественными параметрами. Предполагается, что $|\omega_2 - \omega_1|T \gg 1$.

Ответ:

$$P_{\text{ЧМ}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4} q}.$$

Значения $P_{\text{ЧМ}} = f(q)$ приведены на рис. 11.10.

11.12. Решить задачу 11.11 для случая оптимального приема тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ — АМ

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega_1 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega_2 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

начальные фазы которых случайны и равномерно распределены на интервале $[-\pi, \pi]$. Предполагается, что $\Omega_i \ll \omega_0$ и $T\Omega_i \ll T$.

Ответ:

$$P_{\text{ЧМ-АМ}} = Q(v, u) - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4} q} I_0\left(\frac{1}{2} q \frac{1}{2+m^2}\right),$$

где

$$v = \sqrt{\frac{1}{4} q \left(1 - \frac{\sqrt{2m^2 + m^4}}{2+m^2}\right)}; \quad u = \sqrt{\frac{1}{4} q \left(1 + \frac{\sqrt{2m^2 + m^4}}{2+m^2}\right)}.$$

Значения $P_{\text{ЧМ-АМ}} = f(q)$ для $m = 1$ приведены на рис. 11.10.

11.13. Решить задачу 11.12 для случая оптимального приема тонально-манипулированных сигналов вида ФМ — АМ

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m [1 + m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m [1 - m \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ:

$$P_{\text{ФМ-АМ}} = Q(v, u) - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4} q} I_0\left(\frac{1}{4} q \frac{2-m^2}{2+m^2}\right),$$

где

$$v = \sqrt{\frac{1}{4} q \left(1 - \frac{2\sqrt{2}m}{2+m^2}\right)}; \quad u = \sqrt{\frac{1}{4} q \left(1 + \frac{2\sqrt{2}m}{2+m^2}\right)}.$$

График функции $P_{\Phi M-AM} = f(q)$ для случая $m = 1$ приведен на рис. 11.10.

11.14. На вход приемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32), а $u_i(t)$ — медленно федингующие амплитудно-манипулированные сигналы:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= a \cdot s_1(t) = aA_m \cos(\omega_0 t + \Phi_1) \\ u_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь a — амплитудный множитель, принимающий на интервалах $[0, T]$ случайные значения с плотностью вероятности

$$W_1(a) = \frac{a}{\sigma_\Phi^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\sigma_\Phi^2} + \gamma^2 \right) \right\} I_0 \left(\gamma \frac{a}{\sigma_\Phi} \right), \quad 0 \leq a < \infty.$$

Начальная фаза Φ_1 сигнала $s_1(t)$ является случайной, равномерно распределенной на интервале $[-\pi, \pi]$ и считается несущественным параметром. Параметр λ принимает значение $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$.

Определить структурную схему приемника, осуществляющего оптимальную по критерию идеального наблюдателя обработку колебания $x(t)$, и вычислить соответствующую ей суммарную вероятность ошибочного приема.

Ответ: Оптимальный приемник должен состоять из согласованного фильтра с импульсной переходной функцией $G(t) = s_1(T - t)$, линейного детектора огибающей и порогового устройства с порогом h_0 , определяемым из уравнения

$$e^{-\frac{1}{2} h_0^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}} = \frac{2}{2+\bar{q}} e^{-\frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}} I_0 \left(\gamma h_0 \frac{\sqrt{2\bar{q}}}{2+\bar{q}} \right).$$

При этом вероятность ошибочного приема вычисляется по формуле

$$P_{AM} = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{1}{2} h_0^2} - Q \left(\gamma \sqrt{\frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}}, h_0 \sqrt{\frac{2}{2+\bar{q}}} \right) \right].$$

Для частного случая приема амплитудно-манипулированных сигналов, федингующих по закону Релея ($\gamma = 0$), имеем

$$P_{AM} = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{1}{2} h_0^2} - e^{-\frac{1}{2} h_0^2 \frac{2}{2+\bar{q}}} \right],$$

где h_0 определяется из уравнения

$$e^{-\frac{1}{2} h_0^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}} = \frac{2}{2+\bar{q}}.$$

Здесь

$$\bar{q} = 2\sigma_{\Phi}^2 q_1 = 2\sigma_{\Phi}^2 \frac{2E_1}{N_0} = 2\sigma_{\Phi}^2 \frac{\Lambda_m^2 T}{N_0}.$$

Графики функций $P_{AM} = f_1(\bar{q}, \gamma)$ и $h_0 = f_2(\bar{q}, \gamma)$ приведены соответственно на рис. 11.11 и 11.12. Через \tilde{q} обозначено отношение

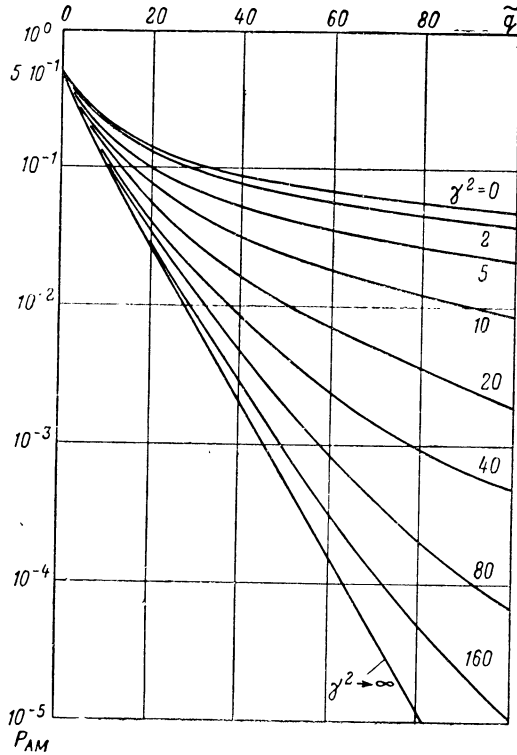


Рис. 11.11. Суммарная вероятность ошибочного приема АМ сигналов со случайными амплитудой и начальной фазой.

сигнал/шум, равное отношению удвоенного среднего значения $\langle E_{u_1} \rangle$ энергии сигнала $u_1(t)$ к спектральной плотности шума $\xi(t)$:

$$\tilde{q} = \frac{2\langle E_{u_1} \rangle}{N_0} = \bar{q} \left(1 + \frac{\gamma^2}{2} \right).$$

11.15. На вход приемного устройства поступает колебание

$$x(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda) u_2(t) + \xi(t),$$

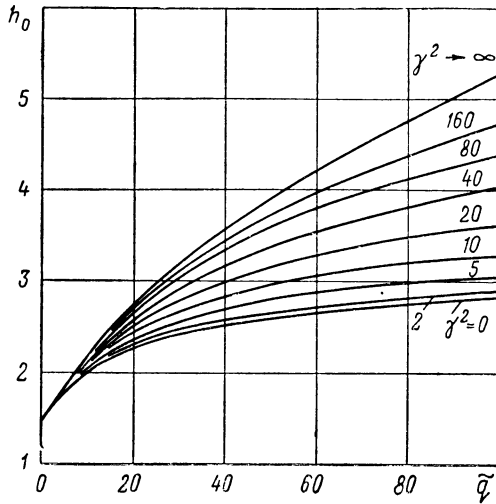


Рис. 11.12. Зависимость оптимального порога от отношения сигнал/шум при приеме АМ сигналов со случайными амплитудой и начальной фазой.

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32), а $u_i(t)$ — медленно федингующие частотно-манипулированные сигналы

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= aA_m \cos(\omega_1 t + \theta) \\ u_2(t) &= aA_m \cos(\omega_2 t + \theta) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь a и θ — амплитудный множитель и фазовый сдвиг, принимающие на интервалах $[0, T]$ случайные значения с плотностью вероятности

$$W_2(a, \theta) = \begin{cases} \frac{a}{2\pi\sigma_\theta^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{\sigma_a^2} + \gamma^2 - \frac{2a\gamma \cos \theta}{\sigma_\theta} \right] \right\}, & \begin{cases} 0 \leq a < \infty, \\ -\pi \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \\ 0 & \text{при других } a \text{ и } \theta. \end{cases}$$

Параметр λ принимает значение $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$ с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$.

Приемное устройство осуществляет оптимальную по критерию идеального наблюдателя обработку принимаемого колебания $x(t)$. Вычислить соответствующую ей суммарную вероятность ошибочного приема для случаев априори известного среднего значения $\langle \theta \rangle$ фазового сдвига θ (квазикогерентный прием) и неизвестного среднего значения $\langle \theta \rangle$ (некогерентный прием) при условии $|\omega_2 - \omega_1| T \gg 1$.

Ответ:

$$P_{\text{ЧМ}} = Q(ac, bc) - \frac{2+\bar{q}}{4+\bar{q}} e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)c^2} I_0(abc^2),$$

где для случая квазикогерентного приема

$$a = \frac{4}{4+\bar{q}}, \quad b = \frac{2(2+\bar{q})}{4+\bar{q}}, \quad c = \gamma \sqrt{\frac{4+\bar{q}}{4\bar{q}}},$$

а для некогерентного приема

$$a = 0, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \gamma \sqrt{\frac{\bar{q}}{2(4+\bar{q})}}.$$

Графики функции $P_{\text{ЧМ}} = f(\bar{q}, \gamma)$ для случаев квазикогерентного и некогерентного приема медленно федингующих частотно-манипулированных сигналов приведены соответственно на рис. 11.13, а и 11.13, б.

11.16. Решить задачу 11.15 для случая оптимального приема медленно федингующих фазо-манипулированных сигналов

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= aA_m \cos(\omega_0 t + \theta) \\ u_2(t) &= aA_m \cos(\omega_0 t + \pi + \theta) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ. При квазикогерентном приеме

$$P_{\text{ФМ}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\gamma^2 \frac{\bar{q}}{2+\bar{q}}}\right),$$

при некогерентном приеме $P_{\text{ФМ}} = 1/2$.

График функции $P_{\text{ФМ}} = f(\bar{q}, \gamma)$ для случая квазикогерентного приема приведен на рис. 11.14.

11.17. Решить задачу 11.15 для случая оптимального приема медленно федингующих тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ — АМ:

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= aA_m [1 + \cos \Omega_1 t] \cos(\omega_0 t + \theta) \\ u_2(t) &= aA_m [1 + \cos \Omega_2 t] \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

при условии $\Omega_i \ll \omega_0$, $T_{\Omega} = 2\pi/\Omega_i \ll T$.

Ответ. При квазикогерентном приеме

$$P_{\text{ЧМ-АМ}} = Q(ac, bc) - \frac{1}{2} b e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)c^2} I_0(abc^2),$$

где

$$a = 1 - \frac{\bar{q} \sqrt{5}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - 4\bar{q}^2}}; \quad b = 1 + \frac{\bar{q} \sqrt{5}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - 4\bar{q}^2}};$$

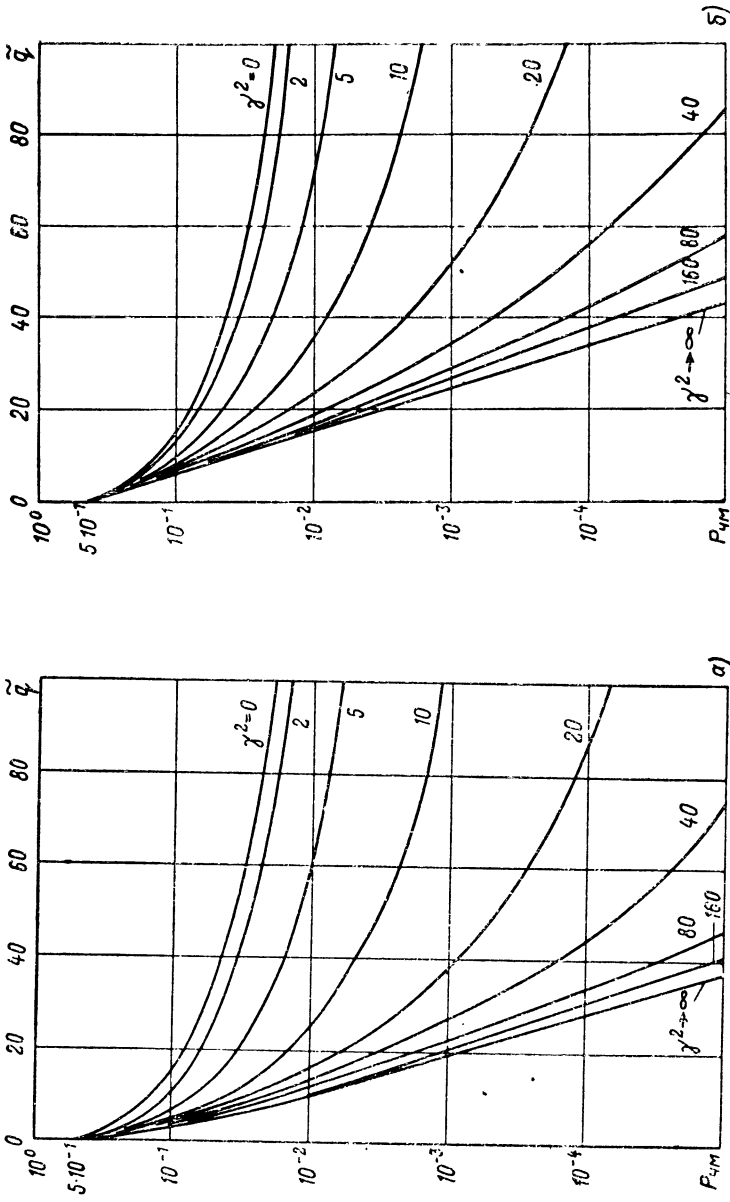


Рис. 11.13. Зависимость суммарной вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при квазикогерентном (а) и некогерентном (б) приеме медленно федингующих ЧМ сигналов.

$$c = \gamma \sqrt{\frac{1}{4q} \left(\bar{q} + \frac{12}{5} \right)};$$

при некогерентном приеме

$$P_{\text{ЧМ-АМ}} = Q(ac, bc) - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\bar{q} \sqrt{5}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - 4q^2}} \right] e^{-c^2} I_0(abc^2),$$

где

$$a = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{5} \sqrt{9(4+\bar{q})^2 - 4q^2}}{9(4+\bar{q}) - 4q}};$$

$$b = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5} \sqrt{9(4+\bar{q})^2 - 4q^2}}{9(4+\bar{q}) - 4q}};$$

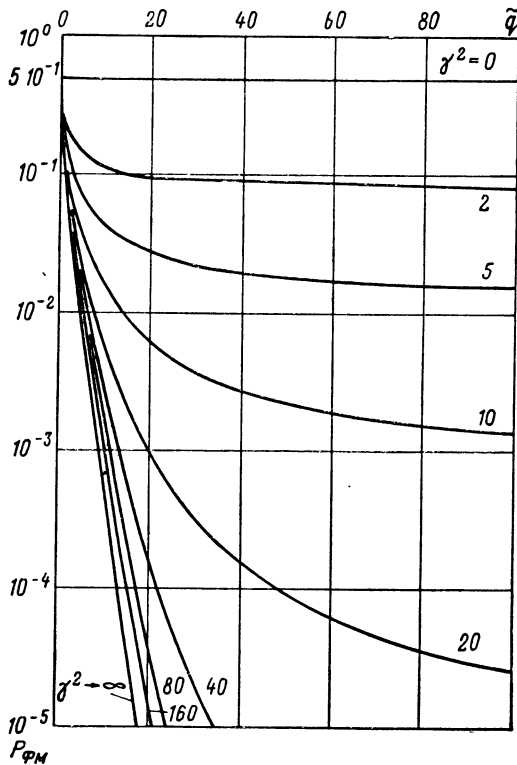


Рис. 11.14. Зависимость суммарной вероятности ошибок от отношения сигнал/шум при квазикогерентном приеме медленно федингующих ФМ сигналов.

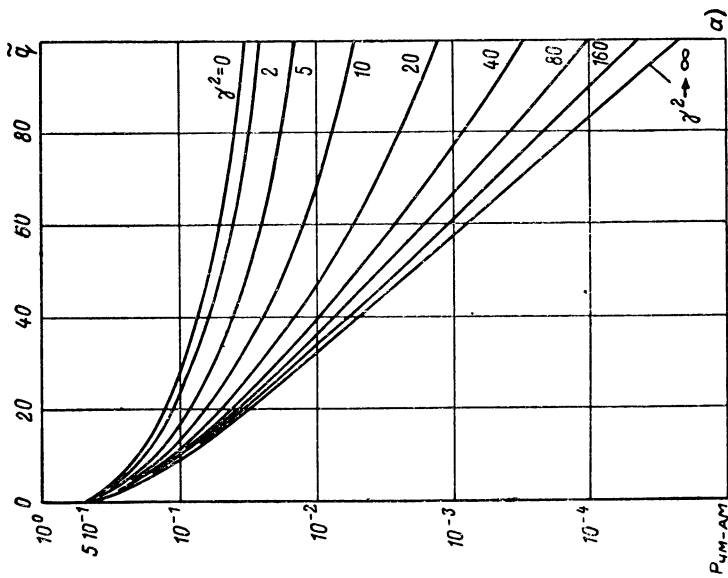
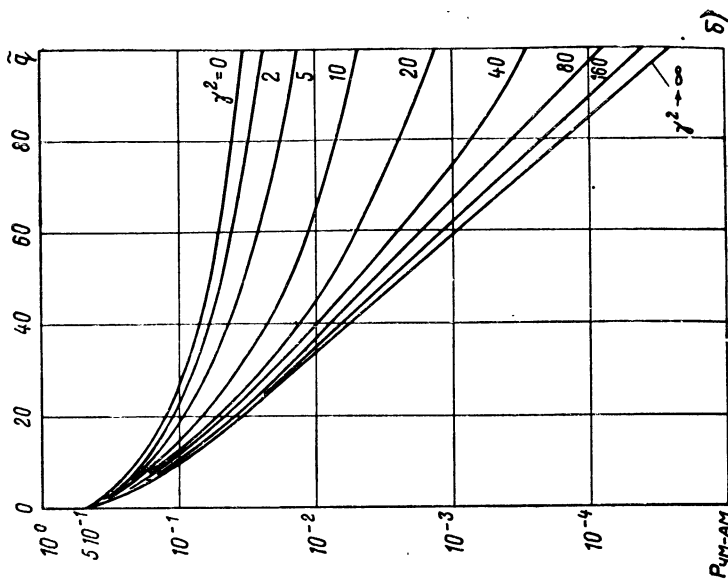


Рис. 11.15. Зависимость суммарной вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при квазикогерентном (а) и некогерентном (б) приеме медленно фединующих ЧМ — АМ сигналов.

$$c = \gamma \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\bar{q}}{q} \frac{9(4+\bar{q})-4\bar{q}}{9(4+q)^2-4\bar{q}^2}}.$$

Графики функций $P_{\text{ЧМ-АМ}} = f(\bar{q}, \gamma)$ для случаев квазикогерентного и некогерентного приема медленно федингующих тонально-манипулированных сигналов вида ЧМ — АМ приведены соответственно на рис. 11.15, а и 11.15, б.

11.18. Решить задачу 11.17 для случая оптимального приема медленно федингующих тонально-манипулированных сигналов вида ФМ — АМ

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= aA_m [1 + \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \theta) \\ u_2(t) &= aA_m [1 - \cos \Omega t] \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ. При квазикогерентном приеме

$$P_{\text{ФМ-АМ}} = Q(ac, bc) - \frac{1}{2} be^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)c^2} I_0(abc^2),$$

где

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{\bar{q} 2\sqrt{2}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}; & b &= 1 + \frac{\bar{q} 2\sqrt{2}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}; \\ c &= \gamma \sqrt{\frac{1}{4q} (\bar{q} + 3)}; \end{aligned}$$

при некогерентном приеме

$$P_{\text{ФМ-АМ}} = Q(ac, bc) - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\bar{q} 2\sqrt{2}}{\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}} \right] e^{-c^2} I_0(abc^2),$$

где

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}{9(4+\bar{q}) - \bar{q}}}; \\ b &= \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}}{9(4+\bar{q}) - \bar{q}}}; \\ &= \gamma c \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\bar{q}}{q} \frac{9(4+\bar{q})^2 - \bar{q}^2}{9(4+\bar{q}) - \bar{q}}}. \end{aligned}$$

Графики функций $P_{\text{ФМ-АМ}} = f(\bar{q}, \gamma)$ для случаев квазикогерентного и некогерентного приема приведены соответственно на рис. 11.16, а и 11.16, б.

11.19. Командный блок (рис. 11.17) беспилотного объекта содержит пороговое устройство, срабатывающее от сигналов $u > h$. Координатор, управляющий работой этого блока, вырабатывает

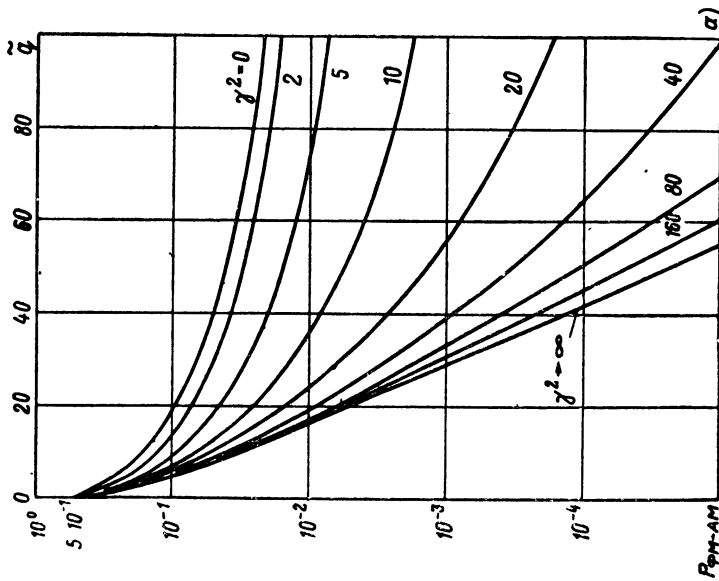
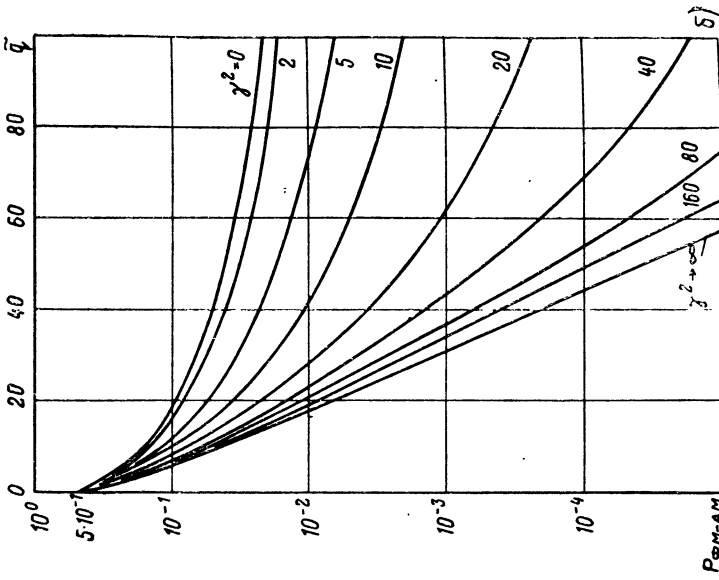


Рис. 11.16. Зависимость суммарной вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при квазикогерентном (а) и некогерентном (б) приеме медленно федингующих ФМ — АМ сигналов.

дискретные сигналы, которые вследствие влияния помех являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону.

Пусть u_1 — сигналы левого разворота, u_2 — сигналы правого разворота, причем средние значения m_i и среднеквадратичные значения σ_i напряжений u_1 и u_2 соответственно равны $m_1 = U_1$, $m_2 = U_2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Порог срабатывания

$$h = \frac{U_1 + U_2}{2}.$$

Определить вероятность $P_{\text{лж}}$ ложных команд, если $U_2 - U_1 = 3\sigma$, а априорные вероятности обеих команд одинаковы: $p(u_1) = p(u_2) = 1/2$.

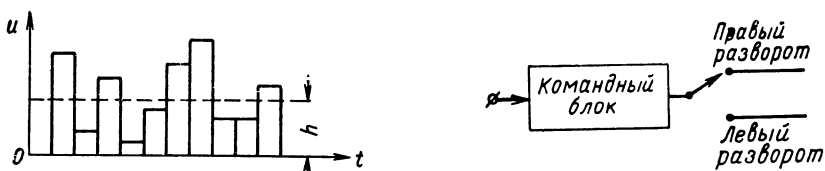


Рис. 11.17. Командный блок линии управления.

Ответ:

$$P_{\text{лж}} = 0,07.$$

11.20. На выходе УПЧ синхронного приемника (рис. 11.18) имеет место колебание

$$x(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_2(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — квазигармонический нормальный шум с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

а $s_i(t)$ — детерминированные амплитудно-манипулированные сигналы

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

На второй вход синхронного детектора подается колебание от местного гетеродина

$$u_r(t) = U_r \cos(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Если напряжение $U(t)$ на выходе синхронного детектора превышает некоторый порог H_0 , принимается решение о приеме сигнала $s_1(t)$ ($\lambda = 1$), в противном случае принимается решение о приеме сигнала $s_2(t)$ ($\lambda = 0$). Априорные вероятности $p(s_i)$ присутствия на выходе УПЧ приемника сигналов $s_i(t)$ равны между собой: $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$.

Определить суммарную вероятность ошибочного приема при условии, что порог H_0 выбран оптимальным по критерию идеального наблюдателя.

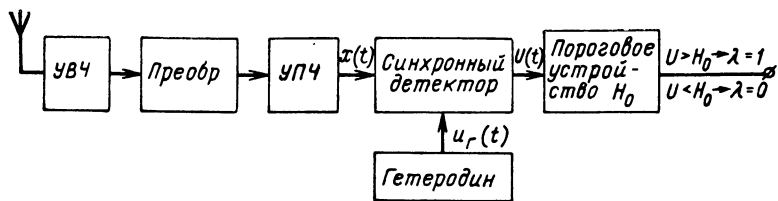


Рис. 11.18. Блок-схема синхронного приемника.

Ответ:

$$P = 1 - \Phi\left(\frac{A_m}{2\sigma}\right), \quad H_0 = \frac{A_m}{2}.$$

11.21. Решить задачу 11.20 для случая приема фазо-манипулированных сигналов

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \pi + \varphi_1) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ответ:

$$P = 1 - \Phi\left(\frac{A_m}{\sigma}\right), \quad H_0 = 0.$$

11.22. На выходе УПЧ приемника, блок-схема которого представлена на рис. 11.8, имеет место колебание

$$x(t) = \lambda u_1(t) + (1 - \lambda) u_2(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — квазигармонический нормальный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

а $u_i(t)$ — амплитудно-манипулированные сигналы

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ u_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Сигнал $u_1(t)$ представляет собой отрезок квазигармонических флуктуаций, огибающая которых распределена по закону Релея:

$$W_1(U) = \frac{U}{\sigma_c^2} \exp\left\{-\frac{U^2}{2\sigma_c^2}\right\}, \quad U \geq 0,$$

а случайная начальная фаза — равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$. Параметр λ принимает значения $\lambda = \lambda_1 = 1$ или $\lambda = \lambda_0 = 0$

с априорными вероятностями $p(\lambda_1) = p(\lambda_0) = 1/2$. Если процесс $U(t)$ на выходе линейного детектора огибающей превышает некоторый порог H_0 , принимается решение $\lambda = 1$, в противном случае принимается $\lambda = 0$.

Определить суммарную вероятность ошибок при условии, что порог H_0 выбран оптимальным по критерию идеального наблюдателя.

Ответ:

$$P = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{H_0^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{H_0^2}{2(\sigma^2 + \sigma_c^2)}} \right],$$

где

$$H_0 = \frac{\sigma}{\sigma_c} \sqrt{2(\sigma^2 + \sigma_c^2) \ln \frac{\sigma^2 + \sigma_c^2}{\sigma^2}}.$$

11.23. Найти структурную схему приемного устройства, осуществляющего оптимальную по критерию Неймана — Пирсона обработку колебания

$$x(t) = \lambda s(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha |t_2 - t_1|},$$

а $s(t)$ — детерминированный сигнал, определенный на интервале $[0, T]$ и равный нулю вне его.

Ответ [7]. Оптимальный приемник должен сформировать величину

$$U = \frac{\alpha}{2\sigma^2} \int_0^T \left[x(t) s(t) + \frac{1}{\alpha^2} \dot{x}(t) \dot{s}(t) \right] dt + \frac{1}{2\sigma^2} [x(0) s(0) + x(T) s(T)]$$

и сравнить ее с порогом h_0 , определяемым заданной вероятностью ложной тревоги

$$F_1 = 1 - \Phi\left(\frac{h_0}{\sigma_0}\right),$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{2\sigma^2} \int_0^T \left[s^2(t) + \frac{1}{\alpha} \dot{s}^2(t) \right] dt + \frac{1}{2\sigma^2} [s^2(0) + s^2(T)].$$

Если $U > h_0$, принимается решение $\lambda = \lambda_1 = 1$, в противном случае принимается $\lambda = \lambda_0 = 0$. Вероятность правильного обнаружения вычисляется по формуле

$$D_1 = 1 - \Phi \left(\frac{h_0}{\sigma_0} - \sigma_0 \right).$$

11.24. Решить задачу 11.23 для случая, когда функция корреляции шума $\xi(t)$ имеет вид

$$k_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha |t_2 - t_1|} \left(\cos \omega (t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega |t_2 - t_1| \right).$$

Ответ [7]. Оптимальный приемник должен сформировать величину

$$U = \frac{1}{2\alpha_0 \omega_0^2 \sigma^2} \int_0^T [\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)] [\ddot{s}(t) + \alpha \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t)] dt + \\ + \frac{x(0)s(0)}{\sigma^2} + \frac{\dot{x}(0)\dot{s}(0)}{\omega_0^2 \sigma^2}, \quad \omega_0^2 = \omega^2 + \alpha^2, \quad \alpha_0 = 2\alpha,$$

и сравнить ее с порогом h_0 , определяемым заданной вероятностью ложной тревоги

$$F_1 = 1 - \Phi \left(\frac{h_0}{\sigma_0} \right),$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{s^2(0)}{\sigma^2} + \frac{\dot{s}^2(0)}{\omega_0^2 \sigma^2} + \frac{1}{2\alpha_0 \omega_0^2 \sigma^2} \int_0^T [\ddot{s}(t) + \alpha_0 \dot{s}(t) + \omega_0^2 s^2(t)]^2 dt.$$

При $U > h_0$ принимается $\lambda = \lambda_1 = 1$, в противном случае принимается $\lambda = \lambda_0 = 0$. Вероятность правильного решения вычисляется по формуле

$$D_1 = 1 - \Phi \left(\frac{h_0}{\sigma_0} - \sigma_0 \right).$$

11.25. На вход оптимального по критерию Неймана — Пирсона приемника поступает колебание

$$x(t) = \lambda u(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (11.32), а $u(t)$ — медленно флуктуирующий сигнал:

$$u(t) = \begin{cases} aA_m \cos(\omega_0 t + \theta), & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Здесь A_m и ω_0 — постоянные величины; θ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$;

a — амплитудный множитель, принимающий на интервале $[0, T]$ случайные значения с плотностью вероятности

$$W_1(a) = \frac{a}{\sigma_\Phi^2} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_\Phi^2}\right\}, \quad 0 \leq a < \infty.$$

Вычислить вероятность ложной тревоги и правильного обнаружения.

Ответ:

$$F_1 = e^{-\frac{1}{2}h_0^2}, \quad D_1 = e^{-\frac{h_0^2}{2+q}}, \quad \bar{q} = 2\sigma_\Phi^2 q, \quad q = \frac{2E}{N_0} = \frac{A_m^2 T}{N_0}.$$

График функции $D_1 = f(\bar{q})$ приведен на рис. 11.4 (штрих-пунктирные линии).

11.26. Найти структуру оптимального по критерию Неймана—Пирсона приемника, предназначенного для обнаружения случайного полезного сигнала в собственном шуме приемника. При этом считать, что:

1) полезный сигнал и собственный шум приемника взаимно независимы, стационарны и распределены по нормальному закону с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ_s^2 и σ_ξ^2 соответственно;

2) выборки x_i из входного процесса, представляющего собой либо один шум, либо сумму полезного сигнала и шума, осуществляются через такой интервал Δ , что $k_s(\Delta) \approx 0$, $k_\xi(\Delta) \approx 0$, где $k_s(\tau)$ и $k_\xi(\tau)$ — соответственно корреляционные функции сигнала и шума. Число выборок n велико.

Ответ. Приемник должен вычислять сумму $U = \sum_{i=1}^n x_i^2$ и сравнивать полученный результат с порогом

$$h_0 = \left[M + \frac{1}{2} \ln(1+a^2) \right] \left[2 \frac{\sigma_\xi^2}{a^2} (1+a^2) \right], \quad a = \frac{\sigma_s}{\sigma_\xi}.$$

Постоянная M выбирается из условия получения заданного значения вероятности ложной тревоги.

11.27. Определить, как изменится структура оптимального приемника, если в условии задачи 11.26 считать, что выборочные значения сигнала и выборочные значения шума коррелированы. Для простоты принять, что число выборок $n = 2$.

Ответ. Приемник должен вычислять сумму

$$U = b_1 x_1^2 + b_1 x_2^2 + b_2 x_1 x_2$$

и сравнивать полученный результат с порогом

$$h_0 = M - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\rho_\xi^2}{(1+a^2)^2 - (a^2 \rho_s + \rho_\xi)^2},$$

где

$$b_1 = \frac{\left[1 - \left(\frac{a^2 \rho_s - \rho_\xi}{a^2 + 1}\right)^2\right] (1 + a^2) - (1 - \rho_\xi^2)}{2\sigma_\xi^2 (1 - \rho_\xi^2) (1 + a^2) \left[1 - \left(\frac{a^2 \rho_s + \rho_\xi}{1 + a^2}\right)^2\right]};$$

$$b_2 = \frac{(1 - \rho_\xi^2) \frac{a^2 \rho_s + \rho_\xi}{1 + a^2} - \rho_\xi (1 + a^2) \left[1 - \left(\frac{a^2 \rho_s + \rho_\xi}{1 + a^2}\right)^2\right]}{\sigma_\xi^2 (1 - \rho_\xi^2) (1 + a^2) \left[1 - \left(\frac{a^2 \rho_s + \rho_\xi}{1 + a^2}\right)^2\right]};$$

ρ_s и ρ_ξ — коэффициенты корреляции между выборочными значениями сигнала и шума соответственно; $a^2 = \sigma_s^2 / \sigma_\xi^2$ — отношение мощности сигнала к мощности шума.

11.28. Найти структуру оптимального по критерию Неймана—Пирсона приемника, предназначенного для обнаружения неслучайного сигнала

$$s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_m , ω_0 и φ — полностью известны, в стационарном нормальном шуме с нулевым средним значением и дисперсией σ_ξ^2 .

Выборочные значения $x_i = x(t_i)$ входного процесса $x(t)$, представляющего собой либо шум, либо сумму сигнала и шума, отбираются через такой интервал Δ , что значение корреляционной функции шума $k_\xi(\Delta) \approx 0$.

Ответ. Приемник должен вычислять сумму $U = \sum_{i=1}^n x_i s_i$ и сравнивать полученный результат с порогом

$$h_0 = M\sigma_\xi^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} s_i^2,$$

где

$$s_i = s(t_i) = A_m \cos(\omega_0 t_i + \varphi);$$

M выбирается из условия получения заданного значения вероятности ложной тревоги.

11.29. Определить, как изменится структурная схема оптимального приемника, если в условии задачи 11.28 принять, что выборочные значения шума коррелированы. Для простоты считать, что число выборок $n = 2$.

Ответ. Приемник должен вычислять сумму $U = b_1 x_1 + b_2 x_2$, где весовые коэффициенты b_i равны:

$$b_1 = s_1 - \rho s_2, \quad b_2 = s_2 - \rho s_1,$$

и сравнивать полученный результат с порогом

$$h_0 = M [\sigma_{\xi}^2 (1 - \rho^2)] + [s_1^2 + s_2^2 - 2\rho s_1 s_2].$$

Здесь обозначено:

$$s_i = s(t_i) = A_m \cos(\omega_0 t_i + \varphi), \quad i = 1, 2,$$

ρ — коэффициент корреляции между выборками x_1 и x_2 . Постоянная M выбирается из условия получения заданного значения вероятности ложного обнаружения.

11.30. Найти оптимальную по критерию Неймана — Пирсона процедуру обработки сигналов на выходе детектора, если на вход детектора с усилителя промежуточной частоты поступает n импульсов, представляющих выборки или стационарного гауссовского шума с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , или суммы этого шума и неслучайного гармонического сигнала с амплитудой A_m .

Период следования импульсов T_n много больше интервала корреляции шума. Одномерные плотности вероятностей напряжения $U(t)$ на выходе детектора огибающей в случае одного шума и суммы сигнала и шума соответственно равны

$$W_1(U | \lambda = 0) = \frac{U}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{U^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad 0 \leq U < \infty,$$

$$W_1(U | \lambda = 1) = \frac{U}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{U^2 + A_m^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{UA_m}{\sigma^2}\right), \quad 0 \leq U < \infty.$$

Ответ. Оптимальный приемник должен вычислять сумму $\sum_{i=1}^n \ln I_0\left(\frac{U_i}{\sigma} a\right)$ и сравнивать полученный результат с порогом $h_0 = M + na^2/2$, где $a^2 = A_m^2/\sigma^2$ — отношение мощности сигнала к мощности шума.

11.31. Производится радиолокационное наблюдение на фиксированной дальности (в точке i экрана индикатора). На данной дальности сигнал от цели может появиться с вероятностью $p = 0,4$. На другой дальности (в смежной точке j экрана) вероятность появления цели практически равна нулю.

Яркость свечения точек на экране пропорциональна напряжению на управляющем электроде индикатора. Плотности вероятностей этого напряжения, обусловленного одной помехой (в точке j) или суммой помехи и случайного сигнала (в точке i), соответственно равны:

$$W_j(x) = x \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} x^2\right\}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

$$W_i(x) = \frac{x}{1+a^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+a^2)}\right\}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

где a^2 — отношение мощности полезного сигнала к мощности помехи на входе приемника.

Решение о наличии сигнала цели в точке i принимается оператором в том случае, если яркость в точке i в 3 раза превышает яркость в смежной точке j .

Найти вероятность D_1 обнаружения цели на данной дальности, если $a^2 = 10$.

Ответ: $D_1 = 0,16$.

11.32. На вход приемника РЛС поступает один импульс, соответствующий либо одной помехе, либо сумме помехи и шумоподобного полезного сигнала.

При поступлении на вход приемника помехи амплитуда импульса на выходе приемника распределена по закону

$$W_1(x | \lambda = 0) = x \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

При поступлении на вход приемника суммы помехи и полезного сигнала амплитуда импульса на выходе приемника имеет плотность вероятности

$$W_1(x | \lambda = 1) = \frac{x}{1 + a^2} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(1 + a^2)} \right\}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

где a^2 — отношение мощности полезного сигнала к мощности помехи на входе приемника.

На выходе приемника имеется пороговое устройство с регулируемым уровнем (порогом) срабатывания h_0 .

Определить величину порога h_0 , при котором вероятность превышения его напряжением помехи (вероятность ложного обнаружения) $F_1 = 10^{-5}$. Найти величину a^2 такую, чтобы при заданном значении h_0 вероятность превышения порога напряжением, соответствующем сумме полезного сигнала и помехи (вероятность обнаружения полезного сигнала), $D_1 = 0,9$.

Ответ:

$$h_0 = \sqrt{23}, \quad a^2 = 100.$$

11.33. На устройство обнаружения, состоящее из интегратора и порогового устройства (рис. 11.19), с выхода приемника поступает последовательность из 30 периодически повторяющихся случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов.

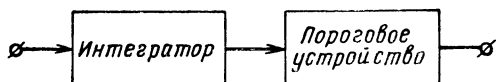


Рис. 11.19. Устройство обнаружения.

Эта последовательность импульсов может представлять либо одну помеху, либо сумму помехи и случайного полезного сигнала.

Если импульсы соответствуют помехе, то амплитуда каждого импульса распределена по закону

$$W_1(x|\lambda=0) = x \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Если импульсы представляют сумму помехи и полезного сигнала, то плотность вероятности амплитуды имеет вид

$$W_1(x|\lambda=1) = \frac{x}{1+a^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+a^2)}\right\}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

где a^2 — отношение мощности полезного сигнала к мощности помехи на входе приемника.

Найти выражение, связывающее вероятность обнаружения полезного сигнала D_1 (вероятность превышения порога напряжением, соответствующим сумме полезного сигнала и помехи) и вероятность ложного обнаружения F_1 (вероятность превышения порога напряжением, соответствующим одной помехе). Вычислить D'_1 , если $a^2 = 0,75$; $F_1 = 10^{-3}$.

Примечание. При решении задачи считать, что число импульсов $n = 30$ достаточно для применения предельной теоремы теории вероятностей.

Ответ:

$$D_1 = 1 - \Phi \left[\frac{30 \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{1+a^2}) + \sqrt{\frac{30}{2}} \frac{4-\pi}{2} \frac{1}{\Phi(1-F_1)}}{\sqrt{30(1+a^2)} \frac{4-\pi}{2}} \right],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx; \quad D'_1 = 0,575.$$

11.34. На вход приемника, функциональная схема которого представлена на рис. 11.20, поступает последовательность из $n \gg 1$ периодически повторяющихся случайных импульсов. Эта последовательность импульсов может представлять либо одну помеху, либо сумму неслучайного полезного сигнала и помехи.

Если последовательность импульсов представляет одну помеху, то плотность вероятности амплитуды любого импульса последовательности на выходе усилителя равна

$$W_1(x|\lambda=0) = x \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Если последовательность соответствует сумме полезного сигнала и помехи, то плотность вероятности амплитуды имеет вид *

$$W_1(x | \lambda = 1) = x \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \right\}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

где a^2 — отношение мощности полезного сигнала к мощности помехи на входе приемника.

Решающее устройство принимает решение о наличии полезного сигнала в том случае, если из n импульсов не менее k_0 превысят порог ограничения h_0 (т. е. если показания счетчика будут не менее k_0).

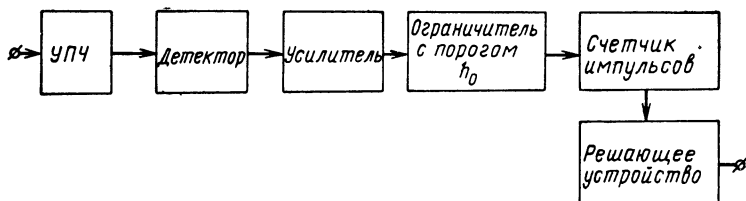


Рис. 11.20 Блок-схема приемника.

Рассчитать вероятность ложного обнаружения F_1 и вероятность правильного обнаружения сигнала D_1 . Получить выражение, связывающее F_1 , D_1 , число импульсов на входе n и отношение мощностей полезного сигнала и помехи a^2 . Найти вероятность обнаружения полезного сигнала D'_1 , если $n = 100$, $a^2/2 = 0,01$, $F_1 = 10^{-3}$, $h_0 = 2$.

Ответ:

$$D_1 = 1 - \Phi \left[\frac{n \left(p - p^{(1 - \frac{a^2}{2})} \right) + \sqrt{p(1-p)} \frac{1}{\Phi(1-F_1)}}{\sqrt{p^{(1 - \frac{a^2}{2})} - p^{(2-a^2)}}} \right],$$

где

$$p = e^{-\frac{1}{2} h_0^2};$$

$$D'_1 = 0,85.$$

11.35. На вход устройства обнаружения сигналов, блок-схема которого представлена на рис. 11.21, поступает последовательность из 6 периодически повторяющихся (с периодом T_n) случайных некоррелированных импульсов. Эта последовательность

* Приведенная формула получена из обобщенного закона Релея в предположении, что $a^2 \ll 1$.

импульсов может представлять либо одну помеху, либо сумму полезного сигнала и помехи.

Если последовательность представляет помеху, то плотность вероятности каждого видеоимпульса (на входе ограничителя) равна

$$W_1(x | \lambda = 0) = x \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Если последовательность представляет сумму помехи и полезного сигнала, то плотность вероятности задается выражением

$$W_1(x | \lambda = 1) = x \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2 + a^2}{2} \right\} I_0(ax), \quad 0 \leq x < \infty,$$

где a^2 — отношение мощности полезного сигнала к мощности помехи на входе приемника.

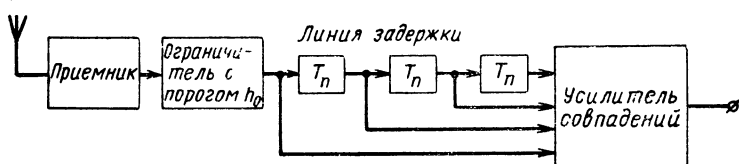


Рис. 11.21. Блок-схема обнаружителя импульсных сигналов.

Решающее устройство принимает решения о наличии сигнала в том случае, если из 6 импульсов 4 или более подряд следующих импульсов превысят порог.

Написать выражения для вероятности обнаружения полезного сигнала D_1 и вероятности ложного обнаружения F_1 .

Ответ:

$$F_1 = p_1^4 [1 + 2(1 - p_1)], \quad D_1 = p_2^4 [1 + 2(1 - p_2)],$$

где

$$p_1 = e^{-\frac{1}{2} h_0^2}; \quad p_2 = \int_{h_0}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}(x^2 + a^2)} I_0(ax) dx = Q(a, h_0).$$

Литература

1. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956.
2. Wald A. Statistical Decision Functions. J. Wiley and Sons, New-York, 1950.
3. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Изд-во «Советское радио», 1955.
4. Middleton D., Van Meter D. Detection and Extraction of Signals in Noise from the Point of View of Statistical Theory. Journ. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, v. 3, № 4; 1956, v. 4, № 2.

5. Van Meter D., Middleton D. Modern Statistical Approaches to Reception in Communication Theory. Trans. IRE on Inform. Theory, 1954, v. IT-4, № 9.
6. Middleton D. Statistical Theory of Signal Detection. Trans. IRE on Inform. Theory, 1954, v. IT-3, № 3.
7. Амиантов И. Н. Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов. Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1958.
8. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне помех. Изд-во «Советское радио», 1960.
9. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
10. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Изд-во «Советское радио», 1962, т. 2.
11. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. Изд-во иностранной литературы, 1963.
12. Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. Изд-во «Советское радио», 1961.
13. Вальд А. Последовательный анализ. Физматгиз, 1962.
14. Башаринов А. Е., Флейшман Б. С. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. Изд-во «Советское радио», 1962.
15. Turin G. L. An Introduction to Matched Filters. Trans. IRE. on Inform. Theory, 1960, v. IT-6, № 3.
16. Лезин Ю. С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. Изд-во «Советское радио», 1963.
17. Helstrom C. W. The Resolution of Signals in White Gaussian Noise. Proc. of the IRE, 1955, v. 43, № 9.
18. Marcus J. I. A Statistical Theory of Target Detection on Pulsed Radar. Trans. IRE on Inform. Theory, 1960, v. IT-6, № 2.
19. Барк Л. С., Большев Л. Н., Кузнецов П. И., Черенков А. П. Таблицы распределения Релея — Райса. Изд. ВЦ АН СССР, 1964.
20. Turin G. L. Error Probabilities for Binary Symmetric Ideal Reception through Nonselective Slow Fading and Noise. Proc. of the IRE, 1958, v. 46, № 9.
21. Константинов П. А. Помехоустойчивость систем связи с тональной манипуляцией при идеальном приеме. «Радиотехника», 1961, т. 16, № 11.

12. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

§ 1. Теоретические сведения

В общем виде задачу оптимальной фильтрации сигналов из шумов можно сформулировать следующим образом. Пусть колебание $x(t)$, принятое на некотором интервале времени, является функцией от сигнала $s[t, \lambda(t)]$ и шума $n(t)$:

$$x(t) = F\{s[t, \lambda(t)], n(t)\}. \quad (12.1)$$

Сигнал $s[t, \lambda(t)]$ в общем случае может зависеть не от одного, а от нескольких параметров $\lambda_i(t)$, причем либо сам сигнал $s[t, \lambda(t)]$ либо его параметр $\lambda(t)$ являются случайными процессами. Вид функции $F\{s, n\}$, т. е. способ комбинирования сигнала и шума, и некоторые статистические характеристики сигнала и шума предполагаются априорно известными. Используя эти априорные данные, необходимо определить устройство (рис. 12.1), решающее оптимальным образом, какая реализация самого сигнала $s[t, \lambda(t)]$ или его параметра $\lambda(t)$ содержится в принятом колебании (12.1).

Из-за наличия шума $n(t)$ и случайного характера сигнала $s[t, \lambda(t)]$ оценка реализации сигнала $\hat{s}[t, \lambda(t)]$ или его параметра $\hat{\lambda}(t)$ не будет совпадать с истинной реализацией, т. е. будут иметь место ошибки фильтрации. Для количественной характеристики качества фильтрации можно использовать различные критерии [1]. Наиболее часто в задачах фильтрации используются критерий минимума среднеквадратичной погрешности, критерий максимального отношения сигнал/шум и критерий максимума апостериорной вероятности.

В зависимости от дополнительных предположений о характере сигнала и шума сформулированная выше задача решается методами

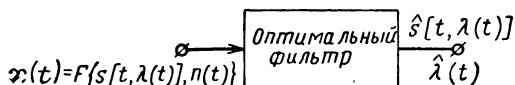


Рис. 12.1. Оптимальный фильтр.

линейной или нелинейной фильтрации. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь задач линейной фильтрации. Кроме этого, будем предполагать, что сигнал и шум взаимодействуют аддитивно, т. е.

$$x(t) = s[t, \lambda(t)] + n(t). \quad (12.1a)$$

Оптимальная линейная фильтрация по критерию минимума среднеквадратичной ошибки [1 — 14]. Предположим, что входящие в (12.1a) сигнал $s[t, \lambda(t)] = s(t)$ и шум $n(t)$ представляют собой стационарные нормальные случайные процессы с известными корреляционными функциями

$$k_s(\tau) = \langle s(t) s(t + \tau) \rangle = \sigma_s^2 R_s(\tau),$$

$$k_n(\tau) = \langle n(t) n(t + \tau) \rangle = \sigma_n^2 R_n(\tau),$$

$$k_{sn}(\tau) = \langle s(t) n(t + \tau) \rangle.$$

Требуется определить систему, которая из принимаемой смеси

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (12.1b)$$

с минимальной среднеквадратичной ошибкой выделяет не параметр $\lambda(t)$, а сам полезный сигнал $s(t)$. Таким образом, искомая оптимальная система должна минимизировать величину

$$\varepsilon^2 = \langle [\hat{s}(t) - s(t + \Delta)]^2 \rangle. \quad (12.2)$$

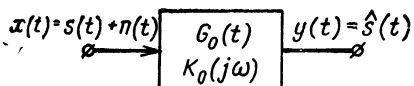


Рис. 12.2. Линейный фильтр.

В (12.2) для общности введен временной сдвиг Δ . При $\Delta > 0$ оценка $\hat{s}(t)$ на выходе системы должна предсказывать (прогнозировать) значение входного сигнала $s(t)$ на Δ вперед, при $\Delta = 0$ задача сводится к выделению (сглаживанию) сигнала $s(t)$ из колебания $x(t)$.

Строгое математическое решение сформулированной задачи для случая полубесконечного интервала наблюдения $(-\infty, t)$ было дано А. Н. Колмогоровым [2] и Н. Винером [3]. Ими, в частности, было показано, что оптимальное по критерию минимума среднеквадратичной ошибки устройство в данном случае относится к классу линейных фильтров с постоянными параметрами. Основные результаты теории Колмогорова — Винера заключаются в следующем.

Предположим, что на вход физически реализуемой линейной системы (рис. 12.2) с импульсной переходной функцией (импульсной характеристикой)

$$G(t) = \begin{cases} G(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (12.3)$$

воздействует стационарный случайный процесс $x(t)$. При этом стационарный случайный процесс $y(t) = \hat{s}(t)$ на ее выходе будет определяться соотношением

$$y(t) = \hat{s}(t) = \int_0^{\infty} G(\tau) x(t-\tau) d\tau. \quad (12.4)$$

Подставляя (12.4) в (12.2), получаем следующее выражение для среднеквадратичной ошибки фильтрации:

$$\varepsilon^2 = \left\langle \left[\int_0^{\infty} G(\tau) x(t-\tau) d\tau - s(t+\Delta) \right]^2 \right\rangle,$$

которое после несложных преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & k_s(0) - 2 \int_0^{\infty} G(\tau) k_{sx}(\tau + \Delta) d\tau + \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G(\tau_1) G(\tau_2) k_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Здесь $k_{sx}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция процессов $s(t)$ и $x(t)$:

$$k_{sx}(\tau) = \langle s(t) x(t+\tau) \rangle, \quad (12.6)$$

а $k_x(\tau)$ — корреляционная функция случайного процесса $x(t)$:

$$k_x(\tau) = \langle x(t) x(t+\tau) \rangle. \quad (12.7)$$

Для того чтобы определить импульсную характеристику $G_0(t)$ оптимального фильтра, минимизирующего среднеквадратичную ошибку (12.5), воспользуемся известным приемом вариационного исчисления. Пусть

$$G(t) = G_0(t) + \mu g(t), \quad (12.8)$$

где μ — параметр, не зависящий от t , а $g(t)$ — произвольная функция. При этом условии минимума среднеквадратичной ошибки принимает вид

$$\left. \frac{d\varepsilon^2}{d\mu} \right|_{\mu=0} = 0. \quad (1.9)$$

После подстановки (12.8) в (12.5) условие (12.9) принимает вид

$$\int_0^{\infty} g(\tau) \left[\int_0^{\infty} G_0(\nu) k_x(\tau - \nu) d\nu - k_{sx}(\tau + \Delta) \right] d\tau = 0.$$

Поскольку это соотношение должно выполняться при произвольной функции $g(t)$, то отсюда следует, что импульсная переходная функция $G_0(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_0^{\infty} G_0(\nu) k_x(\tau - \nu) d\nu = k_{sx}(\tau + \Delta), \quad \tau \geq 0. \quad (12.10)$$

Это интегральное уравнение является основным уравнением теории линейной фильтрации и называется уравнением Винера — Хопфа [4].

Таким образом, задача нахождения оптимального сглаживающего ($\Delta = 0$) или прогнозирующего ($\Delta > 0$) физически реализуемого фильтра сводится к решению интегрального уравнения (12.10). Решение этого уравнения в общем случае встречает известные трудности, обусловленные главным образом требованием физической реализуемости оптимального фильтра. Однако в частном, но весьма важном с практической точки зрения случае дробно-рациональной спектральной плотности $S_x(\omega)$ входного процесса $x(t)$ из (12.10) можно получить следующее выражение для передаточной функции $K_0(j\omega)$:

$$K_0(j\omega) = \frac{1}{2\pi F(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{sx}(\Omega)}{F^*(j\Omega)} e^{j\Omega(\tau+\Delta)} d\Omega. \quad (12.11)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} F(j\omega) F^*(j\omega) &= |F(j\omega)|^2 = S_x(\omega), \\ S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ S_{sx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_{sx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

При этом минимальная среднеквадратичная ошибка фильтрации равна

$$\epsilon_{\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_s(\omega) - |K_0(j\omega)|^2 S_x(\omega)] d\omega, \quad (12.13)$$

где

$$S_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (12.14)$$

Для частного случая сглаживания аддитивной смеси взаимно независимых стационарных случайного процесса $s(t)$ и белого шума $n(t)$ с функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

формула (12.11) упрощается [14]:

$$K_0(j\omega) = 1 - \frac{\frac{N_0}{2}}{\left[S_s(\omega) + \frac{N_0}{2} \right]_+}. \quad (12.11a)$$

Индекс «+» у выражения в квадратных скобках означает, что если это выражение разложить на простые дроби, то в разложении должны быть оставлены только те из них, которые соответствуют полюсам, расположенным в верхней полуплоскости. Все простые дроби функции $F(\omega) = S_s(\omega) + \frac{N_0}{2}$, соответствующие полюсам в нижней полуплоскости, а также целая часть $F(\omega)$ должны быть отброшены. Минимальная среднеквадратичная ошибка для рассматриваемого случая может быть вычислена по формуле [14]

$$\epsilon_{\min}^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2S_s(\omega)}{N_0} \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (12.13a)$$

Практические вычисления по формуле (12.11) оказываются довольно громоздкими. Значительное упрощение получается, если не накладывать на оптимальный фильтр требования физической реализуемости (12.3), т. е. полагать в (12.4) и последующих формулах нижний предел равным $-\infty$. При этом вместо уравнения (12.10) получаем интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\nu) k_x(\tau - \nu) d\nu = k_{sx}(\tau + \Delta), \quad (12.15)$$

решение которого приводит к следующему выражению для передаточной функции физически нереализуемого оптимального фильтра:

$$K_0(j\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_x(\omega)} e^{j\omega\Delta}. \quad (12.16)$$

Минимальная среднеквадратичная ошибка и в этом случае вычисляется по формуле (12.13). Для частного случая статистически независимых сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$, имеющих нулевые средние значения, формула (12.16) приводится к виду

$$K_0(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)} e^{j\omega\Delta}. \quad (12.16a)$$

Хотя соотношения (12.16) и (12.16а) соответствуют физически нереализуемым оптимальным фильтрам, они весьма полезны, так как любой физически реализуемый фильтр не может дать меньшей среднеквадратичной ошибки, чем фильтры, определяемые (12.16) и (12.16а). Объясняется это тем, что наложение на фильтр условия физической реализуемости (12.3) сужает возможности выбора оптимальной характеристики фильтра и по этой причине может привести лишь к ухудшению конечного результата.

Обобщение результатов теории Колмогорова — Винера на случай конечного времени наблюдения дано в работе [5]. В работах [6, 7] рассмотрена задача линейной фильтрации нестационарных процессов.

Оптимальная линейная фильтрация по критерию максимума отношения сигнал/шум [1,9,10, 15—19]. Предположим, что на вход линейного фильтра с передаточной функцией $K(j\omega)$ поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (12.17)$$

где $n(t)$ — стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_n(\omega)$; $s(t)$ — статистически независимый с $n(t)$ полезный сигнал, форма которого, т. е. спектр $S(j\omega)$, заранее известна. При этих условиях процесс $y(t)$ на выходе фильтра равен

$$y(t) = s_{\text{вых}}(t) + n_{\text{вых}}(t), \quad (12.18)$$

где $s_{\text{вых}}(t)$ и $n_{\text{вых}}(t)$ — результаты преобразования сигнала и помехи линейным фильтром. Сигнальная составляющая $s_{\text{вых}}(t)$ определяется соотношением

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (12.19)$$

а дисперсия выходного шума $n_{\text{вых}}(t)$ вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega. \quad (12.20)$$

Введем в рассмотрение отношение

$$a = \frac{|s_{\text{вых}}(T)|}{\sigma_{\text{вых}}}, \quad (12.21)$$

представляющее собой отношение мгновенного значения сигнала на выходе фильтра в некоторый момент времени $t = T$ к среднеквадратичному значению выходного шума. В соответствии с (12.19) и (12.20) это отношение равно

$$a = \frac{\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|}{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (12.22)$$

Линейный фильтр, максимизирующий отношение (12.22), называется фильтром, оптимальным по критерию максимума отношения сигнал/шум. Можно показать [14, 15], что передаточная функция такого фильтра равна

$$K_0(j\omega) = C \frac{S^*(j\omega)}{S_n(\omega)} e^{-j\omega T}, \quad (12.23)$$

где C — некоторая постоянная, а $S^*(j\omega)$ — функция, комплексно сопряженная со спектром $S(j\omega)$ входного сигнала $s(t)$.

Если входящий в (12.17) случайный процесс $n(t)$ представляет собой стационарный нормальный белый шум с энергетическим спектром $S_n(\omega) = N_0/2$, то формула (12.23) приводится к виду

$$K_0(j\omega) = kS^*(j\omega)e^{-j\omega T}. \quad (12.24)$$

Таким образом, в случае приема аддитивной смеси сигнала и белого шума передаточная функция фильтра, оптимального по критерию максимального отношения сигнал/шум, полностью определяется спектром входного сигнала. В соответствии с этим оптимальные фильтры с передаточными функциями (12.24) называют согласованными.

Определим импульсную переходную функцию согласованного фильтра:

$$G_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (12.25)$$

После подстановки (12.24) в (12.25) получаем

$$G_0(t) = ks(T-t), \quad (12.26)$$

где k — некоторая постоянная величина, имеющая смысл коэффициента усиления.

§ 2. Примеры

Пример 12.1. Имеется аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (12.27)$$

а $s(t)$ — статистически независимый от $n(t)$ стационарный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Требуется определить передаточную функцию $K_0(j\omega)$ физически реализуемого прогнозирующего фильтра, минимизирующего среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t + \Delta)]^2 \rangle.$$

Решение. В соответствии с (12.11) можем написать

$$K_0(j\omega) = \frac{1}{2\pi F(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{sx}(\Omega)}{F^*(j\Omega)} e^{j\Omega(\tau+\Delta)} d\Omega,$$

где

$$F(j\omega) F^*(j\omega) = |F(j\omega)|^2 = S_x(\omega).$$

Поскольку по условию задачи $s(t)$ и $n(t)$ статистически независимы, то

$$S_{sx}(\omega) = S_s(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2},$$

$$S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega) = \frac{N_0 + 2 + N_0 \omega^2}{2(1 + \omega^2)}.$$

Отсюда следует, что

$$F(j\omega) = \frac{\sqrt{N_0 + 2} + j\omega \sqrt{N_0}}{\sqrt{2}(1 + j\omega)},$$

$$F^*(j\omega) = \frac{\sqrt{N_0 + 2} - j\omega \sqrt{N_0}}{\sqrt{2}(1 - j\omega)}.$$

Таким образом, искомая передаточная функция определяется соотношением

$$K_0(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{\pi(\sqrt{N_0 + 2} + j\omega \sqrt{N_0})} \int_0^{\infty} I(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

где

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + j\Omega)(\sqrt{N_0 + 2} - j\Omega \sqrt{N_0})} e^{j\Omega(\tau + \Delta)} d\Omega.$$

Учитывая, что [20]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\beta + jx)^{-2\mu} (\gamma - jx)^{-2\nu} e^{-jpx} dx =$$

$$= 2\pi (\beta + \gamma)^{-\mu-\nu} \frac{(-p)^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(2\mu)} e^{\frac{\beta-\gamma}{2}p} W_{\mu-\nu, \frac{1}{2}-\mu-\nu}(-\beta p - \gamma p), p < 0,$$

где $W_{\lambda, \mu}(z)$ — функция Уиттекера, находим

$$I(\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{N_0}} \left(\frac{\sqrt{N_0+2}}{\sqrt{N_0}} + 1 \right)^{-1} e^{-\frac{\sqrt{N_0}-\sqrt{N_0+2}}{2\sqrt{N_0}}(\tau+\Delta)} \times \\ \times W_{0, -\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{N_0+2} + \sqrt{N_0}}{\sqrt{N_0}}(\tau+\Delta) \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{N_0+2} + \sqrt{N_0}} e^{-(\tau+\Delta)}.$$

После подстановки $I(\tau)$ в $K_0(j\omega)$ и ряда несложных преобразований окончательно получим

$$K_0(j\omega) = K_0 \frac{1}{1+j\omega T_0},$$

где

$$K_0 = \frac{2}{\sqrt{N_0+2}(\sqrt{N_0+2} + \sqrt{N_0})} e^{-\Delta}, \\ T_0 = \sqrt{\frac{N_0}{N_0+2}}.$$

Таким образом, искомым прогнозирующий фильтр может быть представлен в виде последовательного соединения усилителя с коэффициентом усиления K_0 и интегрирующей цепочки RC с постоянной времени $RC = T_0$ (рис. 12.3).

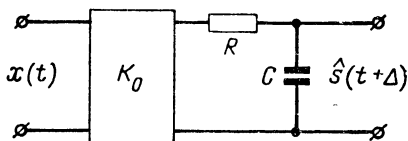


Рис. 12.3. Прогнозирующий фильтр.

Пример 12.2. На вход фильтра воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью (12.27), а $s(t)$ — статистически независимый от $n(t)$ стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции $k_s(\tau) = \sigma_s^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Определить передаточную функцию $K_0(j\omega)$ физически нереализуемого сглаживающего линейного фильтра и вычислить соответствующую ему минимальную среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t)]^2 \rangle.$$

Решение. В соответствии с (12.16а) искомая передаточная функция равна

$$K_0(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)}.$$

Энергетический спектр процесса $s(t)$ равен

$$S_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \alpha\sigma_s^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

Подставляя $S_s(\omega)$ в $K_0(j\omega)$, находим

$$K_0(j\omega) = \frac{2\alpha\sigma_s^2 (A + B)}{2\alpha\sigma_s^2 (A + B) + N_0 AB},$$

где $A = \alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2$, $B = \alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2$.

Значение среднеквадратичной ошибки находим из (12.13):

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sigma_s^2 \sqrt{\frac{\alpha N_0}{\alpha N_0 + 2\sigma_s^2}}.$$

Пример 12.3. На вход RC -фильтра (рис.12.4) поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t)$ — стационарный нормальный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \frac{A^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

а $n(t)$ — статистически независимый от $s(t)$ стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью (12.27).

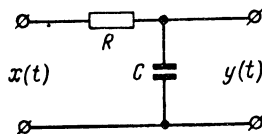


Рис. 12.4. Интегрирующая цепочка RC .

Найти оптимальное значение постоянной времени $T = RC$, минимизирующее среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t)]^2 \rangle,$$

и определить величину ε_{\min}^2 .

Решение. Обозначим импульсную переходную функцию RC-фильтра через $G(t)$. Тогда разность

$$\xi(t) = y(t) - s(t)$$

можно представить в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) x(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t s(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = s_1(t) + n_1(t),$$

где

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^t [G(t-\tau) - \delta(t-\tau)] s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) s(\tau) d\tau;$$

$$n_1(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) n(\tau) d\tau.$$

По условию задачи процессы $s(t)$ и $n(t)$ взаимно некоррелированы, вследствие чего взаимно некоррелированы и процессы $s_1(t)$ и $n_1(t)$. Таким образом, спектральная плотность процесса $\xi(t)$ равна

$$S_{\xi}(\omega) = S_{s_1}(\omega) + S_{n_1}(\omega),$$

где $S_{s_1}(\omega)$ и $S_{n_1}(\omega)$ — энергетические спектры процессов $s_1(t)$ и $n_1(t)$, равные

$$S_{s_1}(\omega) = S_s(\omega) |K_1(j\omega)|^2,$$

$$S_{n_1}(\omega) = S_n(\omega) |K(j\omega)|^2.$$

Здесь

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{-j\omega u} du,$$

$$K_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [G(u) - \delta(u)] e^{-j\omega u} du,$$

Следовательно, дисперсия процесса $\xi(t)$ равна

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 = \varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_s(\omega) |K(j\omega) - 1|^2 + \\ &+ S_n(\omega) |K(j\omega)|^2] d\omega. \end{aligned}$$

По условию задачи

$$K(j\omega) = \frac{\beta}{\beta + j\omega}, \quad \beta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{T}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A^2 \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)} + \frac{\beta^2 N_0}{2(\beta^2 + \omega^2)} \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{\alpha + \beta} + \frac{N_0}{2} \beta \right). \end{aligned}$$

Для нахождения оптимального значения $\beta = 1/T$ составим производную от ε^2 по β :

$$\frac{d\varepsilon^2}{d\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{2} - \frac{A^2}{(\alpha + \beta)^2} \right).$$

Отсюда следует, что при $N_0 < 2A^2/\alpha^2$ оптимальное значение постоянной времени RC -фильтра

$$T_0 = \frac{1}{\beta_0} = \frac{\sqrt{N_0}}{\sqrt{2A - \alpha\sqrt{N_0}}},$$

а соответствующая минимальная среднеквадратичная ошибка сглаживания равна

$$\varepsilon_{\min}^2 = A \sqrt{\frac{N_0}{2} - \frac{\alpha N_0}{4}}.$$

Если же $N_0 \geq 2A^2/\alpha^2$, то оптимальное значение $T_0 = 1/\alpha \rightarrow \infty$, а среднеквадратичная ошибка

$$\varepsilon_{\min}^2 \rightarrow \frac{A^2}{2\alpha}.$$

Пример 12.4. Сохраняя условия примера 12.3, найти оптимальное значение постоянной времени $T = RC$, минимизирующее среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t + \Delta)]^2 \rangle.$$

Решение. В данном примере

$$\xi(t) = y(t) - s(t + \Delta) = s_1(t) + n_1(t),$$

где

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^t [G(t - \tau) - \delta(t + \Delta - \tau)] s(\tau) d\tau,$$

$$n_1(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) n(\tau) d\tau.$$

Поскольку процессы $s_1(t)$ и $n_1(t)$ взаимно некоррелированы, спектральная плотность процесса $\xi(t)$ равна

$$S_{\xi}(\omega) = S_{s_1}(\omega) + S_{n_1}(\omega),$$

где

$$S_{s1}(\omega) = S_s(\omega) |K_1(j\omega)|^2;$$

$$S_{n1}(\omega) = S_n(\omega) |K(j\omega)|^2.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} K_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(u) e^{-j\omega u} du = \int_{-\infty}^{\infty} [G(u) - \delta(u + \Delta)] e^{-j\omega u} du = \\ &= K(j\omega) - e^{j\omega\Delta}, \end{aligned}$$

находим

$$S_{\xi}(\omega) = S_s(\omega) |K(j\omega) - e^{j\omega\Delta}|^2 + S_n(\omega) |K(j\omega)|^2.$$

Отсюда дисперсия процесса $\xi(t)$ равна

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 = \varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_s(\omega) |K(j\omega) - e^{j\omega\Delta}|^2 + S_n(\omega) |K(j\omega)|^2] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left| \frac{\beta}{\beta + j\omega} - e^{j\omega\Delta} \right|^2 + \frac{N_0 \beta^2}{2(\beta^2 + \omega^2)} \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2A^2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\Delta}) - \frac{A^2}{\alpha + \beta} (1 - 2e^{-\alpha\Delta}) + \beta \frac{N_0}{2} \right]. \end{aligned}$$

Анализируя зависимость ε^2 от β , нетрудно установить, что при $\Delta \geq \ln 2/\alpha$ наименьшее значение среднеквадратичной ошибки ε_{\min}^2 имеет место при $\beta = 1/T = 1/RC = 0$ и равно

$$\varepsilon_{\min}^2 = \frac{A^2}{2\alpha}.$$

Если $\Delta < \ln 2/\alpha$ и

$$\left[\frac{2A^2}{N_0} (2e^{-\alpha\Delta} - 1) \right]^{\frac{1}{2}} - \alpha < 0,$$

то наименьшее значение ε^2 также имеет место при $\beta = 0$. В случае $\Delta < \ln 2/\alpha$ и

$$\left[\frac{2A^2}{N_0} (2e^{-\alpha\Delta} - 1) \right]^{\frac{1}{2}} - \alpha > 0$$

минимальное значение ε_{\min}^2 обеспечивается при

$$\beta = \frac{1}{T} = \left[\frac{2A^2}{N_0} (2e^{-\alpha\Delta} - 1) \right]^{\frac{1}{2}} - \alpha.$$

Пример 12.5. На вход линейного фильтра воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум, а $s(t)$ — статистически независимый от шума $n(t)$ экспоненциальный видеоимпульс (рис. 12.5):

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{A(t-T)}, & t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Определить передаточную функцию $K_0(j\omega)$ фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе.

Решение. Вычислим спектр сигнала $s(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = Ae^{-AT} \int_{-\infty}^T e^{(A-j\omega)t} dt = \frac{A}{A-j\omega} e^{-j\omega T}.$$

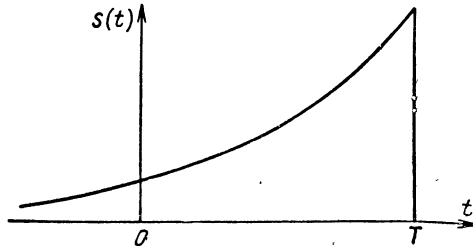


Рис. 12.5. Экспоненциальный видеоимпульс.

Используя соотношение (12.24), находим искомую передаточную функцию:

$$K_0(j\omega) = kS^*(j\omega)e^{-j\omega T} = \frac{k_1}{A+j\omega}.$$

Таким образом, фильтр, согласованный с данным сигналом, может быть реализован в виде цепочки RC (рис. 12.4), у которой $RC = 1/A$.

Пример 12.6. Определить передаточную функцию фильтра, согласованного с сигналом

$$s(t) = Ae^{-\left(\frac{2t}{\tau_n}\right)^2},$$

где τ_n — длительность импульса $s(t)$ на уровне A/e .

Решение. Вычислим спектр видеоимпульса $s(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = b \cdot \exp\left\{-\frac{f^2}{\Delta f^2}\right\},$$

где $\Delta f = 2,25/\tau_n$ — ширина спектра $S(j\omega)$ на уровне b/e . Используя (12.24), находим

$$K_0(j\omega) = K_0 e^{-\left(\frac{f}{\Delta f}\right)^2 - j\omega T}.$$

Пример 12.7. Найти фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}, \\ 0 & \text{при других } t, \end{cases}$$

и вычислить отношение сигнал/шум на его выходе.

Решение. Спектр прямоугольного видеоимпульса равен

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\tau_{\text{и}}} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_{\text{и}}}).$$

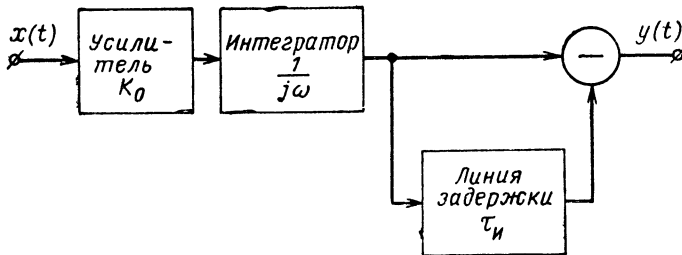


Рис. 12. 6. Фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом.

Таким образом, передаточная функция $K(j\omega)$ фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом длительностью $\tau_{\text{и}}$, имеет вид

$$K_0(j\omega) = kS^*(j\omega) e^{-j\omega T} = \frac{K_0}{j\omega} (e^{j\omega\tau_{\text{и}}} - 1) e^{-j\omega T}.$$

Если интервал наблюдения совпадает с длительностью импульса, т. е. $T = \tau_{\text{и}}$, то

$$K_0(j\omega) = \frac{K_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_{\text{и}}}).$$

Блок-схема такого фильтра приведена на рис. 12.6.

Определим сигнал на выходе фильтра, имея в виду, что в соответствии с (12.26) его импульсная переходная функция

$$G_0(t) = K_0 s(T-t) = K_0 s(\tau_{\text{и}} - t).$$

Следовательно,

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^t G_0(\tau) s(t-\tau) d\tau = K_0 \int_0^t s(\tau_{\text{и}} - \tau) s(t-\tau) d\tau.$$

Нетрудно видеть, что максимальное значение $[s_{\text{вых}}(t)]_{\text{max}}$ имеет место при $t = \tau_{\text{и}}$ и равно

$$[s_{\text{вых}}(t)]_{\text{max}} = K_0 A^2 \tau_{\text{и}} = K_0 E,$$

где $E = A^2 \tau_{\text{и}}$ — энергия сигнала $s(t)$.

Вычислим дисперсию шума на выходе согласованного фильтра, полагая, что спектральная плотность входного шума равна

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega = \frac{K_0^2 N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega \tau_n) d\omega = \frac{K_0^2 N_0 E}{2}.$$

Следовательно, максимальное отношение сигнал/шум равно

$$a = \frac{[s_{\text{вых}}(t)]_{\text{max}}}{\sigma_{\text{вых}}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}.$$

Пример 12.8. На вход интегрирующей цепочки RC (рис. 12.4) воздействует аддитивная смесь статистически независимых стационарного нормального белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью (12.27) и прямоугольного видеоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} U_m, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Под выходным отношением сигнал/шум a понимается отношение максимального значения сигнала на выходе к среднеквадратичному значению выходного шума:

$$a = \frac{[s_{\text{вых}}(t)]_{\text{max}}}{\sigma_{\text{вых}}}.$$

Требуется: а) вывести соотношение, связывающее отношение сигнал/шум на выходе цепочки RC с длительностью импульса τ_n и энергетической шумовой полосой Δf_0 цепи RC ; б) определить, в каком соотношении должны находиться длительность импульса и оптимальная энергетическая шумовая полоса $(\Delta f_0)_{\text{opt}}$, при которой на выходе RC -цепи имеет место максимальное отношение сигнал/шум.

Решение. В соответствии с теоремой Винера — Хинчина дисперсия $\sigma_{\text{вых}}^2$ стационарного шума на выходе цепочки RC равна

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega.$$

Подставляя в это выражение

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

находим

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{N_0}{4RC} = \frac{N_0}{2} \Delta f_{\text{ш}},$$

где $\Delta f_{\text{ш}} = 1/2RC$ — энергетическая шумовая полоса цепи RC .

Полезный сигнал на выходе рассматриваемого фильтра равен

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t G(t-\tau) s(\tau) d\tau,$$

где

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC} \exp\left\{-\frac{1}{RC} t\right\}, & 0 \leq t, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

В результате несложных вычислений находим

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = U_m \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t}\right) 1_0(t) - U_m \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} (t-\tau_{\text{и}})}\right) 1_0(t-\tau_{\text{и}}),$$

где $1_0(t)$ — единичная функция:

$$1_0(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Максимальное значение $[s_{\text{ВЫХ}}(t)]_{\text{max}}$ имеет место при $t = \tau_{\text{и}}$, т. е. в момент окончания входного импульса, и равно

$$[s_{\text{ВЫХ}}(t)]_{\text{max}} = s_{\text{ВЫХ}}(\tau_{\text{и}}) = U_m \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \tau_{\text{и}}}\right).$$

В соответствии с этим максимальное отношение сигнал/шум на выходе равно

$$a = \frac{[s_{\text{ВЫХ}}(t)]_{\text{max}}}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} = \frac{\sqrt{2} U_m}{\sqrt{N_0} \Delta f_{\text{ш}}} \left(1 - e^{-2\Delta f_{\text{ш}} \tau_{\text{и}}}\right).$$

Для определения зависимости между длительностью импульса $\tau_{\text{и}}$ и оптимальной энергетической шумовой полосой $(\Delta f_{\text{ш}})_{\text{opt}}$ необходимо вычислить производную от a по $\Delta f_{\text{ш}}$:

$$\frac{da}{d(\Delta f_{\text{ш}})} = \frac{\sqrt{2} U_m}{\sqrt{N_0}} \left[2\tau_{\text{и}} \Delta f_{\text{ш}}^{-\frac{1}{2}} e^{-2\Delta f_{\text{ш}} \tau_{\text{и}}} + \frac{1}{2} \Delta f_{\text{ш}}^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-2\Delta f_{\text{ш}} \tau_{\text{и}}}) \right].$$

Приравняв эту производную нулю, получим

$$\tau_{\text{и}} (\Delta f_{\text{ш}})_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \ln [4\tau_{\text{и}} (\Delta f_{\text{ш}})_{\text{opt}} + 1],$$

откуда

$$(\Delta f_{\partial})_{\text{opt}} = \frac{0,628}{\tau_{\text{н}}}.$$

При этом максимальное выходное отношение сигнал/шум равно

$$a_{\text{max}} = 0,9 \sqrt{\frac{2U_m^2 \tau_{\text{н}}}{N_0}} = 0,9 \sqrt{\frac{2E}{N_0}},$$

где $E = U_m^2 \tau_{\text{н}}$ — энергия входного видеоимпульса.

§ 3. Задачи и ответы

12.1. На вход фильтра поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью (12.27), а $s(t)$ — взаимно некоррелированный с $n(t)$ стационарный нормальный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \begin{cases} A \frac{\omega + \omega_c}{\omega_c}, & -\omega_c \leq \omega \leq 0, \\ A \frac{\omega_c - \omega}{\omega_c}, & 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Найти передаточную функцию $K_0(j\omega)$ физически нереализуемого линейного сглаживающего фильтра, минимизирующего средне-квадратичную ошибку фильтрации

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t)]^2 \rangle.$$

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{A \left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_c}\right)}{A \left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_c}\right) + \frac{N_0}{2}}, \quad |\omega| < \omega_c.$$

12.2. На вход фильтра поступает аддитивная смесь статистически независимых случайного процесса $s(t)$ со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

и стационарного нормального шума с энергетическим спектром (12.27).

Определить передаточную функцию оптимального физически реализуемого линейного сглаживающего фильтра и вычислить соответствующую минимальную среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon_{\min}^2 = \langle [y(t) - s(t)]^2 \rangle.$$

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{K_0}{1 + j\omega T}, \quad \varepsilon_{\min}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{K_0^2}{1 + T} - \frac{K_0^2 N_0}{2T} \right],$$

где

$$T = \sqrt{\frac{N_0}{N_0 + 2}}; \quad K_0 = \frac{2}{\sqrt{N_0 + 2} [\sqrt{N_0 + 2} + \sqrt{N_0}]}$$

12.3. Случайный сигнал имеет корреляционную функцию

$$k_s(\tau) = \exp\{-|\tau|\}.$$

Найти для такого сигнала импульсную переходную функцию $G_0(t)$ линейного физически реализуемого прогнозирующего фильтра, если энергетический спектр шума равен

$$S_n(\omega) = \frac{4}{4 + \omega^2}.$$

Ответ:

$$G_0(t) = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{2}} e^{-(t+\Delta)},$$

где Δ — время прогнозирования.

12.4. Решить задачу 12.2 при условии, что спектральные плотности сигнала и шума соответственно равны

$$S_s(\omega) = \frac{11}{1 + \omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{Nb^2}{b^2 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{(b+1)(b+j\omega)}{(Nb^2+1)(A+1)(A+j\omega)},$$

$$A = \sqrt{\frac{b^2(N+1)}{Nb^2+1}}.$$

12.5. На вход оптимального прогнозирующего линейного фильтра с передаточной функцией $K_0(j\omega)$, минимизирующей среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t + \Delta)]^2 \rangle,$$

воздействует аддитивная смесь взаимно коррелированных стационарного шума $n(t)$ и сигнала $s(t)$:

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$ процесса $x(t)$ и выходного процесса $y(t) = \hat{s}(t)$.

Ответ:

$$S_{xy}(\omega) = [S_s(\omega) + S_{sn}(\omega)] e^{j\omega\Delta}.$$

12.6. Определить передаточную функцию оптимального физически реализуемого прогнозирующего фильтра, на вход которого поступает аддитивная смесь стационарного нормального белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью (12.27) и стационарного случайного процесса $s(t)$ с энергетическим спектром

$$S_s(\omega) = \frac{A^2}{\beta^2 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{2A^2}{N_0} \frac{e^{-\beta\Delta}}{(\beta + \gamma)(\gamma + j\omega)}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{2A^2 + N_0\beta^2}{N_0}}.$$

12.7. Вычислить передаточную функцию оптимального физически реализуемого линейного сглаживающего фильтра при поступлении на его вход аддитивной смеси взаимно некоррелированных сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, спектральные плотности которых соответственно равны

$$S_s(\omega) = \frac{a^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad S_n(\omega) = \frac{b^2}{\beta^2 + \omega^2}, \\ -\infty < \omega < \infty.$$

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{a^2(\alpha + \beta)(\beta + j\omega)}{c^2(\alpha + d)(d + j\omega)},$$

где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d = \frac{1}{c} \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

12.8. Применительно к условиям задачи 12.8 определить передаточную функцию оптимального прогнозирующего фильтра.

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{a^2(\alpha + \beta)(\beta + j\omega)}{c^2(\alpha + d)(d + j\omega)} e^{-\alpha\Delta},$$

где Δ — время упреждения;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{1}{c} \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

12.9. На вход оптимального линейного фильтра с передаточной функцией $K_0(j\omega)$, минимизирующего среднеквадратичную ошибку

$$\sigma^2 = \left\langle \left[y(t) - \frac{d}{dt} s(t) \right]^2 \right\rangle,$$

воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t)$ и $n(t)$ — взаимно коррелированные стационарные случайные процессы со спектральными плотностями $S_s(\omega)$ и $S_n(\omega)$.

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$ входного процесса $x(t)$ и процесса $y(t)$ на выходе фильтра.

Ответ:

$$S_{xy}(\omega) = j\omega [S_s(\omega) + S_{sn}(\omega)],$$

где $S_{sn}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность процессов $s(t)$ и $n(t)$.

12.10. Применительно к условию задачи 12.8 вычислить значение среднеквадратичной ошибки.

Ответ [21]:

$$\epsilon_{\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \omega^2 S_s(\omega) - [S_s(\omega) + S_n(\omega) + S_{sn}(\omega) + S_{sn}^*(\omega)] |K_0(j\omega)|^2 \} d\omega.$$

12.11. На вход физически реализуемого линейного фильтра, минимизирующего среднеквадратичную ошибку

$$\epsilon^2 = \left\langle \left[y(t) - \frac{d}{dt} s(t) \right]^2 \right\rangle,$$

воздействует аддитивная смесь статистически независимых стационарных случайного процесса $s(t)$ со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \frac{\alpha^2}{4\gamma^2 + (2\beta^2 - \omega^2)^2}, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

и нормального белого шума $n(t)$:

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Определить оптимальную передаточную функцию $K_0(j\omega)$ фильтра и вычислить минимальное значение ϵ_{\min}^2 .

Ответ [21]:

$$K_0(j\omega) = \frac{j\alpha^2}{2mN_0} \left\{ \frac{m+in}{[m+j(n+n_1)]^2 - m_1^2} \frac{\omega+m-jn}{(\omega-m_1-jn_1)(\omega+m_1-jn_1)} - \frac{-m+jn}{[m-j(n+n_1)]^2 - m_1^2} \frac{\omega-m-jn}{(\omega-m_1-jn_1)(\omega+m_1-jn_1)} \right\},$$

где

$$m = \sqrt{\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + \gamma^4}}; \quad n = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \gamma^4} - \beta^2};$$

$$m_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \gamma^4 + \frac{\alpha^2}{2N_0} + \beta^2}}; \quad n_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \gamma^4 + \frac{\alpha^2}{2N_0} - \beta^2}};$$

$$\varepsilon_{\min}^2 = \frac{\alpha^2}{4} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{2\alpha^2}{m^2 N_0} \left[\frac{|A|^2}{n} + \operatorname{Im} \left(\frac{A^2}{m + jn} \right) \right] \right\},$$

$$A = \frac{m + jn}{[m^2 - m_1^2 - (n + n_1)^2] + 2jm(n + n_1)}.$$

12.12. Процесс $y(t)$ представляет собой аддитивную смесь взаимно некоррелированных стационарных случайных процессов $s(t)$ и $n(t)$:

$$y(t) = a [s(t) + n(t)].$$

Найти значение постоянной a , минимизирующей среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t + \Delta)]^2 \rangle,$$

и вычислить величину ε_{\min}^2 . Спектральные плотности процессов $s(t)$ и $n(t)$ соответственно равны

$$S_s(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_s^2}{\alpha^2 + \omega^2}; \quad S_n(\omega) = \frac{2\beta\sigma_n^2}{\beta^2 + \omega^2}.$$

Ответ:

$$a = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} e^{-\alpha\Delta},$$

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sigma_s^2 \left(1 - \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} e^{-2\alpha\Delta} \right).$$

12.13. На вход фильтра, изображенного на рис. 12.4, поступает аддитивная смесь взаимно некоррелированных процессов $s(t)$ и $n(t)$:

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Спектральные плотности процессов $s(t)$ и $n(t)$ равны

$$S_s(\omega) = \frac{16}{9 + \omega^2} \left[\frac{\sigma^2}{\text{сек}} \right], \quad S_n(\omega) = \frac{25}{19 + \omega^2} \left[\frac{\sigma^2}{\text{сек}} \right].$$

Определить значение постоянной $T = RC$, минимизирующее среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - s(t)]^2 \rangle.$$

Ответ:

$$T = RC = 1 \text{ сек.}$$

12.14. На вход линейного фильтра с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

поступает аддитивная смесь взаимно некоррелированных процессов $s(t)$ и $n(t)$, спектральные плотности которых соответственно равны

$$S_s(\omega) = \frac{25}{(1 + \omega^2)^2}; \quad S_n(\omega) = 0,4; \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Пусть $y(t)$ — процесс на выходе фильтра. Как следует выбрать параметр T , чтобы дисперсия разности

$$\xi(t) = y(t) - \frac{d}{dt} s(t)$$

была бы минимальной.

Ответ:

$$T = 0,25.$$

12.15. На вход когерентного приемника амплитудно-модулированных сигналов, состоящего из перемножителя и фильтра нижних частот (рис. 12.7), поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью (12.27), а $s(t)$ — статистически независимое от $n(t)$ амплитудно-модулированное колебание с подавленной несущей:

$$s(t) = \sqrt{2P}m(t) \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Здесь ω_0 — угловая частота несущей, φ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$, а $m(t)$ — стационарный нормальный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_m(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

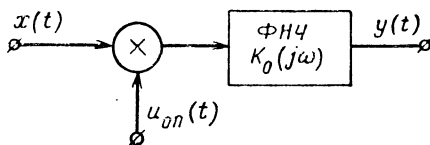


Рис. 12.7. Когерентный приемник.

На второй вход перемножителя подается опорное колебание

$$u_{0н}(t) = \sqrt{2} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Определить передаточную функцию фильтра нижних частот, минимизирующего среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon^2 = \langle [y(t) - m(t)]^2 \rangle,$$

и вычислить величину ε_{\min}^2 .

Ответ [22]:

$$K_0(j\omega) = \frac{(\alpha - 1)a}{\alpha a + j\omega}, \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{4P}{aN_0}},$$

$$\varepsilon_{\min}^2 = \frac{2P}{\alpha + 1}.$$

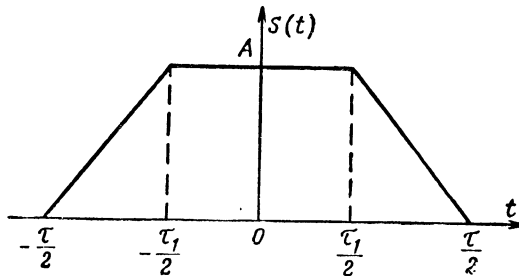


Рис. 12.8. Трапецеидальный видеопульс.

12.16. Найти импульсную переходную функцию $G_0(t)$ согласованного фильтра для сигнала

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \infty, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$G_0(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \infty, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

12.17. Определить импульсную переходную функцию $G_0(t)$ согласованного фильтра для сигнала $s(t) = A_m \sin \omega_0 t$, если на интервале $(0, T)$ укладывается нечетное число полупериодов.

Ответ:

$$G_0(t) = \begin{cases} A_m \sin \omega_0 t, & 0 \leq t < \infty, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

12.18. Найти согласованный фильтр для трапецеидального видеопульса (рис. 12.8)

$$s(t) = \frac{2A}{\tau - \tau_1} \left[\left(t + \frac{\tau}{2} \right) 1_0 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) 1_0 \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) \right] -$$

$$-\left(t - \frac{\tau_1}{2}\right) 1_0\left(t - \frac{\tau_1}{2}\right) + \left(t - \frac{\tau}{2}\right) 1_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\Big],$$

где $1_0(t)$ — единичная функция:

$$1_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ответ [18]:

$$G_0(t) = k \left[t \cdot 1_0(t) - \left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) 1_0\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) - \left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times 1_0\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) + (t - \tau) 1_0(t - \tau) \right], \quad k = \frac{2A}{\tau - \tau_1};$$

$$K_0(j\omega) = \frac{K_0}{(j\omega)^2} \left[1 - e^{-j\omega \frac{\tau - \tau_1}{2}} \right] \left[1 - e^{-j\omega \frac{\tau + \tau_1}{2}} \right].$$

12.19. Найти импульсную переходную функцию $G_0(t)$ для видео-сигнала $s(t)$, имеющего параболическую форму:

$$s(t) = \begin{cases} A \left[1 - \left(\frac{2t}{\tau}\right)^2 \right], & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Ответ [18]:

$$G_0(t) = \frac{8A}{\tau^2} \left[-\frac{t^2}{2} 1_0(t) + \frac{\tau}{2} t \cdot 1_0(t) + \frac{1}{2} (t - \tau)^2 1_0(t - \tau) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tau (t - \tau) 1_0(t - \tau) \right].$$

12.20. Видеоимпульс $s(t)$ (рис. 12.9) описывается функцией, составленной из трех отрезков парабол таким образом, чтобы первая производная $\dot{s}(t)$ была непрерывной:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{4A}{\tau(\tau - \tau_1)} t^2, & 0 \leq t \leq \frac{\tau - \tau_1}{2}, \\ A \left[1 - \frac{4}{\tau\tau_1} \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2 \right], & \frac{\tau - \tau_1}{2} \leq t \leq \frac{\tau + \tau_1}{2}, \\ \frac{4A}{\tau(\tau - \tau_1)} (t - \tau)^2, & \frac{\tau + \tau_1}{2} \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > \tau. \end{cases}$$

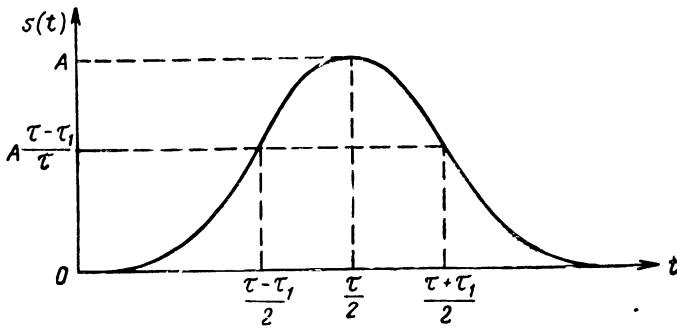


Рис. 12.9. Параболический видеоимпульс.

Определить согласованный фильтр для такого импульса.

Ответ [18]:

$$G_0(t) = \frac{8A}{\tau(\tau - \tau_1)} \left\{ \frac{1}{2} t^2 \cdot 1_0(t) + \frac{\tau}{\tau_1} \left[-\frac{1}{2} \left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2} \right)^2 1_0 \left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2} \right)^2 1_0 \left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} (t - \tau)^2 1_0(t - \tau) \right\}.$$

12.21. На вход оптимального линейного фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе, воздействует полезный сигнал

$$s(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq a, \\ 2a - t, & a \leq t \leq 2a, \\ 0, & t < 0, t > 2a, \end{cases}$$

и белый шум с энергетической спектральной плотностью (12.27).

Найти передаточную функцию $K_0(j\omega)$ и импульсную переходную функцию $G_0(t)$ фильтра.

Ответ:

$$G_0(t) = \begin{cases} t - (T - 2a), & T - 2a \leq t \leq T - a, \\ T - t, & T - a \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, t < T - 2a; \end{cases}$$

$$K_0(j\omega) = -\frac{K_0}{\omega^2} (1 - e^{-j\omega a})^2 e^{-j\omega T}.$$

12.22. Найти сигнал $s_2(t)$ на выходе фильтра, согласованного с входным сигналом

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau_H, \\ 0, & t < 0, t > \tau_H. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_2(t) = \begin{cases} kA^2(t - T + \tau_n), & T - \tau_n \leq t \leq T, \\ -kA^2(t - T - \tau_n), & T \leq t \leq T + \tau_n. \end{cases}$$

12.23. На вход линейного фильтра воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t)$ — прямоугольный видеоимпульс длительностью τ_n :

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n, \end{cases}$$

а $n(t)$ — стационарный нормальный шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = \frac{2\alpha a}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad 0 < \omega < \infty.$$

Найти передаточную функцию фильтра, максимизирующего выходное отношение сигнал/шум.

Ответ [18]:

$$K_0(j\omega) = K_0 \left(\frac{\alpha^2}{j\omega} - j\omega \right) (1 - e^{-j\omega\tau_n}).$$

12.24. Решить задачу 12.23 для случая приема прямоугольного видеоимпульса на фоне стационарного шума со спектральной плотностью

$$S_n'(\omega) = \frac{2a\omega^3}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad 0 < \omega < \infty.$$

Ответ [18]:

$$K_0(j\omega) = K_0 \frac{1}{j\omega} \left[1 - \frac{\alpha^2}{(j\omega)^2} \right] (1 - e^{-j\omega\tau_n}).$$

12.25. Найти передаточную функцию $K_0(j\omega)$ и импульсную характеристику $G_0(t)$ оптимального фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе, если на вход фильтра поступает сигнал

$$s(t) = A \exp \left\{ -\frac{1}{4\alpha^2} t^2 \right\}$$

и шум со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = N_0 \exp \{ -\beta^2 \omega^2 \},$$

причем $\beta \ll \alpha$.

Ответ:

$$K_0(j\omega) = K_0 e^{-(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 - j\omega T},$$

$$G_0(t) = K_0 \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \exp \left\{ -\frac{(t-T)^2}{4(\alpha^2 - \beta^2)} \right\}.$$

12.26. Найти передаточную функцию $K_0(j\omega)$ оптимального линейного фильтра, обеспечивающего максимально возможное отношение сигнал/шум на выходе, если на вход фильтра поступает

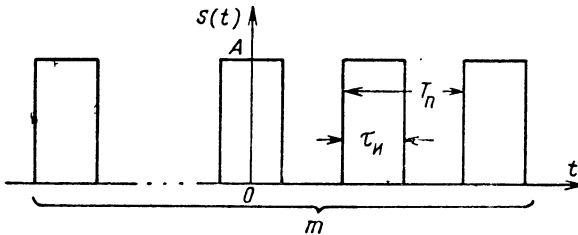


Рис. 12.10. Последовательность прямоугольных видеоимпульсов.

полезный сигнал в виде последовательности из m прямоугольных видеоимпульсов (рис. 12.10) и белый шум со спектральной плотностью (12.27)

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{K_0}{j\omega} \frac{1 - e^{j\omega n T_n}}{1 - e^{j\omega T_n}} (e^{j\omega \tau_i} - 1) e^{-j\omega T}.$$

12.27. Найти передаточную функцию $K_0(j\omega)$ оптимального фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум, если в качестве полезного сигнала принять радиолокационный сигнал, представляющий собой пакет из m прямоугольных импульсов, амплитуда которых изменяется в соответствии с формой диаграммы направленности РЛС (рис. 12.11), а в качестве шума — белый шум со спектральной плотностью $N_0/2$.

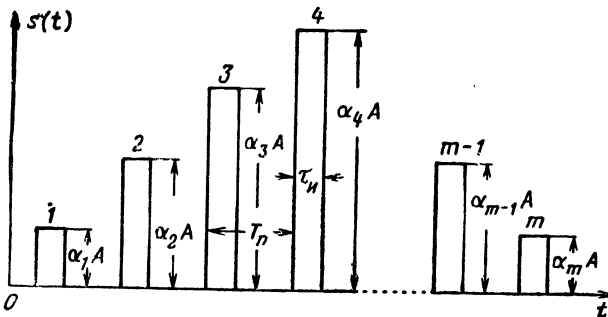


Рис. 12.11. Последовательность видеоимпульсов, модулированных по амплитуде.

Ответ:

$$K_0(j\omega) = \frac{K_0}{j\omega} [\alpha_1 + \alpha_2 e^{j\omega T_{\Pi}} + \dots + \alpha_m e^{j\omega(m-1)T_{\Pi}}] (e^{j\omega\tau_{\Pi}} - 1) e^{-j\omega T}$$

12.28. Определить максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе устройства, изображенного на рис. 12.12, при

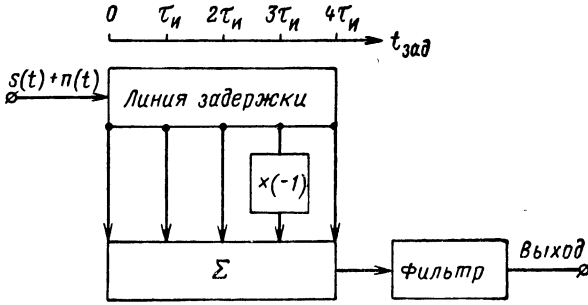


Рис. 12.12. Согласованный фильтр.

воздействии на него аддитивной смеси белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью $N_0/2$ и сигнала $s(t)$, имеющего вид изображенной на рис. 12.13 последовательности элементарных фазоманипулиро-

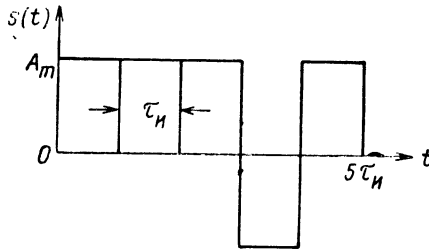


Рис. 12.13. Последовательность биполярных прямоугольных видеоимпульсов.

- ванных прямоугольных видеоимпульсов с равными амплитудами A_m и длительностями τ_{Π} :

$$s(t) = A_m [1_0(t) - 2 \cdot 1_0(t - 3\tau_{\Pi}) + 2 \cdot 1_0(t - 4\tau_{\Pi}) - 1_0(t - 5\tau_{\Pi})].$$

Выходной фильтр согласован с элементарным импульсом и имеет импульсную переходную функцию

$$G(t) = \begin{cases} A_m(\tau_{\Pi} - t), & 0 \leq t \leq \tau_{\Pi}, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Ответ:

$$a = \frac{[s_{\text{вых}}(t)]_{\text{max}}}{\sigma_{\text{вых}}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}},$$

где $E = 5A_m^2 \tau_{\text{и}}$ — полная энергия сигнала.

12.29. На вход линейного фильтра, изображенного на рис. 12.14, подается аддитивная смесь стационарного нормального белого шума со спектральной плотностью (12.27) и сигнала $s(t)$,

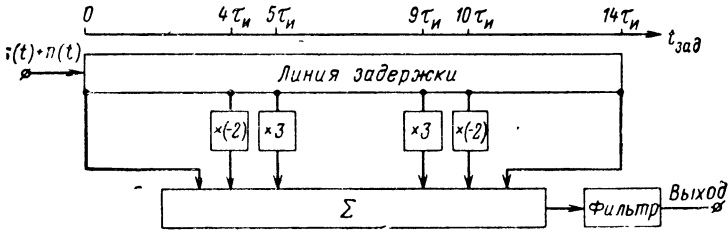


Рис. 12.14. Неоптимальный фильтр.

представляющего собой пять следующих друг за другом элементарных прямоугольных импульсов с равными амплитудами A_m и длительностями $\tau_{\text{и}}$ (рис. 12.15). Отводы от линии задержки сделаны на

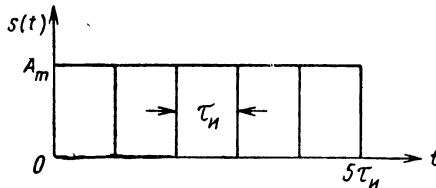


Рис. 12.15. Последовательность примыкающих прямоугольных видеоимпульсов.

расстояниях, соответствующих временным задержкам $t_{\text{зад}} = 0; 4\tau_{\text{и}}; 5\tau_{\text{и}}; 9\tau_{\text{и}}; 10\tau_{\text{и}}$ и $14\tau_{\text{и}}$. Выходной фильтр согласован с элементарным импульсом (см. задачу 12.28).

Определить максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе фильтра.

Ответ:

$$a = \frac{[s_{\text{вых}}(t)]_{\text{max}}}{\sigma_{\text{вых}}} = \sqrt{\frac{36}{28} \frac{2E_{\text{и}}}{N_0}},$$

где $E_{\text{и}} = A_m^2 \tau_{\text{и}}$ — энергия элементарного импульса.

12.30. На вход одиночного колебательного контура с передаточной функцией

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — стационарный нормальный белый шум, $s(t)$ — прямоугольный радиоимпульс длительностью $\tau_{\text{и}}$, несущая частота которого совпадает с резонансной частотой контура ω_0 .

Определить оптимальное значение полосы пропускания Δf_{opt} контура, при котором выходное отношение сигнал/шум достигает максимума.

Ответ:

$$\Delta f_{\text{opt}} = \frac{0,4}{\tau_{\text{и}}}, \quad a_{\text{max}} = 0,9 \sqrt{q},$$

где Δf — полоса пропускания на уровне 0,5 по мощности; $q = 2E/N_0$ — входное отношение сигнал/шум.

12.31. Решить задачу 12.30 для случая воздействия аддитивной смеси прямоугольного радиоимпульса и белого шума на идеальный фильтр с прямоугольной амплитудно-частотной и нулевой фазовой характеристиками:

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0, & -\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ K_0, & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ:

$$\Delta f_{\text{opt}} = \frac{1,37}{\tau_{\text{и}}}, \quad a_{\text{max}} = 0,91 \sqrt{q}.$$

12.32. Решить задачу 12.30 для случая воздействия аддитивной смеси прямоугольного радиоимпульса и белого шума на гауссов фильтр с передаточной функцией

$$K(j\omega) = K_0 \exp \left\{ -1,4 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^2 - j\omega T \right\}.$$

Ответ:

$$\Delta f_{\text{opt}} = \frac{0,72}{\tau_{\text{и}}}, \quad a_{\text{max}} = 0,94 \sqrt{q}.$$

12.33. Вычислить максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе фильтра с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0, & -\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ K_0, & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega, \end{cases}$$

при воздействии на его вход аддитивной смеси белого шума и гауссова радиоимпульса

$$s(t) = A e^{-2,8 \left(\frac{t}{\tau_{\text{н}}}\right)^2 + j\omega_0 t}$$

Определить оптимальное значение полосы пропускания фильтра.

Ответ:

$$\Delta f_{\text{opt}} = \frac{0,72}{\tau_{\text{н}}}, \quad a_{\text{max}} = 0,94 \sqrt{q}.$$

12.34. Решить задачу 12.33 для случая воздействия аддитивной смеси белого шума и гауссова радиоимпульса на гауссов фильтр.

Ответ:

$$\Delta f_{\text{opt}} = \frac{0,63}{\tau_{\text{н}}}, \quad a_{\text{max}} = \sqrt{q}.$$

12.35. На вход фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом $s(t)$ длительностью $\tau_{\text{н}}$:

$$s(t) = A_m \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{н}}$$

(A_m , ω_0 и $\tau_{\text{н}}$ — постоянные величины), воздействует аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и стационарного белого шума $n(t)$.

Определить отношение сигнал/шум

$$a(t) = \frac{U(t)}{\sigma(t)},$$

где $U(t)$ — огибающая сигнала на выходе фильтра, а $\sigma(t)$ — среднеквадратичное значение выходного шума, в конце импульса ($t = \tau_{\text{н}}$) для следующих случаев:

а) сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ начинают воздействовать на фильтр одновременно с момента $t = 0$ (случай точного временного стробирования импульсного сигнала, принимаемого на фоне белого шума);

б) шум $n(t)$ начинает воздействовать на фильтр с некоторым опережением Δt по отношению к сигналу $s(t)$;

в) шум $n(t)$ воздействует на фильтр с момента $t \rightarrow -\infty$, а сигнал $s(t)$ — с момента $t = 0$ (случай отсутствия временного стробирования).

Ответ:

а) $a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q}$, $q = \frac{2E}{N_0}$, $E = \frac{A_m^2}{2} \tau_{\text{и}}$;

б) $a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q}$;

в) $a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q}$.

12.36. На вход колебательного контура с передаточной функцией

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

воздействует аддитивная смесь прямоугольного радиоимпульса $s(t)$ длительностью $\tau_{\text{и}}$ и стационарного белого шума $n(t)$.

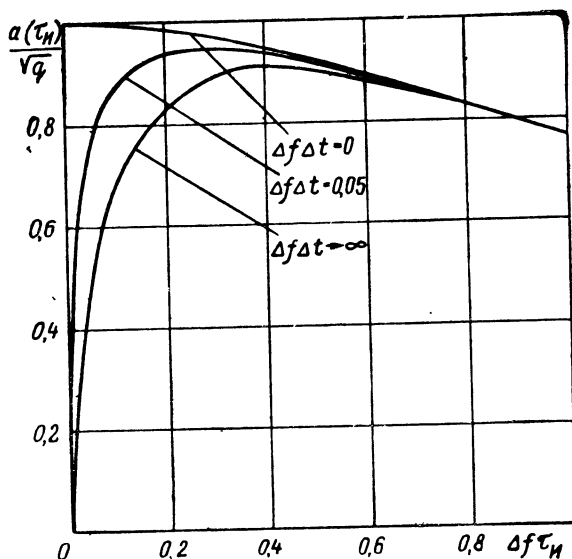


Рис. 12.16. Отношение сигнал/шум на выходе колебательного контура.

Определить отношение сигнал/шум $a(\tau_{\text{и}})$ в конце импульса для случаев, указанных в задаче 12.35. Для случая отсутствия временного стробирования определить оптимальное значение полосы пропускания Δf_{opt} , при которой $a(\tau_{\text{и}}) = a_{\text{max}}$.

Ответ:

а) $a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q} \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta f \tau_{\text{и}}} \frac{1 - \exp\{-\pi \Delta f \tau_{\text{и}}\}}{\sqrt{1 - \exp\{-2\pi \Delta f \tau_{\text{и}}\}}}}$;

$$\text{б) } a(\tau_n) = \sqrt{q} \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta f \tau_n}} \cdot \frac{1 - \exp\{-\pi \Delta f \tau_n\}}{\sqrt{1 - \exp\{-2\pi \Delta f (\tau_n + \Delta t)\}}};$$

$$\text{в) } a(\tau_n) = \sqrt{q} \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta f \tau_n}} [1 - \exp\{-\pi \Delta f \tau_n\}], \quad \Delta f_{\text{opt}} = \frac{0,4}{\tau_n}.$$

Графики функции $a(\tau_n) = f(\Delta f \tau_n; \Delta f \Delta t)$ приведены на рис. 12.16.

12.37. Решить задачу 12.36 для случая воздействия аддитивной смеси сигнала $s(t)$ и белого шума на идеальный полосовой фильтр с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0, & -\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ K_0, & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ:

$$\text{а) } a(\tau_n) = \sqrt{q} \frac{2 \operatorname{Si}\left(\frac{1}{2} \pi \Delta f \tau_n\right)}{\sqrt{2\pi \Delta f \tau_n} \sqrt{\operatorname{Si}(\pi \Delta f \tau_n) - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} \pi \Delta f \tau_n\right)}{\frac{1}{2} \pi \Delta f \tau_n}}},$$

где $\operatorname{Si}(z)$ — интегральный синус:

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx;$$

б)

$$a(\tau_n) = \sqrt{q} \frac{2 \operatorname{Si}\left(\frac{1}{2} \pi \Delta f \tau_n\right)}{\sqrt{2\pi \Delta f \tau_n} \sqrt{\operatorname{Si}\left[2\pi \Delta f \left(\frac{\tau_n}{2} + \Delta t\right)\right] - \frac{\sin^2\left[\pi \Delta f \left(\frac{\tau_n}{2} + \Delta t\right)\right]}{\pi \Delta f \left(\frac{\tau_n}{2} + \Delta t\right)}}};$$

$$\text{в) } a(\tau_n) = \sqrt{q} \frac{2}{\pi \sqrt{\Delta f \tau_n}} \operatorname{Si}\left(\frac{\pi \Delta f \tau_n}{2}\right), \quad \Delta f_{\text{opt}} = \frac{1,37}{\tau_n}.$$

Графики функции $a(\tau_n) = f(\Delta f \tau_n; \Delta f \Delta t)$ представлены на рис. 12.17.

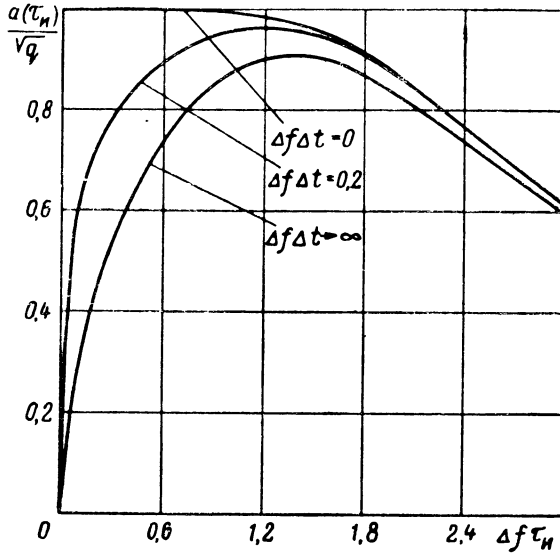


Рис. 12.17. Отношение сигнал/шум на выходе идеального фильтра.

12.38. Решить задачу 12.36 для случая воздействия аддитивной смеси сигнала $s(t)$ и белого шума на фильтр с передаточной функцией

$$K(j\omega) = K_0 \left[e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\beta}\right)^2} + c e^{-\left(\frac{\omega + \omega_0}{\beta}\right)^2} \right].$$

Ответ:

- а) $a(\tau_n) = \sqrt{q} \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{b}} \left[\Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right] \left[\Phi\left(\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}};$
- б) $a(\tau_n) = \sqrt{q} \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{b}} \left[\Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right] \left[\Phi\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi\Delta f\Delta t}{\sqrt{0,347}}\right) - \frac{1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}};$
- в) $a(\tau_n) = \sqrt{q} \frac{\sqrt{8\pi}}{\sqrt{b}} \left[\Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right]; b = \frac{\pi\Delta f\tau_n}{\sqrt{0,347}}, \Delta f_{\text{opt}} = \frac{0,72}{\tau_n}.$

Значения $a(\tau_n)$ приведены на рис. 12.18.

12.39. На вход фильтра, согласованного с прямоугольным радиопульсом $s_0(t)$ длительностью τ_n :

$$s_0(t) = A_m \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \tau_n$$

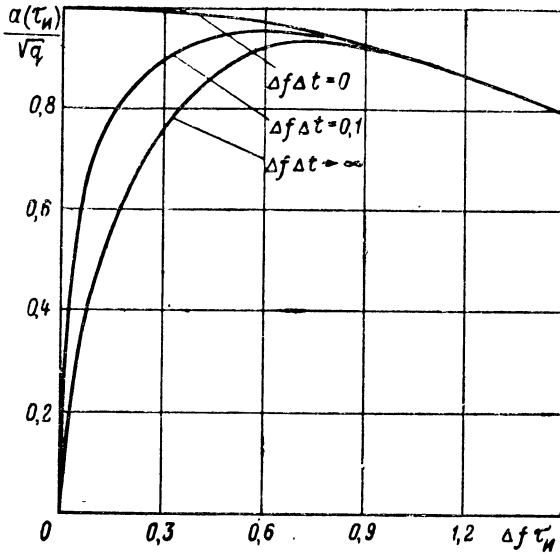


Рис. 12.18. Отношение сигнал/шум на выходе гауссова фильтра.

(A_m , ω_0 и $\tau_{\text{и}}$ —постоянные величины), воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = s_1(t) + n(t),$$

где $n(t)$ —стационарный белый шум, а $s_1(t)$ —прямоугольный радиоимпульс длительностью $\tau_{\text{и}}$:

$$s_1(t) = A_m \cos \omega_1 t, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}},$$

частота которого ω_1 отлична от частоты сигнала $s_0(t)$ ($|\omega_1 - \omega_0| = \Delta\omega_p \ll \omega_0$).

Определить отношение сигнал/шум $a(t)$ на выходе фильтра в конце импульса $s_1(t)$.

Ответ:

$$a(\tau_{\text{и}}) = \sqrt{q} \frac{\sin \frac{\Delta\Omega_p}{2}}{\frac{\Delta\Omega_p}{2}}, \quad \Delta\Omega_p = \Delta\omega_p \tau_{\text{и}}.$$

График функции $a(\tau_{\text{и}})/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_p)$ представлен на рис. 12.19 (пунктирная линия).

12.40. На вход колебательного контура с передаточной функцией

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

воздействует аддитивная смесь

$$x(t) = s_1(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — стационарный белый шум, а $s_1(t)$ — прямоугольный радиоимпульс длительностью τ_n :

$$s_1(t) = A_m \cos \omega_1 t, \quad 0 \leq t \leq \tau_n,$$

частота которого ω_1 отлична от резонансной частоты контура ($|\omega_1 - \omega_0| = \Delta\Omega_p \ll \omega_0$).

Определить отношение сигнал/шум $a(t)$ на выходе контура в конце импульса $s_1(t)$.

Ответ:

$$a(\tau_n) = \sqrt{q} \sqrt{2\alpha\tau_n \frac{1 - 2e^{-\alpha\tau_n} \cos \Delta\Omega_p + e^{-2\alpha\tau_n}}{(\alpha\tau_n)^2 + \Delta\Omega_p^2}}$$

Значения функции $a(\tau_n)/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_p; \alpha\tau_n)$ приведены на рис. 12.19.

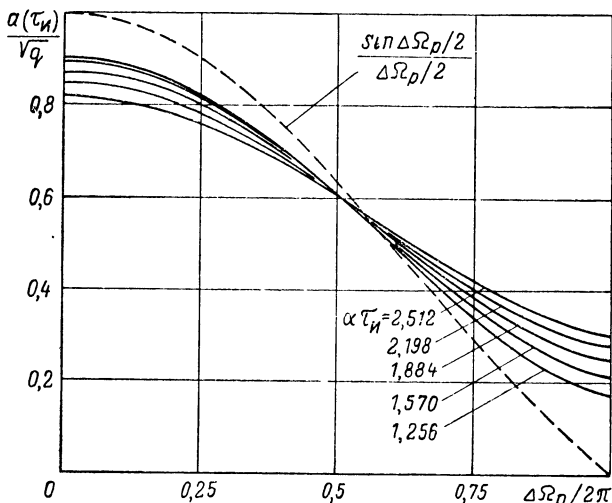


Рис. 12.19. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра и колебательного контура от обобщенной расстройки.

12.41. Решить задачу 12.40 в случае воздействия суммы $x(t)$ на фильтр с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0 & -\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ K_0 & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Ответ:

$$a(\tau_{II}) = \sqrt{q} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\text{Si}\left(\frac{\Delta\omega\tau_{II}}{4} + \frac{\Delta\Omega_p}{2}\right) + \text{Si}\left(\frac{\Delta\omega\tau_{II}}{4} - \frac{\Delta\Omega_p}{2}\right)}{\sqrt{\Delta\Omega_p}}}$$

Графики функции $a(\tau_{II})/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_p; \Delta\omega\tau_{II})$ представлены на рис. 12.20.

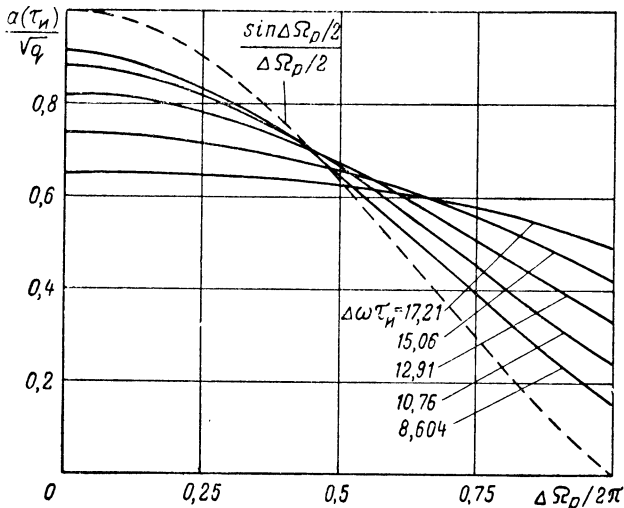


Рис. 12.20. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе идеального фильтра от обобщенной расстройки.

12.42. Решить задачу 12.40 для случая воздействия суммы $x(t)$ на фильтр с передаточной функцией

$$K(j\omega) = K_0 \left[e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\beta^2}} \right].$$

Ответ:

$$a(\tau_H) = \sqrt{q}^4 \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\beta\tau_H} \int_0^{1/2} e^{-\frac{\beta^2\tau_H^2}{4}x^2} \cos(\Delta\Omega_p x) dx.$$

Графики функции $a(\tau_H)/\sqrt{q} = f(\Delta\Omega_p; \beta\tau_H)$ приведены на рис. 12.21.

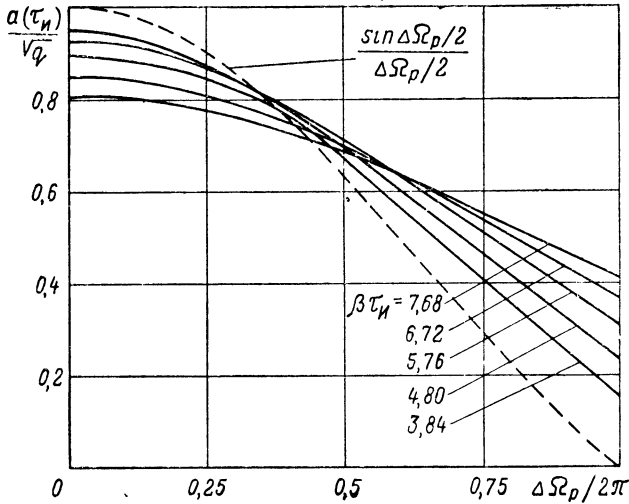


Рис. 12.21. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе гауссова фильтра от обобщенной расстройки.

Литература

1. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Изд-во иностранной литературы, 1960.
2. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. «Известия АН СССР», сер. математическая, 1941, № 5.
3. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. John Wiley, 1949.
4. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.
5. Zadeh L., Ragazzini J. An Extension of Wiener's Theory of Prediction. Journ. Appl. Phys., 1950, v. 21, № 7.
6. Voorn R. C. An Optimization Theory for Time Varying Linear Systems with Nonstationary Statistical Inputs. Proc. IRE, 1952, v. 40, № 8.
7. Davis R. C. On the Theory of Prediction of Nonstationary Stochastic Processes. Journ. Appl. Phys., 1952, v. 23, № 9.
8. Лэннинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1958.

9. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Советское радио», 1960.
10. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 2. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1962.
11. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического регулирования. Гостехиздат, 1957.
12. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. Пер. с англ. Изд-во «Наука», 1965.
13. Papoulis A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, 1965.
14. Van Trees H. L. Detection, Estimation and Modulation Theory. Pt. 1. John Wiley, 1968.
15. North D. O. Analysis of Factor Which Determine Signal-to-Noise Discrimination in Pulsed Carrier Systems. Rep. PTR-6c, RCA Princeton, 1943 (см. также «Труды института инженеров по электронике и радиотехнике», пер. с англ., 1963, № 7).
16. Van Vleck J. H., Middleton D. A Theoretical Comparison of Visual, Aural and Meter Reception of Pulsed Signals in Presence of Noise. Journ. Appl. Phys., 1946, v. 17, № 11.
17. Tugin G. L. An Introduction to Matched Filters. Trans. IRE on Inform. Theory, 1960, v. IT-6, № 3.
18. Лезин Ю. С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. Изд-во «Советское радио», 1969.
19. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1961.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
21. Володин В. Г., Ганин М. П. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1965.
22. Viterbi A. J. Optimum Coherent Demodulation for Continuous Modulation Systems. Proc. of the Nat. Electronics Conference, 1962, v. XVIII.
23. Горяинов В. Т. Отношение сигнал/шум на выходе линейной системы при расстроенном входном сигнале. «Радиотехника», 1966, т. 21, № 6.

13. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

§ 1: Теоретические сведения

Пусть в нашем распоряжении на некотором временном интервале $(0, T)$ имеется реализация $\eta(t)$ суммы полезного сигнала $s(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$, зависящего от нескольких параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, и нормального стационарного шума $\xi(t)$:

$$\eta(t) = s(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots) + \xi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13.1)$$

Предполагается, что нормальный стационарный шум $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и известную функцию корреляции

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_2) \xi(t_1) \rangle = k(t_2 - t_1). \quad (13.2)$$

Кроме этого, вид сигнала $s(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ считается заданным и сигнал полностью расположен на интервале наблюдения $(0, T)$. Поэтому значения сигнала и его производных на концах интервала $(0, T)$ равны нулю.

Нужно путем обработки принятого колебания $\eta(t)$ найти предельную точность оценки одного или нескольких параметров λ_i .

Пусть истинное значение параметра λ_i постоянно и равно λ_{i0} , а его оценка по принятой реализации есть λ_i^* . Оценка λ_i^* из-за наличия шума будет случайной величиной, изменяющейся от одной реализации к другой. Оценка λ_i^* называется несмещенной, если $\langle \lambda_i^* \rangle = \lambda_{i0}$; в противном случае ($\langle \lambda_i^* \rangle \neq \lambda_{i0}$) оценка называется смещенной. Оценка, имеющая наименьшую дисперсию $\sigma_{\lambda_i}^2 = \langle (\lambda_i^* - \lambda_{i0})^2 \rangle = \min$, называется эффективной. Конечно, всегда желательно получить несмещенную и эффективную оценку.

Имеется несколько методов получения оценок [1, 2]. В настоящее время для нахождения оценок широко применяется метод максимума апостериорного распределения или функции правдоподобия.

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют совместную плотность вероятности $W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — оцениваемые параметры, априорно равномерно распределенные в заданных интервалах значений. Если x_1, x_2, \dots, x_n — результаты наблю-

дений случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ соответственно, то функция правдоподобия определяется равенством

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = W_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots). \quad (13.3)$$

Те значения параметров λ_i^* , для которых функция правдоподобия достигает максимума, называются правдоподобными значениями параметров. Согласно методу наибольшего правдоподобия в качестве оценок для истинных значений параметров λ_{i0} выбирают правдоподобные значения λ_i^* ; они определяются из условия получения максимума функции $L(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.

Оценка по методу максимума функции правдоподобия совпадает с оценкой по минимуму среднеквадратичной погрешности, если функция правдоподобия обладает свойствами симметрии. Кроме этого, если эффективная оценка существует, то она может быть найдена методом максимума функции правдоподобия.

Поскольку точка максимума функции правдоподобия инвариантна к произвольному взаимно однозначному преобразованию, то обычно вместо самой функции правдоподобия оперируют с логарифмом от нее, т. е. вместо $L(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ оперируют с $\ln L(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = \ln W_n(\xi_1, \dots, \xi_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots)$.

Не приводя здесь обоснование метода максимума функции правдоподобия (логарифма функции правдоподобия) [1, 2], перечислим и сходные условия, выполнение которых предполагается в дальнейшем, и в справочном виде укажем основные конечные результаты [3, 4], относящиеся к случаю обработки непрерывной реализации $\eta(t)$.

1. В реализациях $\eta(t)$, подлежащих обработке, отношение сигнал/шум настолько велико, что неоднозначность оценки практически исключена.

2. Рассматривается оценка лишь одного какого-либо неизвестного параметра λ_i сигнала $s(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Априорная плотность вероятности этого параметра λ_i принимается равномерной в некотором интервале значений. Остальные параметры сигнала считаются или все известными (так называемый полностью известный сигнал) или же радиосигнал $s(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ имеет случайную начальную фазу, равномерно распределенную в интервале $(-\pi, \pi)$ (сигнал со случайной начальной фазой). В дальнейшем рассматривается в основном случай полностью известного сигнала. Однако ряд полученных результатов остается справедливым и для радиосигналов со случайной начальной фазой.

Параметры λ_i (амплитуда, длительность импульса), от которых зависит энергия сигнала, называются энергетическими; остальные параметры (частота, фаза и др.) — неэнергетическими.

3. Исходя из математической простоты решения, в дальнейшем рассматриваются три частных вида нормального стационарного шума $\xi(t)$:

— белый шум с функцией корреляции

$$k_n(t_2 - t_1) = \frac{1}{2} N_0 \delta(t_2 - t_1), \quad (13.4)$$

— экспоненциально коррелированный шум

$$k_1(t_2 - t_1) = \sigma^2 \exp(-\alpha |t_2 - t_1|), \quad (13.5)$$

— узкополосный шум с функцией корреляции

$$k_2(t_2 - t_1) = \sigma^2 \exp(-\alpha |t_2 - t_1|) \left\{ \cos \omega_1 (t_2 - t_1) + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 |t_2 - t_1| \right\}. \quad (13.6)$$

При оговоренных выше условиях оценки неэнергетических параметров сигнала, а также амплитуды оказываются несмещенными.

Дисперсия оценки неэнергетического параметра λ полностью известного сигнала $s(t, \lambda)$ определяется формулой [4]

$$\sigma_\lambda^2 = - \frac{1}{\left[\frac{d^2 S(\lambda)}{d\lambda^2} \right]_{\lambda=\lambda_0}}, \quad (13.7)$$

где λ_0 — истинное значение оцениваемого параметра;

$$S(\lambda) = \int_0^T s(t, \lambda_0) v(t, \lambda) dt. \quad (13.8)$$

Для нормальных стационарных шумов с корреляционными функциями (13.4) — (13.6) функция $v(t, \lambda)$ соответственно равна

$$v_n(t, \lambda) = \frac{2}{N_0} s(t, \lambda), \quad (13.9)$$

$$v_1(t, \lambda) = \frac{\alpha}{2\sigma^2} \left[s(t, \lambda) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 s(t, \lambda)}{dt^2} \right], \quad (13.10)$$

$$v_2(t, \lambda) = \frac{1}{4\alpha\omega_0^2\sigma^2} \left[\omega_0^4 s(t, \lambda) + 2(\omega_0^2 - 2\alpha^2) \frac{d^2 s(t, \lambda)}{dt^2} + \frac{d^4 s(t, \lambda)}{dt^4} \right],$$

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 + \alpha^2. \quad (13.11)$$

Дисперсия оценки «амплитуды» a полностью известного сигнала вида $s(t, a) = a s_0(t)$, где $s_0(t)$ — нормализованный сигнал, равна

$$\sigma_a^2 = \left[\int_0^T s_0(t) v_0(t) dt \right]^{-1}. \quad (13.12)$$

Здесь функция $v_0(t)$ определяется прежними формулами (13.9) — (13.11) с заменой в правых частях $s(t, \lambda)$ на $s_0(t, \lambda)$.

§ 2. Примеры

Пример 13.1. Случайная величина ξ имеет нормальную плотность вероятности

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi - m}{\sigma} \right)^2 \right]$$

с неизвестным средним значением m и неизвестной дисперсией σ^2 . В результате наблюдений получены n независимых значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ случайной величины ξ .

Каковы правдоподобные значения m и σ^2 ?

Решение [2]. Совместная плотность вероятности n независимых результатов наблюдений равна

$$\omega_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m)^2 \right].$$

Согласно (13.3) записываем функцию правдоподобия

$$L(m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m)^2 \right]$$

и логарифм функции правдоподобия

$$\ln L(m, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m)^2. \quad (13.13)$$

Отсюда дифференцированием по m находим точку m^* максимума правой части

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i - m^*) = 0, \quad m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (13.14)$$

Следовательно, оценкой значения m является среднее арифметическое результатов наблюдений.

Если m^* подставить в (13.13) и затем продифференцировать (13.13) по σ , то получим

$$\frac{d}{d\sigma} \ln L(m^*, \sigma^2) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m^*)^2.$$

Эта производная обращается в нуль при

$$n(\sigma^2)^* = \sum_{i=1}^n (\xi_i - m^*)^2, \quad (\sigma^2)^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m^*)^2. \quad (13.15)$$

Пример 13.2. Вычислить дисперсию оценки амплитуды a прямоугольного радиоимпульса

$$s(t, a) = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad 0 < t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_{\text{и}} < T, \quad \omega T \gg 1, \quad (13.16)$$

принимаемого на фоне нормального стационарного шума с функцией корреляции (13.5).

Решение. Рассматриваемый радиоимпульс равен нулю на концах интервала наблюдения $(0, T)$. Для него функция $v_0(t)$, входящая в формулу (13.12), определяется выражением (13.10) и равна

$$v_0(t) = \frac{\alpha}{2\sigma^2} \left[s_0(t, \lambda) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 s_0(t, \lambda)}{dt^2} \right] = \frac{\alpha}{2\delta^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Подставив эту функцию $v_0(t)$ в формулу (13.12) и выполнив интегрирование, при условии $\omega T \gg 1$ получим

$$\sigma_a^2 = \frac{4\sigma^2}{\alpha\tau_{\text{и}} \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right)} = \sigma^2 \left(\frac{\Delta f}{\Delta f_{\text{э}}} \right) \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{f}{\Delta f_{\text{э}}} \right)^2 \right]^{-1},$$

где $\Delta f_{\text{э}} = \alpha/4$ — энергетическая ширина спектра шума; Δf — ширина основного лепестка спектра радиоимпульса.

Пример 13.3. Определить дисперсию оценки разности $\tau = \tau_1 - \tau_2$ временных положений двух неперекрывающихся радиоимпульсов

$$s_1(t - \tau_1) = A_1 f(t - \tau_1) \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$s_2(t - \tau_2) = A_2 f(t - \tau_2) \cos(\omega t + \varphi_2),$$

принятых на фоне белого шума $n(t)$ в интервале времени $(0, T)$, причем $\omega T \gg 1$. Функция $f(t - \tau_i)$ описывает огибающие радиоимпульсов.

Решение. Если обозначить через δ_1 и δ_2 соответственно случайные ошибки определения τ_1 и τ_2 , то дисперсия оценки разности $\delta = \delta_1 - \delta_2$ определяется соотношением

$$\sigma_{\tau}^2 = \langle \delta^2 \rangle = \langle \delta_1^2 \rangle + \langle \delta_2^2 \rangle - 2 \langle \delta_1 \delta_2 \rangle = \sigma_{\tau_1}^2 + \sigma_{\tau_2}^2 - 2\sigma_{\tau_1} \sigma_{\tau_2} R_{12},$$

где $\sigma_{\tau_1}^2$ и $\sigma_{\tau_2}^2$ — дисперсии отдельных оценок τ_1 и τ_2 ; R_{12} — коэффициент корреляции совместной оценки τ_1 и τ_2 .

Так как импульсы не перекрываются, то $R_{12} = 0$ и

$$\sigma_{\tau}^2 = \sigma_{\tau_1}^2 + \sigma_{\tau_2}^2. \quad (13.17)$$

Слагаемые в правой части (13.17) находим по основной формуле (13.7), причем для белого шума в (13.8) нужно подставлять функцию $v(t, \tau_i)$, определенную соотношением (13.9).

Следовательно, можем написать

$$\sigma_{\tau_i}^2 = - \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T s_i(t - \tau_{i0}) \frac{\partial^2}{\partial \tau_i^2} s_i(t - \tau_i) dt \right]_{\tau_i = \tau_{i0}}^{-1} \quad (i = 1, 2). \quad (13.18)$$

Можно показать [3], что этот результат приводится к следующему виду:

$$\sigma_{\tau_i}^2 = \frac{1}{(2E_i/N_0)\beta^2}, \quad (13.19)$$

где E_i — энергия радиоимпульса $s_i(t - \tau_i)$:

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t - \tau_i) dt; \quad (13.20)$$

$$\beta^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(j\omega)|^2 d\omega; \quad (13.21)$$

$F(j\omega)$ — комплексный спектр огибающей $f(t)$:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt. \quad (13.22)$$

Вычисления по формуле (13.21) для огибающей гауссовой формы $f(t) = \exp(-2,8 t^2/\tau_{и}^2)$, где $\tau_{и}$ — длительность импульса на уровне 0,5 от максимального значения, приводят к следующему результату:

$$\beta^2 = 2,8/\tau_{и}^2.$$

Применительно к гауссовым радиоимпульсам формула (13.17) при $A_1 = A_2 = A$ принимает вид

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\tau_{и}^2}{1,4(2E/N_0)}, \quad E = \sqrt{\frac{\pi}{5,6} \frac{A^2 \tau_{и}}{2}} = 0,37 A^2 \tau_{и}. \quad (13.23)$$

§ 3. Задачи и ответы

13.1. Имеется последовательность N независимых испытаний, в каждом из которых интересующий нас исход наступает с постоянной, но неизвестной вероятностью p . Пусть n — наблюдаемое число положительных исходов.

Каково наиболее правдоподобное значение p ?

Ответ:

$$p^* = \frac{n}{N}.$$

13.2. Показания n_1, n_2, \dots, n_N каждого из N счетчиков распределены по закону Пуассона. Известно, что средние значения равны

$$\langle n_i \rangle = \lambda t_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где λ — неизвестная интенсивность; t_i — отдельные временные интервалы счета.

Найти оценку интенсивности λ .

Ответ [5]:

$$\lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^N n_i}{\sum_{i=1}^N t_i}.$$

13.3. Найти дисперсию оценки амплитуды a гауссова импульса

$$s(t, a) = a \exp \left[-\frac{2,8}{\tau_n^2} (t - \tau_0)^2 \right], \quad 0 < \tau_0 < T,$$

принимаемого на фоне нормального стационарного шума с экспоненциальной функцией корреляции (13.5).

Ответ:

$$\sigma_a^2 = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\frac{2\pi}{2,8} \left(\alpha\tau_n + \frac{2,8}{\alpha\tau_n} \right)}} = 2,67 \frac{\alpha\tau_n\sigma^2}{2,8 + (\alpha\tau_n)^2}.$$

13.4. На фоне одного и того же белого шума $n(t)$ отдельно принимаются прямоугольный и гауссов радиопульсы

$$s_1(t, a) = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad 0 < t < t + \tau_n < T,$$

$$s_2(t, a) = a e^{-\gamma(t-\tau_0)^2} \cos[\omega(t-\tau_0) + \varphi_0], \quad 0 < \tau_0 < T.$$

Найти предельную точность измерения амплитуды a таких радиопульсов, считая, что они практически полностью расположены внутри интервала $(0, T)$. Сравнить результаты при равенстве энергий радиопульсов, т. е. при условии

$$\int_0^T s_1^2(t, a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t, a) dt.$$

Ответ:

$$\sigma_{1a}^2 = \frac{N_0}{\tau_n}, \quad \sigma_{2a}^2 = N_0 \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}}; \quad \sigma_{1a}^2 = \sigma_{2a}^2 \quad \text{при} \quad \tau_n = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}.$$

13.5. Вычислить дисперсию оценки параметра m радиосигнала $s(t, m) = A_0(1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega t + \varphi_0)$, $0 < t < T$, $(\omega T \gg 1)$,

принимаемого на фоне белого шума $n(t)$.

Ответ:

$$\sigma_m^2 = \frac{2N_0}{A_0^2 T} \left[1 + \frac{\sin 2\Omega T}{2\Omega T} \right]^{-1}$$

13.6. Прямоугольный радиоимпульс (13.16) принимается на фоне узкополосного шума (13.6).

Найти дисперсию оценки амплитуды a . Рассмотреть частный случай, когда $\omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \alpha^2}$.

Ответ:

$$\sigma_a^2 = \frac{8\alpha\omega_0^2\sigma^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}; \quad \sigma_a^2 = 2\sigma^2/\alpha \text{ при } \omega = \omega_0.$$

13.7. На фоне белого шума $n(t)$ принимается радиосигнал

$$s(t, \varphi) = U(t)\cos[\omega t + \psi(t) + \varphi],$$

где $U(t)$ и $\psi(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции.

Определить дисперсию оценки неизвестной начальной фазы φ .

Ответ:

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{(2E/N_0)}, \quad E = \frac{1}{2} \int_0^T U^2(t) dt \quad (\omega T \gg 1).$$

13.8. Вычислить дисперсию оценки временного положения τ_0 гауссова импульса

$$s(t, \tau_0) = a \exp \left[-\frac{2,8}{\tau_n^2} (t - \tau_0)^2 \right]$$

при оптимальном приеме на фоне белого шума. Предполагается, что весь импульс практически находится внутри интервала наблюдения $(0, T)$.

Ответ:

$$\sigma_{\tau_0}^2 = \frac{\tau_n^2}{2,8(2E/N_0)}, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \tau_0) dt = \sqrt{\frac{\pi}{5,6}} a^2 \tau_n = 0,75 a^2 \tau_n.$$

13.9. Решить задачу 13.8 для случая, когда прием гауссова импульса производится на фоне экспоненциально коррелированного шума (13.5). При каком условии ответы к задачам 13.8 и 13.9 совпадают?

Ответ:

$$\sigma_{\tau_0}^2 = \frac{4\sigma^2\tau_n^2}{5,6\alpha E}; \quad N_0 = \frac{4\sigma^2}{\alpha}.$$

13.10. На фоне белого шума $n(t)$ принимается прямоугольный радиоимпульс

$$s(t, \Omega) = a \cos [(\omega + \Omega)t + \varphi_0], \quad 0 < t < \tau_n.$$

Найти предельную точность измерения смещения частоты Ω .

Ответ:

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{3}{\tau_n^2 (2E/N_0)}, \quad E = \int_0^T s^2(t, \Omega) dt = \frac{1}{2} a^2 \tau_n \quad (\omega T \gg 1).$$

13.11. Решить задачу 13.10 для гауссова радиоимпульса

$$s(t, \Omega) = a \exp \left[-\frac{2,8}{\tau^2} (t - \tau_0)^2 \right] \cos [(\omega + \Omega)(t - \tau_0) + \varphi_0], \quad 0 < \tau_0 < T.$$

Сравнить результаты для прямоугольного и гауссова радиоимпульсов при равенстве их энергий.

Ответ:

$$\sigma_{\Omega}^{\prime 2} = \frac{11,2}{\tau^2 (2E/N_0)}; \quad \frac{\sigma_{\Omega}^{\prime 2}}{\sigma_{\Omega}^2} = 3,7 \left(\frac{\tau_n}{\tau} \right)^2.$$

13.12. Решить задачу 13.10 для случая, когда прямоугольный радиоимпульс принимается на фоне экспоненциально коррелированного шума (13.5), считая возможные значения Ω много меньше ω .

Ответ:

$$\sigma_{\Omega}^2 \simeq \frac{6\sigma^2}{2\alpha\tau_n^2 E [1 + (\omega/\alpha)^2]}.$$

13.13. Вычислить дисперсию оценки параметра β радиосигнала

$$s(t, \beta) = a \cos (\omega t + \beta \cos \Omega t + \varphi_0), \quad 0 \leq t \leq T,$$

принимаемого на фоне белого шума. Предполагается, что возможные значения β много меньше ω и $\omega T \gg 1$.

Ответ:

$$\sigma_{\beta}^2 = \frac{2}{2E/N_0} \left[1 + \frac{\sin 2\Omega T}{2\Omega T} \right]^{-1} \simeq \frac{2}{2E/N_0}, \quad E = \int_0^T s^2(t, \beta) dt \simeq \frac{1}{2} a^2 T.$$

13.14. Определить дисперсию оценки небольшого смещения частоты Ω прямоугольного радиоимпульса

$$s(t, \Omega) = a \cos [(\omega + \Omega)t + \varphi_0], \quad 0 < t < \tau_n,$$

принимаемого на фоне флуктуационного шума с корреляционной функцией (13.6), в которой $\omega_1 = \omega_0 \gg \alpha$. Предполагается, что допустимые значения Ω значительно меньше ω .

Ответ:

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{12\alpha\sigma^2}{\tau_{\Pi}^2 E} \left(\frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2, \quad E = \int_0^{\tau_{\Pi}} s^2(t, \Omega) dt = \frac{1}{2} a^2 \tau_{\Pi}, \quad \omega \tau_{\Pi} \gg 1.$$

Литература

1. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
2. Вандер Варден Б. Л. Математическая статистика. Изд-во иностранной литературы, 1960.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1966.
4. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. Изд-во «Советское радио», 1969.
5. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. Изд-во «Мир», 1968.

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

14. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

§ 1. Теоретические сведения

Дискретные (цифровые) системы связи — системы, в которых как реализации сообщения, так и реализации сигнала представляют собой последовательности символов алфавита, содержащего конечное число элементарных символов [1].

Пусть x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — совокупность возможных различных независимых элементарных символов алфавита на входе системы, а y_j , $j = 1, 2, \dots, m$ — совокупность символов на ее выходе; $p(x_i)$ — априорная вероятность символа x_i ; $p(y_j)$ — вероятность появления символа y_j на выходе системы; $p(x_i, y_j)$ — совместная вероятность появления на выходе системы символа y_j , если на входе был символ x_i ; $p(x_i | y_j)$ — апостериорная вероятность символа x_i ; $p(y_j | x_i)$ — условная вероятность появления на выходе системы y_j при условии, что на входе был символ x_i . Для этих вероятностей выполняются соотношения

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j); \quad p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j); \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(y_j) = 1. \quad (14.1)$$

Тогда собственная информация символа x_i (количество информации, доставляемое самим символом x_i или любым другим однозначно с ним связанным) определяется формулой

$$I(x_i) = -\log p(x_i). \quad (14.2)$$

Другие понятия информации определяются следующими соотношениями:

— условная собственная информация $I(x_i | y_j)$ символа x_i при известном y_j

$$I(x_i | y_j) = -\log p(x_i | y_j); \quad (14.3)$$

— взаимная информация $I(x_i; y_j)$ двух случайных символов относительно друг друга (количество информации относительно символа x_i , доставляемое y_j)

$$I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)}; \quad (14.4)$$

— собственная информация $I(x_i, y_j)$ совместного события x_i, y_j

$$I(x_i, y_j) = -\log p(x_i, y_j); \quad (14.5)$$

— среднее количество информации $I(X; y_j)$, доставляемое принятым символом y_j относительно множества всех передаваемых символов $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$I(X; y_j) = \sum_{i=1}^n I(x_i; y_j) p(x_i | y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i | y_j) \log \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)}; \quad (14.6)$$

— среднее количество взаимной информации $I(x_i; Y)$ по множеству символов $Y = \{y_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, при фиксированном x_i

$$I(x_i; Y) = \sum_{j=1}^m I(x_i; y_j) p(y_j | x_i) = \sum_{j=1}^m p(y_j | x_i) \log \frac{p(y_j | x_i)}{p(y_j)}; \quad (14.6a)$$

— полное среднее количество взаимной информации $I(X; Y)$ в множестве символов Y относительно множества символов X

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} = \sum_{j=1}^m p(y_j) I(X; y_j). \quad (14.7)$$

При решении большинства задач, связанных с построением систем передачи и преобразования информации, наибольший интерес представляет величина $I(X; Y)$.

Если символ x_i статистически связан не только с символом y_j , но и с третьим символом z_k , $k = 1, 2, \dots, l$, то при известных вероятностях $p(x_i, y_j, z_k)$ условная взаимная информация равна

$$I(x_i; y_j | z_k) = \log \frac{p(x_i | y_j, z_k)}{p(x_i | z_k)} = \log \frac{p(x_i; y_j | z_k)}{p(x_i | z_k) p(y_j | z_k)}, \quad (14.8)$$

где $I(x_i; y_j | z_k)$ — количество информации, доставляемое y_j относительно x_i , когда предварительно известен символ z_k .

Единица количества информации определяется выбором основания логарифмов. Когда используются логарифмы при основании два, то количество информации I измеряется в двоичных единицах (дв. ед., бит). Переход от одной системы логарифмов к другой равносильен простому изменению единицы измерения информации. Этот переход осуществляется по формуле $\log_b k = \log_a a \cdot \log_a k$.

Для количества информации справедливы соотношения:

$$I(x_i; y_j) = I(y_j; x_i); \quad I(x_i; y_j) \leq I(x_i); \quad I(x_i; y_j) \leq I(y_j); \quad (14.9)$$

$$I(x_i; y_j, z_k) = I(x_i; y_j) + I(x_i; z_k | y_j) = I(x_i; z_k) + I(x_i; y_j | z_k), \quad (14.10)$$

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) - I(x_i | y_j) = I(y_j) - I(y_j | x_i) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i, y_j), \quad (14.11)$$

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j), \quad (14.12)$$

$$I(X; y_j) \geq 0, \quad I(x_i; Y) \geq 0, \quad (14.13)$$

$$I(X; Y) = I(Y; X) \geq 0, \quad (14.14)$$

$$I(X; YZ) = I(X; Y) + I(X; Z|Y), \quad (14.15)$$

$$I(YZ; X) = I(Y; X) + I(Z; X|Y). \quad (14.16)$$

По аналогии со средней взаимной информацией, средняя собственная информация определяется формулой

$$I(X) = \sum_{i=1}^n p(x_i) I(x_i) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i) = H(X), \quad (14.17)$$

где $H(X)$ — энтропия дискретной случайной величины X , определяющая количественную меру неопределенности о сообщении до его приема.

Для энтропии справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(y_j | x_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^n p(x_i) \sum_{j=1}^m p(y_j | x_i) \log p(y_j | x_i) = I(Y|X), \end{aligned} \quad (14.18)$$

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i | y_j) = \\ &= - \sum_{j=1}^m p(y_j) \sum_{i=1}^n p(x_i | y_j) \log p(x_i | y_j) = I(X|Y), \end{aligned} \quad (14.19)$$

$$H(XY) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j), \quad (14.20)$$

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y), \quad (14.21)$$

где $H(Y|X)$ — условная энтропия множества событий Y при данном множестве событий X ; $H(X|Y)$ — условная энтропия множества событий X при данном множестве Y ; $H(XY)$ — энтропия множества совместных событий XY .

Когда множества X и Y независимы, то $H(Y|X) = H(Y)$, $H(X|Y) = H(X)$. При этом

$$H(XY) = H(X) + H(Y). \quad (14.21a)$$

Средняя взаимная информация $I(X; Y)$ связана с энтропией соотношениями

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(XY), \quad (14.22)$$

$$I(X; Y) \leq H(X), I(X; Y) \leq H(Y). \quad (14.32)$$

Энтропия H — удобная мера неопределенности законов распределения вероятностей, особенно в тех случаях, когда распределения являются асимметричными, многовершинными и когда использование таких числовых характеристик, как среднее значение, дисперсия и моменты высших порядков, теряет всякую наглядность и удобство.

Значения энтропии некоторых дискретных законов распределения вероятностей приведены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

| Наименование закона распределения | Аналитическое выражение закона распределения | Энтропия $H(X)$ закона распределения |
|-----------------------------------|--|---|
| 1. Биномиальный | $P_n(k) = P_n(X=k) = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ C_n^k p^k q^{n-k}, & 0 \leq X \leq n, \\ 0, & X > n \end{cases}$ | $H(X) = -n[p \log p + q \log q] - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k p^k q^{n-k} \log C_n^k,$ $q = 1 - p$ |
| 2. Пуассона | $P_n(k) = P_n(X=k) = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & X \geq 0 \end{cases}$ | $H(X) = \lambda \log \frac{e}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \log(k!)$ |
| 3. Равномерный | $P(k) = P(X=k) = \begin{cases} 0, & X < 1, \\ \frac{1}{n}, & 1 \leq X \leq n \end{cases}$ | $H(X) = \log n$ |
| 4. Полюа | $P(k) = P(X=k) = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ P_0 \left(\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda} \right)^k \times \frac{1(1+\alpha)\dots[1+(k-1)\alpha]}{k!}, & X > 0 \end{cases}$ | $H(X) = -\lambda \log \lambda + \frac{1+\alpha\lambda}{\alpha} \log(1+\alpha\lambda) - \sum_{k=1}^{\infty} P_0 \left(\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda} \right)^k \times \frac{1(1+\alpha)\dots[1+(k-1)\alpha]}{k!} \times \log \frac{1(1+\alpha)\dots[1+(k-1)\alpha]}{k!}$ |

Таблица 14.2

Относительные частоты появления букв в русском алфавите

| | | | | | | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Буква | —* | о | е, ё | а | и | т | н | с | р | в | л |
| Частота | 0,175 | 0,090 | 0,072 | 0,062 | 0,062 | 0,053 | 0,053 | 0,045 | 0,040 | 0,038 | 0,035 |
| Буква | к | м | д | п | у | я | ы | з | ь, ъ | б | г |
| Частота | 0,028 | 0,026 | 0,025 | 0,023 | 0,021 | 0,018 | 0,016 | 0,016 | 0,014 | 0,014 | 0,013 |
| Буква | ч | й | х | ж | ю | ш | ц | щ | э | ф | |
| Частота | 0,012 | 0,010 | 0,009 | 0,007 | 0,006 | 0,006 | 0,004 | 0,003 | 0,003 | 0,002 | |

* Промежуток между словами.

Таблица 14.3

Относительные частоты появления букв в английском тексте

| | | | | | | | | | | |
|---------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|
| Буква | — | E | T | O | A | N | I | R | S | H |
| Частота | 0,2 | 0,105 | 0,072 | 0,0654 | 0,063 | 0,059 | 0,055 | 0,054 | 0,052 | 0,047 |
| Буква | D | L | C | F | U | M | P | Y | W | G |
| Частота | 0,035 | 0,029 | 0,023 | 0,0225 | 0,0225 | 0,021 | 0,0175 | 0,012 | 0,012 | 0,011 |
| Буква | B | V | K | X | J | Q | Z | | | |
| Частота | 0,0105 | 0,008 | 0,003 | 0,002 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | | | |

Таблица 14.4

Значения энтропий H_i

| | | | | | | |
|---|-------|-------|---------|-------|-------|-------|
| Энтропия $\left[\frac{\text{дв. ед.}}{\text{буква}} \right]$ | H_0 | H_1 | H_2^* | H_3 | H_5 | H_8 |
| Русский текст | 5,00 | 4,35 | 3,52 | 3,00 | — | — |
| Английский текст | 4,75 | 4,03 | 3,32 | 3,10 | 2,16 | 1,86 |

* H_2 — энтропия на букву текста при учете вероятности появления двухбуквенных сочетаний.

Для характеристики величины, на которую удлиняются сообщения на данном языке по сравнению с минимальной длиной, потребной для передачи той же информации, вводят специальный параметр R — избыточность

$$R = 1 - \frac{H_\infty}{\log N} = 1 - \frac{H_\infty}{H_0} = 1 - \mu, \quad 0 \leq R \leq 1, \quad (14.24)$$

где N — число различных букв используемого алфавита; H_∞ — энтропия, приходящаяся на одну букву смыслового текста при учете всех многобуквенных сочетаний; $H_0 = \log N$ — максимальная энтропия, приходящаяся на букву, когда буквы независимы и равновероятны; μ — коэффициент сжатия текста.

Избыточность наиболее распространенных европейских языков превышает 50%.

Некоторые данные о статистической структуре различных языков приведены в табл. 14.2, 14.3 и 14.4 [1—3]. Так, в табл. 14.2 приведены относительные частоты появления отдельных букв в русском тексте, в табл. 14.3 — в английском тексте, а в табл. 14.4 — значения энтропий, приходящихся на одну букву с учетом различных буквенных сочетаний.

Во многих случаях выгодно первоначальное сообщение источника представить при помощи другого алфавита, что осуществляется с помощью кодирования.

Характеристиками кода являются значность кода и его основание. Значность кода n — число символов в кодовом слове (кодовой комбинации), а основание L — число различных символов кода. Наиболее распространены двоичные (бинарные) коды с основанием $L = 2$. Равномерным является такой код, у которого значность кода для всех кодовых слов одинакова (например, код Бодо).

При кодировании сообщений, передаваемых по каналам связи без помех, необходимо выполнить следующие два условия.

1. Кодовые слова должны быть различимы и однозначно связаны с соответствующими сообщениями.

2. Применяемый способ кодирования должен обеспечить максимальную экономичность (краткость) кода, при которой на передачу данного сообщения затрачивается минимальное время.

Код, удовлетворяющий второму из этих условий, называют оптимальным.

Если $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, — ансамбль взаимно независимых сообщений с априорными вероятностями $p(u_i)$, а $\{v_j\}$, $j = 1, 2, \dots, \dots, L$, — ансамбль символов кода и $L < N$, то число кодовых слов по n символов в каждом слове равно

$$M = L^n.$$

При $L^n \geq N$, где n — наименьшее целое число, для которого выпол-

няется это неравенство, ансамбль сообщений $\{u_i\}$ можно однозначным образом закодировать при помощи N различных кодовых слов по n символов в слове.

Среднее число $\langle n \rangle$ символов кода, приходящихся на одно сообщение, равно

$$\langle n \rangle = \sum_{i=1}^N n_i p(u_i), \quad (14.25)$$

причем

$$\frac{H(U)}{\log L} \leq \langle n \rangle < \frac{H(U)}{\log L} + 1, \quad (14.26)$$

где

$$H(U) = - \sum_{i=1}^N p(u_i) \log p(u_i)$$

— энтропия ансамбля сообщений.

При кодировании целых «блоков», а не отдельных сообщений

$$\frac{H(U)}{\log L} \leq \langle n \rangle < \frac{H(U)}{\log L} + \frac{1}{\nu}, \quad (14.27)$$

где ν — число статистически независимых символов в блоке.

Для двоичного кода ($L = 2$)

$$H(U) \leq \langle n \rangle < H(U) + \frac{1}{\nu}. \quad (14.28)$$

Примерами двоичных кодов, близких к оптимальным, являются код Шеннона — Фано и код Хаффмена [1—5].

Наиболее экономное кодирование сообщений — одна из сторон работы системы связи. Другими ее характеристиками являются скорость передачи, пропускная способность и т. д.

Пусть имеется дискретный, стационарный канал связи без памяти с заданными характеристиками (рис. 14.1), причем все символы x_i закодированного сообщения и соответствующие им

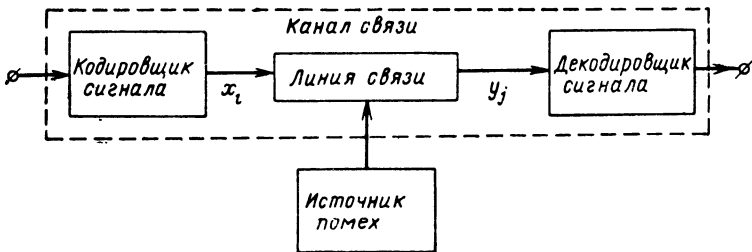


Рис. 14.1. Канал связи с помехами.

элементарные сигналы y_j имеют одинаковую длительность τ , где $F = 1/\tau$ — частота посылки символов.

Канал без памяти (без последствия) полностью описывается априорными вероятностями $p(x_i)$ и условными вероятностями $p(y_j|x_i)$. Вероятности $p(x_i)$ характеризуют структуру закодированных сообщений, а $p(y_j|x_i)$ определяются характеристиками канала.

Скорость передачи V_k — среднее количество информации, получаемое за единицу времени:

$$V_k = FI(X; Y) = F[H(X) - H(X|Y)] = F[H_1(Y) - H(Y|X)]. \quad (14.29)$$

При отсутствии помех X и Y статистически полностью взаимозависимы, т. е. $H(X|Y) = H(Y|X) = 0$. Следовательно,

$$V_{k \max} = FH(X) = FH(Y). \quad (14.29a)$$

Пропускная способность канала связи C — максимальная скорость передачи информации, которая может быть достигнута выбором оптимального распределения вероятностей передачи $p(x_i)$ символов сообщения:

$$\begin{aligned} C = \text{Max}_{p(x_i)} FI(X; Y) &= \text{Max}_{p(x_i)} F[H(X) - H(X|Y)] = \\ &= \text{Max}_{p(x_i)} F[H(Y) - H(Y|X)]. \end{aligned} \quad (14.30)$$

При отсутствии помех [$H(X|Y) = H(Y|X) = 0$]:

$$C = C_m = \text{Max}_{p(x_i)} FI(X; Y) = \text{Max}_{p(x_i)} FH(X) = \text{Max}_{p(x_i)} FH(Y). \quad (14.30a)$$

Для двоичного симметричного канала связи

$$C = F[1 + (1 - P_e) \log(1 - P_e) + P_e \log P_e], \quad (14.31)$$

где P_e — вероятность ошибочного приема,

$$\log P_e = \log_2 P_e.$$

При отсутствии помех ($P_e = 0$)

$$C = C_m = F. \quad (14.31a)$$

На рис. 14.2 приведены зависимости относительной пропускной способности от отношения сигнал/шум при оптимальных методах приема радиотелеграфных сигналов [1], причем сплошные кривые относятся к детерминированному сигналу, а пунктирные — к сигналу со случайной начальной фазой;

E — энергия сигнала, N_0 — спектральная плотность белого шума.

Чтобы повысить достоверность приема дискретной информации, используют корректирующие коды (коды с обнаружением ошибок и коды с обнаружением и исправлением ошибок). Методы помехо-

устойчивого кодирования основаны на введении в код некоторой избыточности, достаточной для компенсации помех [6—12].

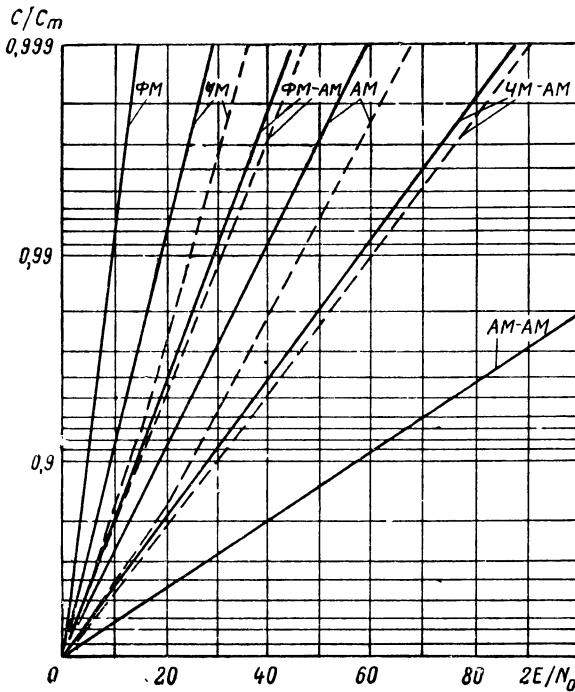


Рис. 14.2. Пропускная способность различных систем радиотелеграфии при приеме детерминированных сигналов (сплошные кривые) и сигналов со случайной начальной фазой (пунктирные кривые) на фоне белого шума.

Оценками экономичности и эффективности кодов с обнаружением ошибок служат коэффициент избыточности $R_{изб}$ и коэффициент обнаружения $K_{обн}$ [6]:

$$R_{изб} = 1 - \frac{\log M_1}{\log M}, \quad (14.32)$$

$$K_{обн} = \frac{Q}{Q + Q_1}, \quad (14.33)$$

где $M = 2^n$ — общее число кодовых слов, которое можно получить в n -элементном коде; M_1 — количество используемых комбинаций; Q — общее количество искаженных комбинаций, ошибка в которых может быть обнаружена; Q_1 — общее число искаженных комбинаций, ошибка в которых не поддается обнаружению.

§ 2. Примеры

Пример 14.1. В партии 100 радиоламп, из которых 5% бракованных. Из партии выбираются наудачу 5 радиоламп для контроля. Какое количество информации содержится в сообщении о том, что в случайной выборке оказалось ровно 3 бракованных радиолампы?

Решение. Случайная величина X — число бракованных радиоламп в выборке из пяти радиоламп — может принять значения $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5$. Распределение вероятностей величины X подчинено гипергеометрическому закону (см. табл. 2.1):

$$P_n(k) = P_n(X = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

В нашем случае $N = 100, n = 5, M = 100 \cdot 0,05 = 5, k = 3$. Следовательно, вероятность $P_5(3)$ того, что в случайной выборке будет ровно три бракованные радиолампы, равна

$$P_5(3) = \frac{C_5^3 C_{100-5}^{5-3}}{C_{100}^5} = \frac{5!}{3! 2!} \frac{95!}{2! 93!} = \frac{95 \cdot 47}{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 8} \approx 0,000953.$$

Используя формулу (14.2) и приложение VI, получим

$$I(x_4) = -\log p(x_4) = -\log P_5(3) \approx 10,7 \text{ дв. ед.}$$

Пример 14.2. По двоичному симметричному каналу связи с помехами (рис. 14.3) передаются сигналы x_1 и x_2 с априорными ве-

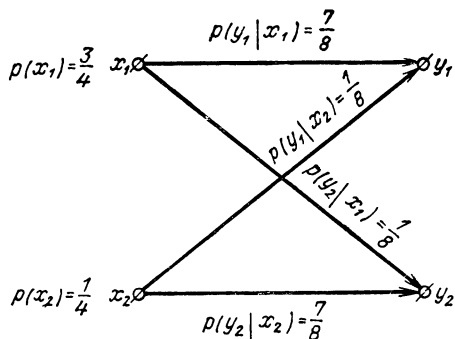


Рис. 14.3. Двоичный симметричный канал связи с помехами.

роятностями $p(x_1) = \frac{3}{4}$ и $p(x_2) = \frac{1}{4}$. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов (x_1 и x_2) уменьшается до $\frac{7}{8}$.

Найти: а) условную собственную информацию $I(x_2|y_2)$; б) взаимную информацию $I(x_2; y_2)$; в) средние количества информации $I(X; y_2)$, $I(X)$, $I(X|Y)$, $I(X; Y)$.

Решение. По условию

$$p(x_1) = \frac{3}{4}, \quad p(x_2) = \frac{1}{4}, \quad p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = \frac{7}{8},$$

$$p(y_1|x_2) = p(y_2|x_1) = \frac{1}{8}.$$

Вычислим вероятности $p(y_j)$, $p(x_i, y_j)$ и $p(x_i|y_j)$:

$$p(y_1) = p(x_1)p(y_1|x_1) + p(x_2)p(y_1|x_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{22}{32};$$

$$p(y_2) = p(x_2)p(y_2|x_2) + p(x_1)p(y_2|x_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{10}{32};$$

$$p(x_1, y_1) = p(x_1)p(y_1|x_1) = p(y_1)p(x_1|y_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{32};$$

$$p(x_1, y_2) = p(x_1)p(y_2|x_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32};$$

$$p(x_2, y_1) = p(x_2)p(y_1|x_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32};$$

$$p(x_2, y_2) = p(x_2)p(y_2|x_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32}.$$

Так как

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i)p(y_j|x_i)}{p(y_j)},$$

то

$$p(x_1|y_1) = \frac{p(x_1)p(y_1|x_1)}{p(y_1)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8}}{\frac{22}{32}} = \frac{21}{22},$$

$$p(x_1|y_2) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{10}{32}} = \frac{3}{10}, \quad p(x_2|y_1) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{22}{32}} = \frac{1}{22},$$

$$p(x_2|y_2) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8}}{\frac{10}{32}} = \frac{7}{10}.$$

а) На основании (14.3) имеем

$$I(x_2|y_2) = -\log p(x_2|y_2) = -\log \frac{7}{10} \approx 0,515 \text{ дв. ед.}$$

б) Используя формулу (14.4), получим

$$I(x_2; y_2) = \log \frac{p(x_2 | y_2)}{p(x_2)} = \log \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{4}} \approx 1,485 \text{ дв. ед.}$$

в) Согласно (14.6) находим

$$I(X; y_2) = \sum_{i=1}^2 p(x_i | y_2) \log \frac{p(x_i | y_2)}{p(x_i)} = p(x_1 | y_2) \log \frac{p(x_1 | y_2)}{p(x_1)} + \\ + p(x_2 | y_2) \log \frac{p(x_2 | y_2)}{p(x_2)} = \frac{3}{10} \log \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} + \frac{7}{10} \log \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{4}} \approx 0,644 \text{ дв. ед.}$$

Применив формулу (14.17), получим

$$I(X) = - \sum_{i=1}^2 p(x_i) \log p(x_i) = -[p(x_1) \log p(x_1) + \\ + p(x_2) \log p(x_2)] = - \left(\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \right) \approx 0,811 \text{ дв. ед.}$$

Для вычисления информации $I(X|Y)$ воспользуемся формулой (14.19):

$$I(X|Y) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log p(x_i | y_j) = \\ = -[p(x_1, y_1) \log p(x_1 | y_1) + p(x_2, y_1) \log p(x_2 | y_1) + \\ + p(x_1, y_2) \log p(x_1 | y_2) + p(x_2, y_2) \log p(x_2 | y_2)] = \\ = - \left(\frac{21}{32} \log \frac{21}{22} + \frac{1}{32} \log \frac{1}{22} + \frac{3}{32} \log \frac{3}{10} + \frac{7}{32} \log \frac{7}{10} \right) \approx \\ \approx 0,459 \text{ дв. ед.}$$

Согласно формуле (14.7) находим

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} = \\ = p(x_1, y_1) \log \frac{p(x_1 | y_1)}{p(x_1)} + p(x_2, y_1) \log \frac{p(x_2 | y_1)}{p(x_2)} + \\ + p(x_1, y_2) \log \frac{p(x_1 | y_2)}{p(x_1)} + p(x_2, y_2) \log \frac{p(x_2 | y_2)}{p(x_2)} = \\ = \frac{21}{32} \log \frac{\frac{21}{22}}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{32} \log \frac{\frac{1}{22}}{\frac{3}{4}} + \frac{3}{32} \log \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} + \frac{7}{32} \log \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{4}} \approx \\ \approx 0,352 \text{ дв. ед.}$$

Пример 14.3. Источник сообщений генерирует множество кодовых комбинаций, одна из которых имеет априорную вероятность $p(x) = \frac{1}{8}$, а апостериорные вероятности, соответствующие последовательному приему символов $y = 1$, $z = 0$ и $u = 1$, равны $p(x|y) = p(x|1) = \frac{1}{6}$,

$$p(x|yz) = p(x|10) = \frac{1}{2}, \quad p(x|yzu) = p(x|101) = 1.$$

Определить увеличение информации о сообщении x в процессе приема символов y , z и u .

Решение. После приема первого символа $y = 1$ информация $I(x; y)$ равна

$$I(x; y) = I(x; 1) = \log \frac{p(x|1)}{p(x)} = \log \frac{4}{3} \approx 0,415 \text{ дв.ед.}$$

Второй принятый символ $z = 0$ на основании (14.8) доставит следующую дополнительную информацию:

$$I(x; z|y) = I(x; 0|1) = \log \frac{p(x|10)}{p(x|1)} = \log \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \log 3 \approx 1,585 \text{ дв.ед.}$$

Аналогично, третий символ $u = 1$ доставит о сообщении x информацию

$$I(x; u|yz) = I(x; 1|10) = \log \frac{p(x|101)}{p(x|10)} = \log 2 = 1 \text{ дв. ед.}$$

Полная информация $I(x; yzu)$ о сообщении x после приема всех трех символов составит величину

$$\begin{aligned} I(x; yzu) &= I(x; y) + I(x; z|y) + I(x; u|yz) = \\ &= I(x; 1) + I(x; 0|1) + I(x; 1|10) = 0,415 + 1,585 + 1 = 3 \text{ дв. ед.} \end{aligned}$$

Пример 14.4. Источник сообщений вырабатывает ансамбль символов $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, с вероятностями $p(x_1) = 0,2$; $p(x_2) = 0,3$; $p(x_3) = 0,4$ и $p(x_4) = 0,1$. Корреляционные связи между символами отсутствуют.

Вычислить энтропию источника.

Решение: Запишем условие в виде таблицы:

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
| p_i | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Применив формулу (14.17) и воспользовавшись данными приложения VII, получим

$$H(X) = - \sum_{i=1}^4 p(x_i) \log p(x_i) = - [p(x_1) \log p(x_1) + p(x_2) \log p(x_2) + p(x_3) \log p(x_3) + p(x_4) \log p(x_4)] = - 0,2 \log 0,2 - 0,3 \log 0,3 - 0,4 \log 0,4 - 0,1 \log 0,1 = 0,4644 + 0,5211 + 0,5288 + 0,3322 \approx 1,847 \text{ дв. ед.}$$

Пример 14.5. Определить энтропию случайной величины X , распределенной по биномиальному закону: а) в общем случае; б) при $p = \frac{1}{2}$ и $n = 5$.

Решение. По условию случайная величина X распределена по биномиальному закону. Следовательно,

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

$$\begin{aligned} \text{а) } H(X) &= - \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \log C_n^k p^k q^{n-k} = \\ &= - \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \log C_n^k - \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \log p^k - \\ &\quad - \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \log q^{n-k}. \end{aligned}$$

Так как при $k=0$ и $k=n$ $\log C_n^k = 0$,

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1, \quad \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = np,$$

то

$$H(X) = -n(p \log p + q \log q) - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k p^k q^{n-k} \log C_n^k.$$

б) При $p = q = \frac{1}{2}$ и $n = 5$ с помощью приложения VII получим

$$\begin{aligned} H(X) &= -5 \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) - \sum_{k=1}^4 C_5^k \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{5-k} \log C_5^k = \\ &= 5 - \frac{1}{32} \sum_{k=1}^4 C_5^k \log C_5^k = 5 - \frac{5 \log 5 + 10 \log 10}{16} \approx 2,198 \text{ дв. ед.} \end{aligned}$$

Пример 14.6. Алфавит состоит из четырех букв x_1, x_2, x_3, x_4 . Численные значения вероятностей $p(x_i)$ появления отдельных букв и условных вероятностей $p(x_j | x_i)$ приведены соответственно в табл. 14.5 и 14.6.

Таблица 14.5

Вероятности $p(x_i)$ появления отдельных букв

| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| $p(x_i)$ | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,125 |

Таблица 14.6

Вероятности $p(x_j|x_i)$ появления j -й буквы при условии, что ей предшествовала i -я буква

| $x_i \backslash x_j$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | $\sum_{j=1}^4 p(x_j x_i)$ |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------------|
| x_1 | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,4 | 1 |
| x_2 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 1 |
| x_3 | 0,25 | 0 | 0,25 | 0,5 | 1 |
| x_4 | 0,2 | 0,4 | 0,4 | 0 | 1 |

Найти избыточность R_1 источника сообщений при статистической независимости букв и избыточность R_2 при учете зависимости между буквами.

Решение. На основании (14.24) имеем

$$R_1 = 1 - \frac{H_1}{H_0}.$$

Так как

$$H_0 = \log N = \log 4 = 2 \text{ дв. ед.},$$

$$H_1 = - \sum_{i=1}^4 p(x_i) \log p(x_i) = - \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \right. \\ \left. + 2 \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} \right) = 1,75 \text{ дв. ед.},$$

то

$$R_1 = 1 - \frac{1,75}{2} = 0,125.$$

При учете статистической зависимости между буквами

$$R_2 = 1 - \frac{H_2}{H_0},$$

где H_2 — энтропия на букву при учете двухбуквенных сочетаний.

Энтропия $H(X_1 X_2)$ двухбуквенного текста равна

$$H(X_1 X_2) = H(X_1) + H(X_2|X_1) = H_1 + H(X_2|X_1) =$$

$$= 1,75 + H(X_2 | X_1),$$

где $H(X_2 | X_1)$ — условная энтропия второй буквы, определяемая формулой (14.18):

$$\begin{aligned} H(X_2 | X_1) &= - \sum_{i=1}^4 p(x_i) \sum_{j=1}^4 p(x_j | x_i) \log p(x_j | x_i) = \\ &= -0,5(0,2 \log 0,2 + 2 \cdot 0,4 \log 0,4) - 0,25(2 \cdot 0,2 \log 0,2 + \\ &+ 2 \cdot 0,3 \log 0,3) - 0,125(2 \cdot 0,25 \log 0,25 + 0,5 \log 0,5) - \\ &- 0,125(0,2 \log 0,2 + 2 \cdot 0,4 \log 0,4) \approx 1,62 \text{ дв. ед.} \end{aligned}$$

Средняя энтропия на одну букву H_2 имеет величину

$$H_2 = \frac{1}{2} H(X_1 X_2) = \frac{1,75 + 1,62}{2} = 1,685 \text{ дв. ед.}$$

Следовательно,

$$R_2 = 1 - \frac{1,685}{2} \approx 0,16.$$

Пример 14.7. Закодировать двоичным кодом Шеннона — Фано ансамбль сообщений $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 7, 8$, если все кодируемые сообщения равновероятны. Показать оптимальный характер полученного кода.

Решение. При кодировании по методу Шеннона — Фано все сообщения записываются в порядке убывания их вероятностей и разбиваются на две группы так, чтобы суммы вероятностей сообщений в каждой из групп были бы по возможности близкими к $\frac{1}{2}$.

Всем сообщениям, входящим в верхнюю группу, приписывается цифра «0» в качестве первой цифры двоичного кода, а сообщениям, входящим в нижнюю группу, — цифра «1». Затем каждая из групп аналогичным образом разбивается на подгруппы по возможности с одинаковыми суммарными вероятностями, причем верхним подгруппам в обеих группах опять приписывается цифра «0» (вторая цифра кода), а нижним — цифра «1». Деление повторяется до тех пор, пока в каждой подгруппе не останется по одному сообщению. Процесс кодирования приведен в табл. 14.7.

Среднее число двоичных знаков, приходящихся в данном случае на одно сообщение, равно

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{i=1}^8 n_i p(x_i) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \\ &+ 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 3 \text{ дв. ед.} \end{aligned}$$

Энтропия $H(X)$ ансамбля кодируемых сообщений

$$H(X) = \log N = \log 8 = 3 \text{ дв. ед.}$$

Таблица 14.7

Кодирование по методу Шеннона—Фано

| Сообщение x_i | $p(x_i)$ | Разбиение | | Кодовое слово |
|-----------------|---------------|-----------|---|---------------|
| x_1 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | 000 |
| x_2 | $\frac{1}{8}$ | | 1 | 001 |
| x_3 | $\frac{1}{8}$ | | 0 | 010 |
| x_4 | $\frac{1}{8}$ | | 1 | 011 |
| x_5 | $\frac{1}{8}$ | 1 | 0 | 100 |
| x_6 | $\frac{1}{8}$ | | 1 | 101 |
| x_7 | $\frac{1}{8}$ | | 0 | 110 |
| x_8 | $\frac{1}{8}$ | | 1 | 111 |

Так как средняя длина кодового слова $\langle n \rangle$ равна энтропии $H(X)$, то код оптимален.

Пример 14.8. Показать, что энтропия $H(X)$ алфавита $\{x_i\}$ с конечным множеством символов $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, достигает максимума

$$H(X) = H_m(X) = \log n,$$

когда все символы равновероятны.

Решение. Обозначив $p(x_i) = p_i$, имеем

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, найдем экстремум функции

$$\Phi = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i + \lambda \sum_{i=1}^n p_i.$$

Дифференцируя это выражение по p_1, \dots, p_n и приравнявая производные нулю, получим систему уравнений

$$\log p_i + \log e + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$\log p_i = -\lambda - \log e = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$H(X) = H_m(X) = \log n.$$

Иное решение задачи дано в [1, 4].

Пример 14.9. Вычислить пропускную способность C двоичного симметричного канала (рис. 14.4) при условии, что все символы x_i сообщения и соответствующие им элементарные сигналы y_j имеют одинаковую длительность τ , где $F = \frac{1}{\tau}$ — частота посылки символов.

Построить график зависимости $\frac{C}{C_m} = f(P_e)$, где C_m — максимальная пропускная способность (при отсутствии помех), а P_e — вероятность ошибочного приема.

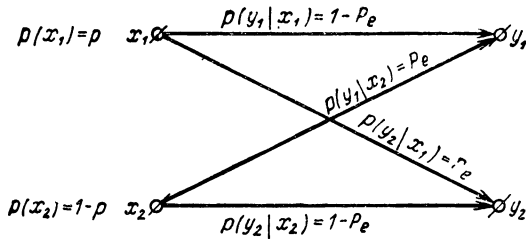


Рис. 14.4. Двоичный симметричный канал связи.

Решение. Согласно (14.30) имеем

$$C = F \text{Max} [H(Y) - H(Y|X)].$$

В нашем случае

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^2 p(y_j) \log p(y_j),$$

$$H(Y|X) = - \sum_{i=1}^2 p(x_i) \sum_{j=1}^2 p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i).$$

Так как

$$p(y_1) = p(x_1)p(y_1|x_1) + p(x_2)p(y_1|x_2) = p(1 - P_e) + (1 - p)P_e = p + P_e - 2pP_e,$$

$$p(y_2) = p(x_2)p(y_2|x_2) + p(x_1)p(y_2|x_1) = (1 - p)(1 - P_e) + pP_e = 1 - p - P_e + 2pP_e,$$

то

$$H(Y) = -[(p + P_e - 2pP_e) \log(p + P_e - 2pP_e) + (1 - p - P_e + 2pP_e) \log(1 - p - P_e + 2pP_e)],$$

$$H(Y|X) = -p(x_1) [p(y_1|x_1) \log p(y_1|x_1) + p(y_2|x_1) \times \\ \times \log p(y_2|x_1)] - p(x_2) [p(y_1|x_2) \log p(y_1|x_2) + \\ + p(y_2|x_2) \log p(y_2|x_2)] = -[(1 - P_e) \log(1 - P_e) + P_e \log P_e].$$

Из выражения для $H(Y|X)$ видно, что ввиду симметрии канала связи условная энтропия $H(Y|X)$ не зависит от вероятности передачи p . Поэтому максимальное значение $I(X; Y)$ достигается просто максимизацией $H(Y)$.

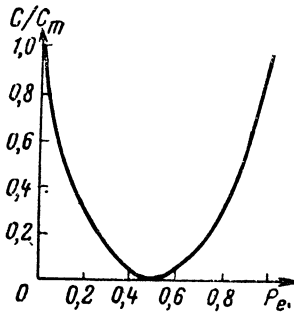


Рис. 14.5. Зависимость пропускной способности двоичного симметричного канала от вероятности ошибочного приема.

Максимум $H(Y)$ достигается тогда, когда сигналы y_1 и y_2 независимы и равновероятны (см. пример 14.8), что, в свою очередь, имеет место при равновероятных передаваемых символах. Следовательно,

$$C = F [1 + (1 - P_e) \log(1 - P_e) + P_e \log P_e].$$

При отсутствии помех ($P_e = 0$)

$$C = C_m = F.$$

Поэтому

$$\frac{C}{C_m} = f(P_e) = 1 + (1 - P_e) \log(1 - P_e) + P_e \log P_e.$$

Зависимость относительной пропускной способности C/C_m от вероятности ошибочного приема P_e изображена на рис. 14.5.

§ 3. Задачи и ответы

14.1. Самолет противника с равной вероятностью может находиться в одной из 1024 зон воздушного пространства.

Какое количество информации получает оператор радиолокационной станции, когда он фиксирует наличие самолета в одной из зон?

Ответ:

$$I(x_i) = 10 \text{ дв. ед.}$$

14.2. Радиостанция состоит из 16 равноценных с точки зрения надежности блоков и имеет устройство контроля и индикации исправности блоков.

Определить минимальное число проб k , которые необходимо выполнить этому устройству, чтобы отыскать любой неисправный блок.

Ответ: $k \geq 4$.

14.3. Определить количество информации, которое содержится в сообщении о том, что сумма выпавших очков на двух подброшенных игральных костях равна семи.

Ответ: $I(x_8) = 2,585 \text{ дв. ед.}$

14.4. По каналу телекодовой связи передаются пять команд $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, с вероятностями $p(x_1) = 0,3$; $p(x_2) = 0,1$; $p(x_3) = 0,25$; $p(x_4) = 0,2$; $p(x_5) = 0,15$.

Определить среднее количество информации, приходящееся на одну команду.

Ответ: $I(X) = 2,228 \text{ дв. ед.}$

14.5. Символы алфавита азбуки Морзе появляются в сообщении с вероятностями: для точки — 0,51, для тире — 0,31, для промежутка между буквами — 0,12 и для промежутка между словами — 0,06.

Определить среднее количество информации в сообщении из 500 символов данного алфавита, считая, что связь между символами отсутствует.

Ответ: $I(X) = 236 \text{ дв. ед.}$

14.6. Напряжение изменяется в пределах $U_2 - U_1 = 8 \text{ в}$. При равномерном квантовании датчик регистрирует приращения напряжения $\Delta U = 0,1 \text{ в}$.

Вычислить максимальное количество информации за 5 отсчетов.

Ответ: $I(X) = 31,61 \text{ дв. ед.}$

14.7. Найти количество информации, которое содержится в квантованном телевизионном сигнале, соответствующему одному кадру развертки изображения, если:

— в кадре 625 строк;

— сигнал, соответствующий одной строке развертки изображения, представляет собой последовательность из 600 случайных по амплитуде импульсов; каждый из которых может с равной вероятностью принять любое значение в интервале от 0 до 8 в;

— каждый импульс квантуется по величине с шагом квантования 1 в;

— импульсы изображения между собой некоррелированы.

Ответ: $I(X) = 1,125 \cdot 10^6$ дв. ед.

14.8. Вычислить среднее количество информации $I(X; y_2)$ о переданных командах $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$, доставляемое принятым сигналом y_2 ансамбля сигналов $Y = \{y_j\}$, $j = 1, 2, 3$, если объединенная система (X, Y) характеризуется распределением вероятностей, приведенным в следующей таблице:

| $y_j \backslash x_i$ | x_1 | x_2 | x_3 | $p(y_j)$ |
|----------------------|-------|-------|-------|----------|
| y_1 | 0,05 | 0,2 | 0 | 0,25 |
| y_2 | 0 | 0,3 | 0,1 | 0,4 |
| y_3 | 0,05 | 0 | 0,3 | 0,35 |
| $p(x_i)$ | 0,1 | 0,5 | 0,4 | — |

Ответ: $I(X; y_2) = 0,268$ дв. ед.

14.9. Радиостанция противника может работать на волне λ_1 (событие A_1) или на волне λ_2 (событие A_2), причем в импульсном (событие B_1) или непрерывном (событие B_2) режимах. Вероятности совместных событий имеют следующие значения: $p(A_1, B_1) = 0,7$; $p(A_1, B_2) = 0,15$; $p(A_2, B_1) = 0,05$; $p(A_2, B_2) = 0,1$.

Вычислить количество информации, получаемой относительно режима работы станции, если станет известной длина волны станции.

Ответ: $I(B; A) = 0,102$ дв. ед.

14.10. Найти максимальную энтропию черно-белого изображения с двумя градациями, содержащего $5 \cdot 10^5$ независимых элементов.

Ответ: $H_m(X) = 5 \cdot 10^5$ дв. ед.

14.11. Распределение вероятностей случайной величины X имеет вид: $p(x_1) = 0,1$; $p(x_2) = 0,1$; $p(x_3) = 0,1$; $p(x_4) = 0,7$.

Определить число n значений случайной величины, при котором энтропия $H_p(X)$ равномерного распределения будет равна энтропии $H(X)$ заданного распределения.

Ответ: $n = 2,56$.

14.12. Вероятность появления события A при одном испытании равна p . Испытания повторяются до первого появления события A .

Найти энтропию числа испытаний X и выяснить характер изменения энтропии с изменением p .

Ответ: $H(X) = - \frac{p \log p + (1-p) \log (1-p)}{p}$ дв. ед.

При уменьшении p от 1 до 0 энтропия монотонно возрастает от 0 до ∞ .

14.13. Для повышения достоверности каждое сообщение может передаваться по каналу связи k раз, причем вероятность неискаженного прохождения сигнала при каждой передаче $p_1 = 0,2$. После k повторений ($1 \leq k \leq N$) решающее устройство сравнивает все k принятых сигналов и при их совпадении выносит решение о правильном приеме, после чего на передающий конец посылается команда о прекращении посылки данного сообщения и о передаче следующего сообщения.

Определить значение коэффициента дублирования k из условия максимума количества информации, обеспечиваемой решающим устройством.

Ответ: $k = 3$.

14.14. Показать, что при аппроксимации распределения вероятностей событий убывающей ступенькой (рис. 14.6) энтропия

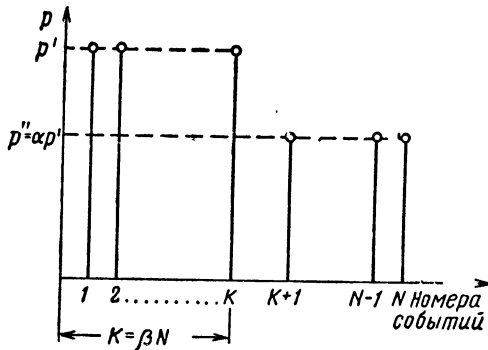


Рис. 14.6. Аппроксимация распределения вероятностей убывающей ступенькой.

$H(X)$ источника сообщений на одно событие имеет вид [14]

$$H(X) = \log N - \left[\frac{\beta}{\beta + (1 - \beta)\alpha} \log \frac{1}{\beta + (1 - \beta)} + \frac{(1 - \beta)\alpha}{\beta + (1 - \beta)\alpha} \log \frac{\alpha}{\beta + (1 - \beta)\alpha} \right],$$

где N — общее число возможных событий, p_i — вероятность i -го события:

$$p_i = \begin{cases} p' & \text{при } 1 \leq i \leq k, \\ p'' & \text{при } k < i \leq N; \end{cases}$$

α и β — параметры, характеризующие относительную форму огибающей распределения:

$$\alpha = \frac{p''}{p'}, \quad \beta = \frac{k}{N}, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$$

14.15. Реальное распределение вероятностей событий аппроксимируется геометрической прогрессией (рис. 14.7).

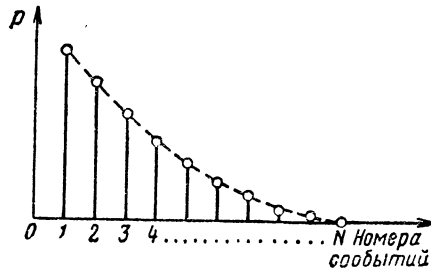


Рис. 14.7. Аппроксимация распределения вероятностей геометрической прогрессией.

Определить энтропию распределения.

Ответ [14]:

$$H(X) = - \left\{ \log \frac{1-q}{1-q^N} + \frac{1}{1-q^N} \left[\frac{q-q^N}{1-q} - (N-1)q^N \right] \log q \right\},$$

где N — общее число событий, p_i — вероятность i -го события, определяемая из условия нормировки $\sum_{i=1}^N p_i = 1$:

$$p_i = p_1 q^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$p_1 = \frac{1-q}{1-q^N};$$

q — знаменатель аппроксимирующей геометрической прогрессии.

14.16. Используя условие и результат задачи 14.15, получить приближенную формулу для энтропии $H'_\infty(X) = - \sum_{i=1}^\infty p_i \log p_i$ (случай очень быстрого убывания вероятностей).

Показать, что ошибка ΔH при использовании приближенной формулы составляет величину

$$\Delta H = H(X) - H'_\infty(X) = \log(1-q^N) + \frac{q^N \log q^N}{1-q^N}.$$

14.17. Показать, что при аппроксимации реального распределения вероятностей геометрическими прогрессиями вида

$$p_{ij} = p_{i1} q_i^{j-1}$$

на частных интервалах изменения номера события (рис. 14.8), энтропия $H_i(X)$, соответствующая i -му интервалу номеров, может быть определена по формуле

$$H_i(X) = -p_{i1} \left\{ \frac{1 - q_i^{N_i}}{1 - q_i} \log p_{i1} + \left[\frac{q_i - q_i^{N_i}}{(1 - q_i)^2} - (N_i - 1) \frac{q_i^{N_i}}{1 - q_i} \right] \log q_i \right\},$$

где N_i — число событий в i -м интервале, q_i — знаменатель геометрической прогрессии, аппроксимирующей распределение в i -м интервале, p_{i1} — вероятность первого события i -го интервала.

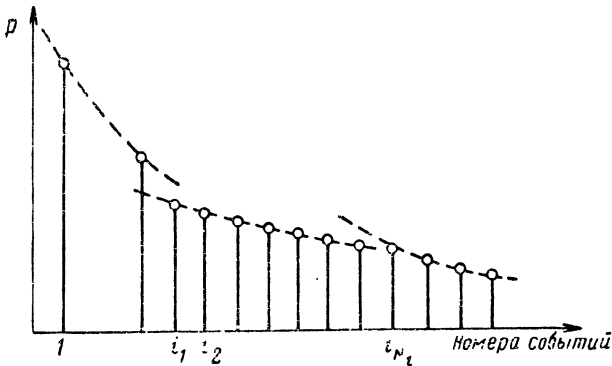


Рис. 14.8. Аппроксимация распределения вероятностей геометрическими прогрессиями на частных интервалах.

14.18. Ансамбли событий X и Y объединены, причем вероятности совместных событий равны: $p(x_1, y_1) = 0,1$; $p(x_1, y_2) = 0,25$; $p(x_2, y_1) = 0,2$; $p(x_2, y_2) = 0$; $p(x_3, y_1) = 0,3$; $p(x_3, y_2) = 0,15$.

Определить: а) энтропии ансамблей X и Y ; б) энтропию объединенного ансамбля; в) условные энтропии ансамблей.

Ответ: а) $H(X) = 1,512$ дв. ед., $H(Y) = 0,971$ дв. ед.; б) $H(XY) = 2,228$ дв. ед.; в) $H(X|Y) = 1,257$ дв. ед., $H(Y|X) = 0,716$ дв. ед.

14.19. Источник сообщений создает последовательность букв, выбранных из набора букв A, B, C, D с вероятностями $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$, причем очередная буква выбирается независимо.

Вычислить избыточность текста.

Ответ: $R = 0,125$.

14.20. Для передачи сообщений используется код, состоящий из трех символов, вероятности появления которых равны $0,6; 0,2; 0,2$. Корреляция между символами кода отсутствует.

Определить избыточность кода.

Ответ: $R = 0,139$.

14.21. Ансамбль сообщений $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 7, 8$, и вероятности сообщений заданы следующей таблицей:

| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| p_i | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

Построить код Шеннона — Фано для данного ансамбля и показать его оптимальный характер.

Ответ: $x_1 - 00$; $x_2 - 01$; $x_3 - 100$; $x_4 - 101$; $x_5 - 1100$; $x_6 - 1101$; $x_7 - 1110$; $x_8 - 1111$. $H(X) = \langle n \rangle = 2,75$ дв. ед.

14.22. Сообщения x_1, x_2, x_3, x_4 появляются соответственно с вероятностями $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ и кодируются четырьмя двоичными кодовыми словами 0, 10, 110, 111.

Требуется: а) показать, что если сообщения статистически независимы, то в получающейся последовательности кодовых слов символы 0 и 1 появляются с равными вероятностями, и что символы в такой последовательности независимы; б) найти среднее значение $\langle n \rangle$ числа двоичных символов на сообщение.

Ответ: б) $\langle n \rangle = H(X) = 1,75$ дв. ед.

14.23. Ансамбль сообщений $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 8, 9$, и их вероятности заданы следующей таблицей:

| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| p_i | 0,20 | 0,15 | 0,15 | 0,12 | 0,10 | 0,10 | 0,08 | 0,06 | 0,04 |

Произвести кодирование двоичным кодом по методу Хаффмена (метод вспомогательных группировок) и вычислить энтропию сообщений $H(X)$ и среднюю длину $\langle n \rangle$ кодового слова.

Ответ: $x_1 - 10$; $x_2 - 001$; $x_3 - 010$; $x_4 - 011$; $x_5 - 110$; $x_6 - 111$; $x_7 - 0001$; $x_8 - 00000$; $x_9 - 00001$.

$H(X) \approx 3,04$ дв. ед.; $\langle n \rangle \approx 3,08$ дв. ед.

14.24. Ансамбль сообщений состоит из двух букв x_1 и x_2 , причем вероятности $p(x_i)$ появления букв соответственно равны $p(x_1) = 0,89$, $p(x_2) = 0,11$.

Определить среднее число символов кода, приходящееся на одну букву, если кодирование осуществляется: а) по одной букве; б) блоками по две буквы; в) блоками по три буквы.

Ответ [5]: а) $x_1 - 0$, $x_2 - 1$, $\langle n \rangle = 1$ дв. ед.; б) $x_1x_1 - 0$, $x_1x_2 - 10$, $x_2x_1 - 110$, $x_2x_2 - 111$; $\langle n \rangle \approx 0,66$ дв. ед.; в) $x_1x_1x_1 - 0$,

$x_1x_1x_2 = 100$, $x_1x_2x_1 = 101$, $x_2x_1x_1 = 110$, $x_1x_2x_2 = 1100$, $x_2x_1x_2 = 11101$, $x_2x_2x_1 = 11110$, $x_2x_2x_2 = 11111$; $\langle n \rangle = 0,552$ дв. ед.

14.25. Определить пропускную способность C двоичного симметричного канала со стиранием (рис. 14.9), если символы x_i и y_j

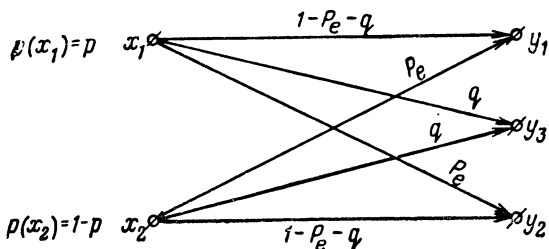


Рис. 14.9. Двоичный симметричный канал связи со стиранием

имеют одинаковую длительность τ , где $F = \frac{1}{\tau}$ — частота посылки символов.

Ответ:

$$C = F \{ (1-q) [1 - \log(1-q)] + (1 - P_e - q) \log(1 - P_e - q) + P_e \log P_e \}.$$

14.26. На вход канала связи (рис. 14.10) поступает ансамбль сигналов $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, с вероятностями $p(x_i)$ и час-

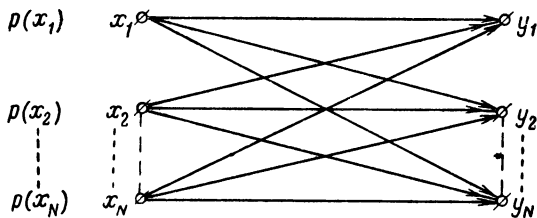


Рис. 14.10. Канал связи.

тотой посылки $F = 1/\tau$, где τ — длительность сигналов. Вероятности перехода равны

$$p(y_j | x_i) = 1 - P_e \text{ при } j = i \text{ и } p(y_j | x_i) = \frac{P_e}{N-1} \text{ при } j \neq i.$$

Определить пропускную способность канала связи.

Ответ:

$$C = F \left[\log N + P_e \log \frac{P_e}{N-1} + (1 - P_e) \log(1 - P_e) \right].$$

14.27. На вход дискретного канала связи поступает ансамбль сигналов $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$, следующих с частотой F . Сигнал x_1 зна-

чительно отличается от двух других и всегда принимается правильно. Априорные вероятности $p(x_i)$ и вероятности перехода $p(y_j|x_i)$ имеют значения, показанные на рис. 14.11.

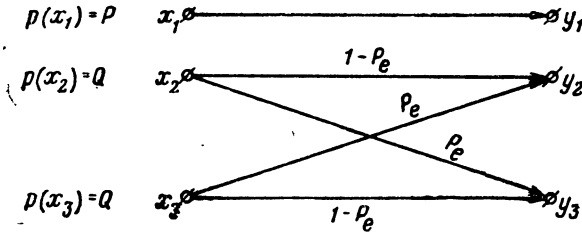


Рис. 14.11. Дискретный троичный канал.

Найти пропускную способность канала связи.

Ответ [15]:

$$C = F \ln \frac{\beta + 2}{\beta},$$

где

$$\beta = e^\alpha; \quad \alpha = -[P_e \ln P_e + (1 - P_e) \ln (1 - P_e)].$$

14.28. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приемника (рис. 14.12), передаются сигналы x_1 и x_2 с частотой следования $F = \frac{1}{\tau}$, где τ — длительность сигналов.

Значения априорных вероятностей и вероятностей перехода на участках передатчик — ретранслятор и ретранслятор — приемник указаны на рисунке.

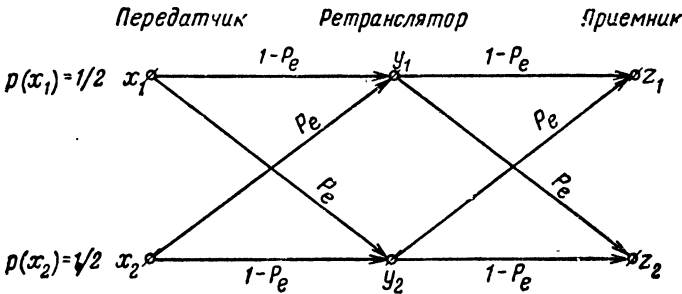


Рис. 14.12. Канал связи с ретранслятором.

Определить пропускную способность канала связи.

Ответ:

$$C = F [1 + (1 - 2P_e + 2P_e^2) \log (1 - 2P_e + 2P_e^2) + 2P_e(1 - P_e) + 2P_e(1 - P_e) \log P_e(1 - P_e)].$$

14.29. Вычислить пропускную способность канала связи (рис. 14.13), по которому передаются сигналы x_1, x_2, x_3 с частотой посылки $F = \frac{1}{\tau}$, где τ — длительность сигналов.

Ответ:

$$C = F[\log 3 + P_e \log P_e + (1 - P_e) \log (1 - P_e)].$$

14.30. По каналу связи передается ансамбль сигналов $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$, с частотой следования $F = \frac{1}{\tau}$, где τ — длительность сигналов.

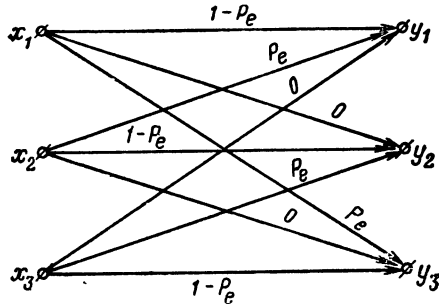


Рис. 14.13. Дискретный троичный канал связи.

Определить пропускную способность канала, если условные вероятности имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} p(y_1 | x_1) &= p(y_2 | x_2) = p(y_3 | x_3) = 1 - p_1 - p_2, \\ p(y_2 | x_1) &= p(y_3 | x_2) = p(y_1 | x_3) = p_1, \\ p(y_3 | x_1) &= p(y_1 | x_2) = p(y_2 | x_3) = p_2. \end{aligned}$$

Ответ:

$$C = F[\log 3 + p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 + (1 - p_1 - p_2) \log (1 - p_1 - p_2)].$$

14.31. Определить пропускную способность канала связи, по которому передаются сигналы x_1, x_2, x_3, x_4 с частотой следования $F = 1/\tau$, где τ — длительность сигналов. Влияние помех характеризуется условными вероятностями $p(y_j | x_i)$, величины которых равны:

$$\begin{aligned} p(y_1 | x_1) &= p(y_2 | x_2) = p(y_3 | x_3) = p(y_4 | x_4) = 1 - P_e, \\ p(y_2 | x_1) &= p(y_1 | x_2) = p(y_4 | x_3) = p(y_3 | x_4) = P_e, \\ p(y_3 | x_1) &= p(y_4 | x_1) = p(y_3 | x_2) = p(y_4 | x_2) = p(y_1 | x_3) = \\ &= p(y_2 | x_3) = p(y_1 | x_4) = p(y_2 | x_4) = 0. \end{aligned}$$

Ответ:

$$C = F[2 + P_e \log P_e + (1 - P_e) \log (1 - P_e)].$$

Литература

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1965.
2. Яглом А. М. и Яглом И. М. Вероятность и информация Физматгиз, 1960.
3. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. Физматгиз, 1959
4. Фано Р. Передача информации. Изд-во «Мир», 1965.
5. Гаращенко Ф. П. Введение в курс теории информации. Изд. Томского университета, 1963.
6. Шляпоберский В. И. Элементы дискретных систем связи. Воениздат, 1962.
7. Харкевич А. А. Борьба с помехами. Изд-во «Наука», 1965.
8. Мешковский К. А., Кириллов Н. Е. Кодирование в технике связи. Изд-во «Связь», 1966.
9. Котов П. А. Повышение достоверности передачи цифровой информации. Изд-во «Связь», 1966.
10. Заренин Ю. Г. Корректирующие коды для передачи и переработки информации. Изд-во «Техніка», Киев, 1965.
11. Шастова Г. А. Кодирование и помехоустойчивость передачи телемеханической информации. Изд-во «Энергия», 1966.
12. «Коды с обнаружением и исправлением ошибок». В сб. ст. под ред. А. М. Петровского. Изд-во иностранной литературы, 1956.
13. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций Изд-во «Наука», 1965.
14. Бахметьев М. М. О вычислении энтропии для некоторых специальных распределений вероятностей. «Радиотехника и электроника», 1956, т. 1, вып. 5.
15. Шеннон К. Статистическая теория передачи электрических сигналов. В сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех». Изд-во иностранной литературы, 1953.

15. НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

§ 1. Теоретические сведения

Непрерывные системы связи — системы, в которых как реализации сообщения, так и реализации сигнала на конечном временном интервале $(0, T)$ представляют собой некоторые непрерывные функции времени [1, 2].

Пусть $x(t)$ — реализация непрерывного сообщения на входе схемы связи, $y(t)$ — реализация выходного сообщения (сигнала), $W_1(x)$ — одномерная плотность вероятности ансамбля входных сообщений, $W_1(y)$ — одномерная плотность вероятности ансамбля выходных сообщений, $W_2(x, y)$ — совместная плотность вероятности, $W_1(x|y)$ — условная плотность вероятности значения $x = x(t)$ при известном значении $y = y(t)$, $W_1(y|x)$ — условная плотность вероятности y при заданном x . Тогда для количества информации справедливы следующие соотношения [1—5]:

$$I(x; y) = \log \frac{W_2(x, y)}{W_1(x) W_1(y)} = \log \frac{W_1(x|y)}{W_1(x)} = \log \frac{W_1(y|x)}{W_1(y)} = I(y; x), \quad (15.1)$$

$$I(X; y) = \int_X I(x; y) W_1(x|y) dx, \quad (15.2)$$

$$I(X; Y) = \int_Y W_1(y) I(X; y) dy = \int_Y \int_X W_2(x, y) \times \\ \times I(x; y) dx dy = I(Y; X), \quad (15.3)$$

$$I(X; Y) = \int_Y \int_X W_2(x, y) \log \frac{W_1(x|y)}{W_1(x)} dx dy = - \int_X W_1(x) \log W_1(x) dx + \\ + \int_X \int_Y W_2(x, y) \log W_1(x|y) dx dy, \quad (15.4)$$

$$I(X; y) \geq 0, \quad I(X; Y) \geq 0. \quad (15.5)$$

Здесь $I(x; y)$ — взаимная информация между каким-либо значением x входного и значением y выходного сообщений, $I(X; y)$ — среднее значение условной информации, $I(X; Y)$ — полная средняя взаимная информация.

Формулы для энтропии H непрерывных сообщений получаются путем обобщения формул для энтропии дискретных сообщений.

Если Δx — интервал квантования (точность измерения), то при достаточно малом Δx энтропия $H_1(X)$ непрерывных сообщений равна

$$\begin{aligned} H_1(X) &= - \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) \log W_1(x) dx - \log \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) dx = \\ &= H(X) - \log \Delta x = - \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) \log [W_1(x) \cdot \Delta x] dx, \end{aligned} \quad (15.6)$$

где

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) \log W_1(x) dx. \quad (15.7)$$

Из (15.6) видно, что информативность сообщений, обусловленная статистикой состояний элементов сообщения, целиком определяется величиной $H(X)$, которая называется дифференциальной [3, 6], а иногда приведенной [4] энтропией.

Величина $-\log \Delta x$ зависит только от выбранного интервала Δx , определяющего точность квантования и при $\Delta x = \text{const}$ есть величина постоянная, которую иногда исключают из рассмотрения [7—9]. При определении полной взаимной информации $I(X; Y)$ величины $\log \Delta x$ и $\log \Delta y$ взаимно компенсируются, так что $I(X; Y)$ от выбора координат не зависит.

По аналогии с (15.7)

$$H(Y) = - \int_Y W_1(y) \log W_1(y) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} W_1(y) \log W_1(y) dy, \quad (15.8)$$

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \int_X \int_Y W_2(x, y) \log W_1(x|y) dx dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) \log W_1(x|y) dx dy, \end{aligned} \quad (15.9)$$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \int_X \int_Y W_2(x, y) \log W_1(y|x) dx dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_2(x, y) \log W_1(y|x) dx dy. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Когда X и Y статистически связаны между собой, то

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y). \quad (15.11)$$

При независимых X и Y

$$H(XY) = H(X) + H(Y). \quad (15.12)$$

Полная средняя взаимная информация $I(X; Y)$ определяется формулой

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X), \quad (15.13)$$

а пропускная способность непрерывного канала — выражением

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Max}_{W_1(x)} \left[\frac{1}{T} I(X; Y) \right], \quad (15.14)$$

где максимум $I(X; Y)$ достигается выбором оптимального распределения $W_1(x)$ входного сигнала $x(t)$ при достаточно большом интервале времени T .

В случае канала связи с ограниченной полосой частот пропускная способность определяется формулой Шеннона [2]

$$C = F \log \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{N_0 F} \right), \quad (15.15)$$

где F — полоса пропускания канала; N_0 — постоянная спектральная плотность нормального стационарного шума $n(t)$ в полосе $0 < f \leq F$; $\sigma_s^2 = \langle x^2(t) \rangle = \text{const}$ — ограниченная средняя мощность сигнала $x(t)$, представляющего собой стационарный нормальный процесс с равномерной спектральной плотностью в полосе $0 < f \leq F$,

$$y(t) = x(t) + n(t),$$

причем $x(t)$ и $n(t)$ — статистически независимы.

Если $\frac{\sigma_s^2}{N_0 F} \gg 1$ (отношение сигнала к шуму велико), то

$$C \approx F \log \frac{\sigma_s^2}{N_0 F}. \quad (15.16)$$

При $\frac{\sigma_s^2}{N_0 F} \ll 1$

$$C \approx 1,443 \frac{\sigma_s^2}{N_0}. \quad (15.17)$$

Когда спектральная плотность нормального случайного сигнала $x(t)$ есть $S(f)$, а спектральная плотность аддитивного нормального шума $n(t)$ равна $N(f)$, то формула (15.15) имеет вид

$$C = \int_{f_1}^{f_2} \log \left[1 + \frac{S(f)}{N(f)} \right] df. \quad (15.18)$$

В табл. 15.1 приведены значения энтропии $H(X)$ некоторых непрерывных законов распределения [1—11].

Энтропия $H(X)$ некоторых непрерывных законов распределения

| Закон распределения | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Энтропия $H(X)$ закона распределения $H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) \log W_1(x) dx$ |
|--------------------------------|---|---|
| 1. Равномерный (прямоугольный) | $W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$ | $H(X) = \log(b-a) = \log(\sigma\sqrt{3})$ |
| 2. Нормальный (гауссов) | $w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ | $H(X) = \log(\sigma\sqrt{2\pi e})$ |
| 3. χ^2 (хи-квадрат) | $W_1(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$ | $H(X) = \log \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + \log 2 + \left[\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \psi\left(\frac{n}{2}\right)\right] \log e,$ <p>где $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ — пси-функция Эйлера [12]</p> |
| 4. Гамма-распределение | $W_1(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0, \quad \alpha > -1, \quad \beta > 0$ | $H(X) = \log \Gamma(\alpha+1) - \alpha \log e \cdot \psi(\alpha+1) + (\alpha+1) \log e + \log \beta,$ <p>где $\psi(\alpha+1)$ — пси-функция Эйлера</p> |
| 5. Коши | $W_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2 + (x-x_0)^2}$ | $H(X) = \log 4\pi h$ |
| 6. Релея | $W_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$ | $H(X) = \left(\frac{c}{2} + 1\right) \log e,$ <p>где $c = 0,5772 \dots$ число Эйлера [12]</p> |
| 7. Максвелла | $W_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{\sigma^3} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$ | $H(X) = \frac{1}{2} \log \frac{2\pi\sigma^2}{e} + c \log e,$ <p>где $c = 0,5772 \dots$ — число Эйлера</p> |

| Закон распределения | Аналитическое выражение плотности вероятности $W_1(x)$ | Энтропия $H(X)$ закона распределения $H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) \lg W_1(x) dx$ |
|---|--|--|
| 8. Лапласа (двухсторонний экспоненциальный) | $W_1(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$ | $H(X) = \log \frac{2e}{\lambda} = \log(\sigma e \sqrt{2})$ |
| 9. Экспоненциальный одно-сторонний | $W_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ | $H(X) = \log \frac{e}{\lambda} = \log(\sigma e)$ |
| 10. Показательно-степенной | $W_1(x) = \frac{x^m}{m!} e^{-x}, \quad x > 0$ | $H(X) = \log m! - m \log e \times \left[\sum_{k=2}^m \frac{1}{k} - c \right] + \log e,$ где $c = 0,5772\dots$ — число Эйлера |
| 11. Симпсона (треугольный) | $W_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x < \frac{b+a}{2}, \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 0, & x > b \end{cases}$ | $H(X) = \log \frac{(b-a) \sqrt{e}}{2} = \log(\sigma \sqrt{6e})$ |
| 12. Закон арксинуса | $W_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & -a < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$ | $H(X) = \log \pi + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\log(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ |

§ 2. Примеры

Пример 15.1. На вход приемного устройства воздействует колебание $y(t) = x(t) + n(t)$, где сигнал $x(t)$ и помеха $n(t)$ — независимые нормальные случайные процессы с нулевыми средними значениями и дисперсиями, равными соответственно σ_s^2 и σ_n^2 .

Определить: а) количество информации $I(x; y)$, которое содержится в принятом колебании $y(t)$ о сигнале $x(t)$; б) полную среднюю взаимную информацию $I(X; Y)$.

Решение. По условию задачи

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, \quad \omega(y|x) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}} = \\ &= \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} = \omega(n). \end{aligned}$$

Так как $x(t)$ и $n(t)$ — независимы, то $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$, причем

$$\omega(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}.$$

а) По формуле (15.1) находим

$$\begin{aligned} I(x; y) &= \log \frac{\omega(y|x)}{\omega(y)} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}}{\frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}} = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\sigma_y}{\sigma_n} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \\ I(x; y) &= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n} + \frac{1}{\ln 2} \left[-\frac{n^2}{2\sigma_n^2} + \frac{y^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)} \right]. \end{aligned}$$

б) Согласно (15.3) имеем

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \int_x \int_y \omega_2(x, y) I(x; y) dx dy = \langle [I(x; y)] \rangle = \\ &= \log \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{\langle y^2 \rangle}{2(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)} - \frac{\langle n^2 \rangle}{2\sigma_n^2} \right] = \\ &= \log \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)} - \frac{\sigma_n^2}{2\sigma_n^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I(X; Y) = \log \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) [\text{дв. ед.}].$$

Пример 15.2. По линии связи передаются непрерывные амплитудно-модулированные сигналы $x(t)$, распределенные по нормальному закону со средним значением $m_x = 0$ и дисперсией $\sigma_x^2 = 8 \text{ в}^2$.

Определить энтропию $H_1(X)$ сигнала при точности его измерения $\Delta x = 0,2 \text{ в}$.

Решение. По условию плотность вероятности $w(x)$ сигнала имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}.$$

По формуле (15.6) имеем

$$\begin{aligned} H_1(X) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \log \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx - \log \Delta x = \\ &= - \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \left(-\log \sigma_x \sqrt{2\pi} - \frac{x^2}{2\sigma_x^2} \log e \right) dx - \log \Delta x = \\ &= \log \sigma_x \sqrt{2\pi} + \frac{\log e}{\sigma_x^3 \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx - \log \Delta x. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3},$$

то

$$H_1(X) = \log \frac{\sigma_x \sqrt{2\pi}}{\Delta x} + \frac{1}{2} \log e = \log \frac{\sigma_x \sqrt{2\pi e}}{\Delta x}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$H_1(X) = \log \frac{\sqrt{8} \sqrt{2\pi e}}{0,2} \approx 5,87 \text{ дв. ед.}$$

Пример 15.3. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности $W_1(x)$. Величина Y есть однозначная функция случайной величины X

$$Y = f(X).$$

Показать, что

$$H(Y) = H(X) - \left\langle \log \left| D \left(\frac{x}{y} \right) \right| \right\rangle,$$

то функция $W_1(x)$, обеспечивающая максимум (или минимум) интеграла (15.19), находится с помощью решения уравнения

$$\frac{\partial F_i}{\partial W_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial W_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial W_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial W_1} = 0, \quad (15.21)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — некоторые константы (неопределенные множители Лагранжа), которые определяются подстановкой $W_1(x)$, являющейся решением уравнения (15.21), в равенства (15.20).

В данном случае требуется найти такую функцию $w(x)$, при которой

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \ln w(x) dx$$

достигает максимума, причем максимум следует искать при условиях

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx &= \sigma^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

Функции F, φ_1, φ_2 имеют вид

$$\begin{aligned} F[x, w(x)] &= -w(x) \ln w(x), \\ \varphi_1[x, w(x)] &= x^2 w(x), \\ \varphi_2[x, w(x)] &= w(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -[1 + \ln w(x)], \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} = x^2, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} = 1.$$

Подставив значения производных в (15.21), получим

$$-1 - \ln w(x) + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 = 0.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\ln w(x) = \lambda_2 - 1 + \lambda_1 x^2$$

или

$$w(x) = e^{\lambda_2 - 1} e^{\lambda_1 x^2}. \quad (15.23)$$

Для исключения неизвестных λ_1 и λ_2 , подставим найденное значение $w(x)$ во второе равенство (15.22). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_2 - 1} e^{\lambda_1 x^2} dx = 2e^{\lambda_2 - 1} \int_0^{\infty} e^{\lambda_1 x^2} dx = 1.$$

Отметим, что λ_1 должно быть отрицательным, ибо в противном случае интеграл $\int_0^{\infty} e^{\lambda_1 x^2} dx$ расходится. Так как

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

и

$$2e^{\lambda_2 - 1} \int_0^{\infty} e^{\lambda_1 x^2} dx = 2e^{\lambda_2 - 1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{-\lambda_1}},$$

или

$$e^{\lambda_2 - 1} = \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\pi}}.$$

Тогда (15.23) примет вид

$$w(x) = \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\pi}} e^{\lambda_1 x^2}. \quad (15.24)$$

Подставим (15.24) в первое соотношение (15.22):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx = 2 \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{\lambda_1 x^2} dx = \\ &= 2 \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\pi}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{(-\lambda_1)^3}} = -\frac{1}{2\lambda_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sigma^2}.$$

Подставив значение λ_1 в выражение (15.24), окончательно получим

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Таким образом, при ограничении сигналов по их средней мощности максимальной энтропией обладают сигналы с нормальным распределением.

Вычислим величину энтропии нормально распределенной случайной величины:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \ln w(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \ln \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \frac{x^2}{2\sigma^2} dx.$$

Имея в виду ограничивающие условия (15.22), найдем

$$H(X) = H_m(X) = \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2} = \ln \sqrt{e}$, то окончательно получим

$$H(X) = \ln \sqrt{2\pi e\sigma^2} = \frac{1}{2} \ln (2\pi e\sigma^2).$$

Пример 15.5. Определить полосу пропускания канала передачи телевизионного черно-белого изображения с $5 \cdot 10^5$ элементами, 25 кадрами в секунду и 8 равновероятными градациями яркости для отношения $\frac{\sigma_s^2}{N_0 F} = \frac{P_s}{P_n} = 15$ при условии, что изображение может принимать наиболее хаотичный вид — вид «белого шума».

Решение. Изображение принимает вид белого шума, если все его элементы как в одном кадре, так и в различных кадрах независимы. Энтропия $H_k(X)$ такого изображения при указанных условиях равна

$$H_k(X) = 5 \cdot 10^5 \log 8 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ дв. ед.}$$

Ввиду независимости кадров общее максимальное количество информации, которое должно быть передано в 1 сек, составит

$$H(X) = 25 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \text{ дв. ед.}$$

Приравнивая это значение пропускной способности канала (15.15), получим

$$25 \cdot 1,5 \cdot 10^6 = F \log (1 + 15),$$

откуда

$$F = 9,375 \cdot 10^6 \text{ гц} \approx 9,4 \text{ Мгц.}$$

Обычные телевизионные изображения имеют сильную как пространственную, так и временную корреляцию. Поэтому практически необходимая пропускная способность может быть существенно меньше приведенного здесь максимального значения.

Пример 15.6. Найти спектральную плотность сигнала $S(f)$, которая при заданных значениях его полной мощности $P_s = \int_{f_1}^{f_2} S(f) df$ и спектральной плотности нормальной помехи $N(f)$ обеспечит максимальную скорость передачи информации.

Решение. Согласно (15.18) имеем

$$C = \int_{f_1}^{f_2} \ln \left[1 + \frac{S(f)}{N(f)} \right] df.$$

В задаче требуется найти максимум этого интеграла при условии

$$P_s = \int_{f_1}^{f_2} S(f) df.$$

На основании (15.21) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial S} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \ln \left[1 + \frac{S}{N} \right] + \lambda \frac{\partial S}{\partial S} = 0,$$

где

$$S = S(f); \quad N = N(f).$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial S} \ln \left[1 + \frac{S}{N} \right] = \frac{1}{1 + \frac{S}{N}} \cdot \frac{1}{N},$$

то

$$\frac{1}{S(f) + N(f)} = -\lambda.$$

Следовательно,

$$S(f) = -\frac{1}{\lambda} - N(f).$$

Искомый энергетический спектр сигнала $S(f)$ должен быть таким, чтобы, будучи добавленным к спектру помехи $N(f)$, он обеспечил постоянство этой суммы и независимость ее от частоты. Величина λ выбирается так, чтобы общая мощность полезного сигнала равнялась заданной мощности P_s .

§ 3. Задачи и ответы

15.1 Информация передается путем изменения амплитуды сигнала X , распределенной по нормальному закону с параметрами $m_x = 0$ и $\sigma_x^2 = 15$. Величина X измеряется регистрирующим устройством с погрешностью Z , не зависящей от амплитуды сигнала, и также распределенной по нормальному закону со средним значением $m_z = 0$ и дисперсией $\sigma_z^2 = 9$.

Определить количество информации $I(X; Y)$ о величине X , заключенное в случайных результатах измерений $Y = X + Z$.

Ответ:

$$I(X; Y) \approx 0,71 \text{ дв. ед.}$$

15.2. Информация передается с помощью частотно-модулированных синусоидальных сигналов, рабочая частота которых f изменяется с равной вероятностью в пределах от $f_1 = 10$ Мгц до $f_2 = 50$ Мгц.

Определить энтропию сигнала $H_1(f)$, если точность измерения частоты составляет величину $\Delta f = 2$ кгц.

Ответ:

$$H_1(f) \approx 14,28 \text{ дв. ед.}$$

15.3. Вычислить дифференциальную энтропию нормального закона с дисперсией σ^2 и равномерного распределения с той же дисперсией.

Ответ:

$$H_n(X) = \log(\sigma \sqrt{2\pi e});$$

$$H_p(X) = \log(\sigma 2 \sqrt{3}).$$

15.4. В результате полной дезорганизации управления, n самолетов летят с произвольными курсами. Управление восстановлено и все самолеты взяли общий курс со среднеквадратичной ошибкой $\sigma_\varphi = 3^\circ$.

Найти изменение энтропии, считая, что в первом состоянии имеет место равномерное распределение вероятности, а во втором — нормальное.

Ответ:

$$\Delta H = H_p(X) - H_n(X) = 4,86 n \text{ дв. ед.}$$

15.5. Плотность вероятности случайного процесса $x(t)$ имеет вид

$$W_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Найти дифференциальную энтропию процесса $x(t)$.

Ответ:

$$H(X) = \log \frac{e}{\lambda}.$$

15.6. Найти энтропию $H(X)$ случайного процесса $x(t)$, функция распределения которого

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$H(X) = \log \left(\frac{1}{2} \sqrt{e} \right).$$

15.7. Показать, что если система с нормальным распределением координаты переходит из состояния, в котором $\sigma_x = \sigma_1$, в состояние, при котором $\sigma_x = \sigma_2$, то приращение энтропии ΔH равно

$$\Delta H = H_2(X) - H_1(X) = \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

15.8. Найти дифференциальную энтропию случайной величины $X = A \sin \omega t$, где t равномерно распределено в промежутке от $-\frac{\pi}{\omega}$ до $\frac{\pi}{\omega}$; A и ω — положительные постоянные величины.

Ответ [10]:

$$H(X) = \ln \frac{\pi A}{2}.$$

15.9. Определить условную дифференциальную энтропию $H(X|y)$ и среднюю условную дифференциальную энтропию $\bar{H}(X|Y)$ случайной величины X относительно Y , а также $H(Y|x)$ и $\bar{H}(Y|X)$ случайной величины Y относительно X для системы (X, Y) нормальных случайных величин.

Ответ [11]:

$$H(X|y) = H(X|Y) = \log \left[\sigma_x \sqrt{2\pi e (1 - R_{xy}^2)} \right];$$

$$H(Y|x) = H(Y|X) = \log \left[\sigma_y \sqrt{2\pi e (1 - R_{xy}^2)} \right],$$

где σ_x и σ_y — средние квадратичные значения; R_{xy} — коэффициент корреляции между X и Y .

15.10. Найти дифференциальную энтропию $H(X)$ равномерно распределения на отрезке $(0, 2)$ и энтропию суммы двух независимых случайных величин X и Y , равномерно распределенных на указанном интервале.

Ответ [10]:

$$H(X) = 1 \text{ дв. ед.}; \quad H(XY) = 2 \text{ дв. ед.}$$

15.11. Показать, что если $Y = X \pm c$ или $Y = -X$, то

$$H(Y) = H(X).$$

15.12. Измерительное устройство вырабатывает случайный сигнал $x(t)$ с нормальной плотностью вероятности и корреляционной функцией вида

$$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-a|\tau|}.$$

Определить энтропию сигнала и его избыточность, вызванную наличием корреляции, если $\sigma_x = 6 \text{ в.}$

Ответ [6]: $H(X|Y) = 4,52$ дв. ед.; $R = 0,024$.

15.13. Ансамбль сигналов, проходящих через усилитель, имеет значения, ограниченные сверху величиной $x = b$ и снизу — величиной $x = a$.

Определить: а) максимальную энтропию $H_m(X)$; б) энтропию $H(X)$ на единицу времени, если ширина полосы пропускания усилителя равна F .

Ответ:

$$H_m(X) = \log(b-a) \text{ дв. ед.},$$

$$H(X) = 2F \log(b-a) \text{ дв. ед.}$$

15.14. Передаваемые сигналы ограничены по пиковой мощности. Найти распределение, которое при данном ограничении обладает максимальной энтропией, а также вычислить величину энтропии при этом распределении.

Ответ:

$$W_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{P_m}}; \quad H(X) = \ln 2 \sqrt{P_m},$$

где P_m — пиковая мощность.

15.15. Сигнал со средним значением m_x может принимать только положительные значения [$W_1(x) = 0$ при $x < 0$].

Найти распределение, которое при данных ограничениях обладает максимальной энтропией.

Ответ:

$$W_1(x) = \frac{1}{m_x} e^{-\frac{x}{m_x}}.$$

15.16. Показать, что при заданной энтропии нормальное распределение вероятностей

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

имеет наименьшую из всех одномерных распределений дисперсию.

15.17. Определить максимально возможную скорость передачи информации по радиотехническому каналу связи пункта управления с телеуправляемой ракетой, если полоса пропускания канала связи равна 3 МГц , а минимальное отношение сигнал/шум по мощности в процессе наведения ракеты на цель равно 3.

Ответ:

$$C = 6 \cdot 10^6 \text{ дв. ед./сек.}$$

15.18. Определить пропускную способность канала связи, если средняя мощность сигнала равна P_s , полоса пропускания ка-

нала F , а помехами являются только тепловые шумы приемного устройства. Качественно построить график зависимости пропускной способности от полосы частот F .

Ответ:

$$C = F \log \left(1 + \frac{P_s}{kTF} \right),$$

где k — постоянная Больцмана; T — температура приемного устройства в $^{\circ}\text{К}$.

15.19. При стрельбе неуправляемыми ракетами по подвижным целям возникает рассеивание ракет относительно центра цели, вызванное маневром цели. При каждом выстреле величина отклонения зависит от нормального ускорения цели и времени полета ракеты. Распределение значений нормального ускорения подчинено закону равной вероятности. При заданном времени полета такому же закону распределения подчинено рассеивание неуправляемых ракет, вызванное маневром цели. Пусть отклонения ракеты от центра цели, вызванные маневром и измеренные в одной плоскости, заключены в пределах $-a < l < +a$, где $a = 1600$ м.

Вычислить скорость передачи информации V_k в системе управления движением управляемой ракеты, которая обеспечивает наведение ракеты на цель со средним квадратичным отклонением, равным $\sigma = 4$ м. Рассеивание управляемой ракеты подчиняется нормальному закону. Время наведения $T = 10$ сек.

Ответ:

$$V_k = 0,754 \text{ дв. ед./сек.}$$

15.20. Сравнить пропускные способности двух каналов связи, если в первом действует белый нормальный шум в полосе F с дисперсией $\sigma^2 = 1 \text{ в}^2$, а во втором — белый шум, равномерно распределенный в интервале $\pm 1,5 \text{ в}$ с полосой $2F$. Считать, что мощность передаваемого сигнала P_s велика по сравнению с мощностью шумов.

Ответ:

$$C_1 - C_2 = F \log \frac{N_s^2}{P_s}, \quad N_s = \frac{1}{2\pi e} e^{21 \log 3},$$

где C_1 — пропускная способность первого канала; C_2 — пропускная способность второго канала.

Литература

1. Фано Р. Передача информации. Изд-во «Мир», 1965.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Изд-во «Советское радио», 1965.
3. Тарасенко Ф. П. Введение в курс теории информации. Изд. Томского Гос. университета, 1963.

4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Изд-во «Наука», 1964.
5. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Изд-во «Советское радио», 1955.
6. Солодов А. В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. Изд-во «Наука», 1967.
7. Голдман С. Теория информации Изд-во иностранной литературы, 1957.
8. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радио технике. Изд-во «Советское радио», 1960.
9. Ключев Н. И. Информационные основы передачи сообщений. Изд-во «Советское радио», 1966.
10. Емельянов Г. В., Скигович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. Ленинградского Гос. университета, 1967.
11. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1965.
12. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Значения функции $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1824 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0388 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

Значения интеграла вероятности

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{для } 0,00 \leq z \leq 4,99; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,90147 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,920097 | 0,920358 | 0,920613 | 0,920863 | 0,921106 | 0,921344 | 0,921576 |
| 2,4 | 0,921802 | 0,922024 | 0,922240 | 0,922451 | 0,922656 | 0,922857 | 0,923053 | 0,923244 | 0,923431 | 0,923613 |
| 2,5 | 0,923790 | 0,923963 | 0,924132 | 0,924297 | 0,924457 | 0,924614 | 0,924766 | 0,924915 | 0,925060 | 0,925201 |
| 2,6 | 0,925339 | 0,925473 | 0,925604 | 0,925731 | 0,925855 | 0,925975 | 0,926093 | 0,926207 | 0,926319 | 0,926427 |
| 2,7 | 0,926533 | 0,926636 | 0,926736 | 0,926833 | 0,926928 | 0,927020 | 0,927110 | 0,927197 | 0,927282 | 0,927365 |
| 2,8 | 0,927445 | 0,927523 | 0,927599 | 0,927673 | 0,927744 | 0,927814 | 0,927882 | 0,927948 | 0,928012 | 0,928074 |
| 2,9 | 0,928134 | 0,928193 | 0,928250 | 0,928305 | 0,928359 | 0,928411 | 0,928462 | 0,928511 | 0,928559 | 0,928605 |
| 3,0 | 0,928650 | 0,928694 | 0,928736 | 0,928777 | 0,928817 | 0,928856 | 0,928893 | 0,928930 | 0,928965 | 0,928999 |
| 3,1 | 0,9290324 | 0,9290646 | 0,9290957 | 0,9291260 | 0,9291553 | 0,9291836 | 0,9292112 | 0,9292378 | 0,9292636 | 0,9292886 |
| 3,2 | 0,9293129 | 0,9293363 | 0,9293590 | 0,9293810 | 0,9294024 | 0,9294230 | 0,9294429 | 0,9294623 | 0,9294810 | 0,9294991 |
| 3,3 | 0,9295166 | 0,9295335 | 0,9295499 | 0,9295658 | 0,9295811 | 0,9295959 | 0,9296103 | 0,9296242 | 0,9296376 | 0,9296505 |
| 3,4 | 0,9296631 | 0,9296752 | 0,9296869 | 0,9296982 | 0,9297091 | 0,9297197 | 0,9297299 | 0,9297398 | 0,9297493 | 0,9297585 |
| 3,5 | 0,9297674 | 0,9297759 | 0,9297842 | 0,9297922 | 0,9297999 | 0,9298074 | 0,9298146 | 0,9298215 | 0,9298282 | 0,9298347 |
| 3,6 | 0,9298409 | 0,9298469 | 0,9298527 | 0,9298583 | 0,9298637 | 0,9298689 | 0,9298739 | 0,9298787 | 0,9298834 | 0,9298879 |
| 3,7 | 0,9298922 | 0,9298964 | 0,9299039 | 0,9299092 | 0,9299146 | 0,9299198 | 0,9299249 | 0,9299298 | 0,9299345 | 0,9299391 |
| 3,8 | 0,9299265 | 0,9299327 | 0,9299384 | 0,9299436 | 0,9299488 | 0,9299539 | 0,9299590 | 0,9299638 | 0,9299685 | 0,9299731 |
| 3,9 | 0,92995190 | 0,92995385 | 0,92995573 | 0,92995753 | 0,92995926 | 0,92996092 | 0,92996253 | 0,92996406 | 0,92996554 | 0,92996696 |
| 4,0 | 0,92996833 | 0,92996964 | 0,92997090 | 0,92997211 | 0,92997327 | 0,92997439 | 0,92997546 | 0,92997649 | 0,92997748 | 0,92997843 |
| 4,1 | 0,92997934 | 0,92998022 | 0,92998106 | 0,92998186 | 0,92998262 | 0,92998338 | 0,92998409 | 0,92998477 | 0,92998542 | 0,92998605 |
| 4,2 | 0,92998665 | 0,92998723 | 0,92998778 | 0,92998832 | 0,92998882 | 0,92998931 | 0,92998978 | 0,92999026 | 0,92999065 | 0,92999106 |
| 4,3 | 0,929991460 | 0,929991837 | 0,929992199 | 0,929992545 | 0,929992876 | 0,929993193 | 0,929993497 | 0,929993788 | 0,929994066 | 0,929994332 |
| 4,4 | 0,929994587 | 0,929994831 | 0,929995065 | 0,929995288 | 0,929995502 | 0,929995706 | 0,929995902 | 0,929996089 | 0,929996268 | 0,929996439 |
| 4,5 | 0,929996602 | 0,929996759 | 0,929996908 | 0,929997051 | 0,929997187 | 0,929997318 | 0,929997442 | 0,929997561 | 0,929997675 | 0,929997784 |
| 4,6 | 0,929997888 | 0,929997987 | 0,929998081 | 0,929998172 | 0,929998258 | 0,929998340 | 0,929998419 | 0,929998494 | 0,929998566 | 0,929998634 |
| 4,7 | 0,929998699 | 0,929998761 | 0,929998821 | 0,929998877 | 0,929998931 | 0,929998983 | 0,9299990320 | 0,9299990789 | 0,9299991235 | 0,9299991661 |
| 4,8 | 0,9299992067 | 0,9299992453 | 0,9299992822 | 0,9299993173 | 0,9299993508 | 0,9299993827 | 0,9299994131 | 0,9299994420 | 0,9299994696 | 0,9299994958 |
| 4,9 | 0,9299995208 | 0,9299995446 | 0,9299995673 | 0,9299995889 | 0,9299996094 | 0,9299996289 | 0,9299996475 | 0,9299996652 | 0,9299996821 | 0,9299996981 |

Пример: $\Phi(3,57) = 0,9298215 = 0,9998215$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Числа сочетаний (биномиальные коэффициенты) $C_n^k = C_n^{n-k}$

| $k \backslash n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | | | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |
| 3 | | | | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 |
| 4 | | | | | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 |
| 5 | | | | | | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 |
| 6 | | | | | | | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 |
| 7 | | | | | | | | 1 | 8 | 36 | 120 |
| 8 | | | | | | | | | 1 | 9 | 45 |
| 9 | | | | | | | | | | 1 | 10 |
| 10 | | | | | | | | | | | 1 |

Продолжение

| $k \backslash n$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|------------------|-----|-----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 2 | 55 | 66 | 78 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 |
| 3 | 165 | 220 | 286 | 364 | 455 | 560 | 680 | 816 | 969 |
| 4 | 330 | 495 | 715 | 1 001 | 1 365 | 1 820 | 2 380 | 3 060 | 3 876 |
| 5 | 462 | 792 | 1 287 | 2 002 | 3 003 | 4 368 | 6 188 | 8 568 | 11 628 |
| 6 | 462 | 924 | 1 716 | 3 003 | 5 005 | 8 008 | 12 376 | 18 564 | 27 132 |
| 7 | | | 1 716 | 3 432 | 6 435 | 11 440 | 19 448 | 31 824 | 50 388 |
| 8 | | | | | 6 435 | 12 870 | 24 310 | 43 758 | 75 582 |
| 9 | | | | | | | 24 310 | 48 620 | 92 378 |
| 10 | | | | | | | | | 92 378 |

Продолжение

| $k \backslash n$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 2,0 ¹ | 2,1 ¹ | 2,2 ¹ | 2,3 ¹ | 2,4 ¹ | 2,5 ¹ |
| 2 | 1,90 ² | 2,10 ² | 2,31 ² | 2,53 ² | 2,76 ² | 3,00 ² |
| 3 | 1,140 ³ | 1,330 ³ | 1,540 ³ | 1,771 ³ | 2,024 ³ | 2,300 ³ |
| 4 | 4,845 ³ | 5,985 ³ | 7,315 ³ | 8,855 ³ | 1,0626 ⁴ | 1,2650 ⁴ |
| 5 | 1,5504 ⁴ | 2,0349 ⁴ | 2,6334 ⁴ | 3,3649 ⁴ | 4,2504 ⁴ | 5,3130 ⁴ |
| 6 | 3,8760 ⁴ | 5,4264 ⁴ | 7,4613 ⁴ | 1,00947 ⁵ | 1,34596 ⁵ | 1,77100 ⁵ |
| 7 | 7,7520 ⁴ | 1,16280 ⁵ | 1,70544 ⁵ | 2,45157 ⁵ | 3,46104 ⁵ | 1,80700 ⁵ |
| 8 | 1,25970 ⁵ | 2,03490 ⁵ | 3,19770 ⁵ | 4,90314 ⁵ | 7,35471 ⁵ | 1,081575 ⁶ |
| 9 | 1,67960 ⁵ | 2,93930 ⁵ | 4,97420 ⁵ | 8,17190 ⁵ | 1,307504 ⁶ | 2,042975 ⁶ |

Продолжение

| $k \backslash n$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 10 | 1,84756 ⁵ | 3,52716 ⁵ | 6,46646 ⁵ | 1,144066 ⁶ | 1,961256 ⁶ | 3,268760 ⁶ |
| 11 | | 3,52716 ⁵ | 7,05432 ⁵ | 1,352078 ⁶ | 2,496144 ⁶ | 4,457400 ⁶ |
| 12 | | | | 1,352078 ⁶ | 2,704156 ⁶ | 5,200300 ⁶ |
| 13 | | | | | | 5,200300 ⁶ |

Примечание. Индекс (m) у некоторых чисел в таблице означает, что это число (и все числа, расположенные ниже, — до числа с индексом $m+1$) нужно умножить на 10^m . Например, $1,90^2$ означает число 190.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Значения функции $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| $k \backslash \lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1 | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 |
| 2 | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 |
| 3 | 0,000151 | 0,001091 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 |
| 4 | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 |
| 5 | | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 |
| 6 | | | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000035 |
| 7 | | | | | 0,000001 | 0,000003 |

Продолжение

| $k \backslash \lambda$ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1 | 0,347610 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 |
| 2 | 0,121663 | 0,143785 | 0,164661 | 0,183940 | 0,270671 | 0,224042 |
| 3 | 0,028388 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 |
| 4 | 0,004968 | 0,007669 | 0,011115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 |
| 5 | 0,000695 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 |
| 6 | 0,000081 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 |
| 7 | 0,000008 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 |
| 8 | | 0,000002 | 0,000004 | 0,000009 | 0,000859 | 0,008101 |
| 9 | | | | 0,000001 | 0,000191 | 0,002701 |
| 10 | | | | | 0,000038 | 0,000810 |
| 11 | | | | | 0,000007 | 0,000221 |
| 12 | | | | | 0,000001 | 0,000055 |
| 13 | | | | | | 0,000013 |
| 14 | | | | | | 0,000003 |
| 15 | | | | | | 0,000001 |

Продолжение

| $k \backslash \lambda$ | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1 | 0,073263 | 0,033690 | 0,014873 | 0,006383 | 0,002684 | 0,001111 |
| 2 | 0,146525 | 0,084224 | 0,044618 | 0,022341 | 0,010735 | 0,004998 |
| 3 | 0,195367 | 0,140374 | 0,089235 | 0,052129 | 0,028626 | 0,014994 |
| 4 | 0,195367 | 0,175467 | 0,133853 | 0,091226 | 0,057252 | 0,033737 |
| 5 | 0,156293 | 0,175467 | 0,160623 | 0,127717 | 0,091604 | 0,060727 |
| 6 | 0,104194 | 0,146223 | 0,160623 | 0,149003 | 0,122138 | 0,091090 |
| 7 | 0,059540 | 0,104445 | 0,137677 | 0,149003 | 0,139587 | 0,117116 |
| 8 | 0,029770 | 0,065278 | 0,103258 | 0,130377 | 0,139587 | 0,131756 |
| 9 | 0,013231 | 0,036266 | 0,068838 | 0,101405 | 0,124077 | 0,131756 |
| 10 | 0,005292 | 0,018133 | 0,041303 | 0,070983 | 0,099262 | 0,118580 |
| 11 | 0,001925 | 0,008242 | 0,022529 | 0,045171 | 0,072190 | 0,097020 |
| 12 | 0,000642 | 0,003434 | 0,011262 | 0,026350 | 0,048127 | 0,072765 |
| 13 | 0,000197 | 0,001321 | 0,005199 | 0,014188 | 0,029616 | 0,050376 |
| 14 | 0,000056 | 0,000472 | 0,002228 | 0,007094 | 0,016924 | 0,032384 |
| 15 | 0,000015 | 0,000157 | 0,000891 | 0,003311 | 0,009026 | 0,019431 |
| 16 | 0,000004 | 0,000049 | 0,000334 | 0,001448 | 0,004513 | 0,010930 |
| 17 | 0,000001 | 0,000014 | 0,000118 | 0,000596 | 0,002124 | 0,005786 |
| 18 | | 0,000004 | 0,000039 | 0,000232 | 0,000944 | 0,002893 |
| 19 | | 0,000001 | 0,000012 | 0,000085 | 0,000397 | 0,001370 |
| 20 | | | 0,000004 | 0,000030 | 0,000159 | 0,000617 |
| 21 | | | 0,000001 | 0,000010 | 0,000061 | 0,000264 |
| 22 | | | | 0,000003 | 0,000022 | 0,000108 |
| 23 | | | | 0,000001 | 0,000008 | 0,000042 |
| 24 | | | | | 0,000003 | 0,000016 |
| 25 | | | | | 0,000001 | 0,000006 |
| 26 | | | | | | 0,000002 |
| 27 | | | | | | 0,000001 |

ПРИЛОЖЕНИЕ V

Значения функции $\sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| $m \backslash \lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1 | 0,995321 | 0,982477 | 0,963063 | 0,938448 | 0,909796 | 0,878099 |
| 2 | 0,999845 | 0,998852 | 0,996390 | 0,992074 | 0,985612 | 0,977885 |
| 3 | 0,999996 | 0,999943 | 0,999724 | 0,999224 | 0,998248 | 0,997642 |
| 4 | 1,000000 | 0,999998 | 0,999974 | 0,999939 | 0,999828 | 0,999606 |
| 5 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999996 | 0,999986 | 0,999962 |
| 6 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 |
| 7 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |

Продолжение

| $m \backslash \lambda$ | | | | | | |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
| 0 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1 | 0,844195 | 0,808792 | 0,772483 | 0,735759 | 0,406006 | 0,199148 |
| 2 | 0,965858 | 0,952577 | 0,937144 | 0,919699 | 0,676677 | 0,423190 |
| 3 | 0,994246 | 0,990920 | 0,988542 | 0,981012 | 0,857124 | 0,647232 |
| 4 | 0,999214 | 0,998589 | 0,997657 | 0,996340 | 0,947348 | 0,815263 |
| 5 | 0,999909 | 0,999816 | 0,999658 | 0,999406 | 0,983437 | 0,916082 |
| 6 | 0,999990 | 0,999980 | 0,999958 | 0,999917 | 0,995467 | 0,966491 |
| 7 | 0,999998 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999990 | 0,998904 | 0,988095 |
| 8 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999763 | 0,996196 |
| 9 | | | | 1,000000 | 0,999954 | 0,998897 |
| 10 | | | | | 0,999992 | 0,999707 |
| 11 | | | | | 0,999999 | 0,999928 |
| 12 | | | | | 1,000000 | 0,999983 |
| 13 | | | | | | 0,999996 |
| 14 | | | | | | 0,999999 |
| 15 | | | | | | 1,000000 |

Продолжение

| $m \backslash \lambda$ | | | | | | |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| 0 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1 | 0,091579 | 0,040428 | 0,017352 | 0,007295 | 0,003019 | 0,001234 |
| 2 | 0,238105 | 0,124652 | 0,061970 | 0,029636 | 0,013754 | 0,006232 |
| 3 | 0,433472 | 0,265026 | 0,151205 | 0,081765 | 0,042380 | 0,021228 |
| 4 | 0,628839 | 0,440493 | 0,285058 | 0,172991 | 0,099632 | 0,054963 |
| 5 | 0,785132 | 0,615960 | 0,445681 | 0,300708 | 0,191236 | 0,115690 |
| 6 | 0,889326 | 0,762183 | 0,606304 | 0,449711 | 0,313374 | 0,206780 |
| 7 | 0,948866 | 0,866628 | 0,743981 | 0,598714 | 0,452961 | 0,323896 |
| 8 | 0,978636 | 0,931806 | 0,847239 | 0,729091 | 0,592548 | 0,455652 |
| 9 | 0,991867 | 0,968172 | 0,916077 | 0,830496 | 0,716625 | 0,587408 |
| 10 | 0,997159 | 0,986205 | 0,957380 | 0,901479 | 0,815887 | 0,705988 |
| 11 | 0,999084 | 0,994547 | 0,979909 | 0,946650 | 0,888077 | 0,803008 |
| 12 | 0,999726 | 0,997981 | 0,991173 | 0,973000 | 0,936204 | 0,875773 |
| 13 | 0,999923 | 0,999202 | 0,996372 | 0,987188 | 0,965820 | 0,926149 |
| 14 | 0,999979 | 0,999774 | 0,998600 | 0,994282 | 0,982744 | 0,958533 |
| 15 | 0,999994 | 0,999931 | 0,999491 | 0,997593 | 0,991770 | 0,977964 |
| 16 | 0,999998 | 0,999980 | 0,999825 | 0,999041 | 0,996283 | 0,988894 |
| 17 | 0,999999 | 0,999994 | 0,999943 | 0,999637 | 0,998407 | 0,994680 |
| 18 | 0,999999 | 0,999998 | 0,999982 | 0,999869 | 0,999351 | 0,997573 |
| 19 | 0,999999 | 0,999999 | 0,999994 | 0,999955 | 0,999748 | 0,998943 |
| 20 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999998 | 0,999985 | 0,999907 | 0,999560 |
| 21 | | 1,000000 | 0,999999 | 0,999995 | 0,999967 | 0,999824 |
| 22 | | | 0,999999 | 0,999998 | 0,999989 | 0,999932 |
| 23 | | | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999974 |

Продолжение

| m | λ | | | | | | |
|----|---|-----|-----|-----|----------|----------|----------|
| | | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| 24 | | | | | 0,999999 | 0,999999 | 0,999999 |
| 25 | | | | | 1,000000 | 0,999999 | 0,999999 |
| 26 | | | | | | 1,000000 | 0,999999 |
| 27 | | | | | | | 0,999999 |
| 28 | | | | | | | 1,000000 |

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Значения двоичных логарифмов целых чисел от 1 до 100

| x | log ₂ x | x | log ₂ x | x | log ₂ x |
|----|--------------------|----|--------------------|-----|--------------------|
| 1 | 0,00000 | 36 | 5,16993 | 71 | 6,14975 |
| 2 | 1,00000 | 37 | 5,20945 | 72 | 6,16992 |
| 3 | 1,58496 | 38 | 5,24793 | 73 | 6,18982 |
| 4 | 2,00000 | 39 | 5,28540 | 74 | 6,20945 |
| 5 | 2,32193 | 40 | 5,32193 | 75 | 6,22882 |
| 6 | 2,58496 | 41 | 5,35755 | 76 | 6,24793 |
| 7 | 2,80735 | 42 | 5,39232 | 77 | 6,26679 |
| 8 | 3,00000 | 43 | 5,42626 | 78 | 6,28540 |
| 9 | 3,16993 | 44 | 5,45943 | 79 | 6,30378 |
| 10 | 3,32193 | 45 | 5,49185 | 80 | 6,32193 |
| 11 | 3,45943 | 46 | 5,52356 | 81 | 6,33985 |
| 12 | 3,58496 | 47 | 5,55459 | 82 | 6,35755 |
| 13 | 3,70044 | 48 | 5,58496 | 83 | 6,37504 |
| 14 | 3,80735 | 49 | 5,61471 | 84 | 6,39232 |
| 15 | 3,90689 | 50 | 5,64386 | 85 | 6,40939 |
| 16 | 4,00000 | 51 | 5,67242 | 86 | 6,42626 |
| 17 | 4,08746 | 52 | 5,70044 | 87 | 6,44294 |
| 18 | 4,16993 | 53 | 5,72792 | 88 | 6,45943 |
| 19 | 4,24793 | 54 | 5,75489 | 89 | 6,47573 |
| 20 | 4,32193 | 55 | 5,78136 | 90 | 6,49185 |
| 21 | 4,39232 | 56 | 5,80735 | 91 | 6,50779 |
| 22 | 4,45943 | 57 | 5,83289 | 92 | 6,52356 |
| 23 | 4,52356 | 58 | 5,85798 | 93 | 6,53916 |
| 24 | 4,58496 | 59 | 5,88264 | 94 | 6,55459 |
| 25 | 4,64386 | 60 | 5,90689 | 95 | 6,56986 |
| 26 | 4,70044 | 61 | 5,93074 | 96 | 6,58496 |
| 27 | 4,75489 | 62 | 5,95420 | 97 | 6,59991 |
| 28 | 4,80735 | 63 | 5,97728 | 98 | 6,61471 |
| 29 | 4,85798 | 64 | 6,00000 | 99 | 6,62936 |
| 30 | 4,90689 | 65 | 6,02237 | 100 | 6,64386 |
| 31 | 4,95420 | 66 | 6,04439 | | |
| 32 | 5,00000 | 67 | 6,06609 | | |
| 33 | 5,04439 | 68 | 6,08746 | | |
| 34 | 5,08746 | 69 | 6,10852 | | |
| 35 | 5,12928 | 70 | 6,12928 | | |

ПРИЛОЖЕНИЕ VII

Значения функции $-p \log_2 p$

| p | $-p \log_2 p$ | p | $-p \log_2 p$ | p | $-p \log_2 p$ | p | $-p \log_2 p$ |
|------|---------------|------|---------------|------|---------------|------|---------------|
| 0 | 0 | 0,26 | 0,5053 | 0,51 | 0,4954 | 0,76 | 0,3009 |
| 0,01 | 0,0664 | 0,27 | 0,5100 | 0,52 | 0,4906 | 0,77 | 0,2903 |
| 0,02 | 0,1128 | 0,28 | 0,5142 | 0,53 | 0,4854 | 0,78 | 0,2796 |
| 0,03 | 0,1518 | 0,29 | 0,5179 | 0,54 | 0,4800 | 0,79 | 0,2687 |
| 0,04 | 0,1858 | 0,30 | 0,5211 | 0,55 | 0,4744 | 0,80 | 0,2575 |
| 0,05 | 0,2161 | 0,31 | 0,5238 | 0,56 | 0,4685 | 0,81 | 0,2462 |
| 0,06 | 0,2435 | 0,32 | 0,5260 | 0,57 | 0,4623 | 0,82 | 0,2348 |
| 0,07 | 0,2686 | 0,33 | 0,5278 | 0,58 | 0,4558 | 0,83 | 0,2231 |
| 0,08 | 0,2915 | 0,34 | 0,5292 | 0,59 | 0,4491 | 0,84 | 0,2112 |
| 0,09 | 0,3126 | 0,35 | 0,5301 | 0,60 | 0,4422 | 0,85 | 0,1992 |
| 0,10 | 0,3322 | 0,36 | 0,5306 | 0,61 | 0,4350 | 0,86 | 0,1871 |
| 0,11 | 0,3503 | 0,37 | 0,5307 | 0,62 | 0,4276 | 0,87 | 0,1748 |
| 0,12 | 0,3671 | 0,38 | 0,5305 | 0,63 | 0,4199 | 0,88 | 0,1623 |
| 0,13 | 0,3826 | 0,39 | 0,5298 | 0,64 | 0,4121 | 0,89 | 0,1496 |
| 0,14 | 0,3971 | 0,40 | 0,5288 | 0,65 | 0,4040 | 0,90 | 0,1368 |
| 0,15 | 0,4105 | 0,41 | 0,5274 | 0,66 | 0,3957 | 0,91 | 0,1238 |
| 0,16 | 0,4230 | 0,42 | 0,5256 | 0,67 | 0,3871 | 0,92 | 0,1107 |
| 0,17 | 0,4346 | 0,43 | 0,5236 | 0,68 | 0,3784 | 0,93 | 0,0974 |
| 0,18 | 0,4453 | 0,44 | 0,5210 | 0,69 | 0,3694 | 0,94 | 0,0839 |
| 0,19 | 0,4552 | 0,45 | 0,5184 | 0,70 | 0,3602 | 0,95 | 0,0703 |
| 0,20 | 0,4644 | 0,46 | 0,5153 | 0,71 | 0,3508 | 0,96 | 0,0565 |
| 0,21 | 0,4728 | 0,47 | 0,5120 | 0,72 | 0,3412 | 0,97 | 0,0426 |
| 0,22 | 0,4806 | 0,48 | 0,5083 | 0,73 | 0,3314 | 0,98 | 0,0286 |
| 0,23 | 0,4877 | 0,49 | 0,5043 | 0,74 | 0,3215 | 0,99 | 0,0144 |
| 0,24 | 0,4941 | 0,50 | 0,5000 | 0,75 | 0,3113 | 1,00 | 0 |
| 0,25 | 0,5000 | | | | | | |

Предметный указатель

А

- Абсолютный момент 103
- максимум 405
- Апостериорная вероятность 10
- Априорная вероятность 10

Б

- Белый шум 187
- Безынерционный ограничитель 342
- Бета-распределение 62
- Биномиальный закон 54
- Бит 537

В

- Вероятное отклонение 49
- Вероятность события 5
- условная 8
- ложной тревоги 437
- правильных решений 437
- Вероятности ошибок 438
- Время обслуживания заявки 146
- первого достижения границ 406
- Входной поток СМО 143
- Выходной поток СМО 143

Г

- Гамма-распределение 60
- Геометрические вероятности 7
- Геометрический закон 56
- Гипергеометрический закон 54
- Гипотеза 9

Д

- Двоичная единица информации 537
- Двоичный симметричный канал связи 543, 546
- Двойное показательное распределение 66
- Двумерная функция распределения 50
- Двухсторонняя модуляция длительности импульсов 218
- Дельта-функция 50

- Дискретная случайная величина 47
- Дискретные системы связи 536
- Дисперсия 49, 101
- длительности импульса 413
- огибающей 255
- оценки 528
- первого времени достижения границ 407
- Дифференциальная энтропия 566
- Дифференциальный закон распределения 49
- Длительность выброса 405
- Дробовой шум 250

Е

- Единица количества информации 537
- Единичный эллипс 53

З

- Закон распределения 47
- арксинуса 68
- Вейбулла 64
- Гаусса 58
- Коши 62
- Лапласа 66
- Максвелла 64
- многомодальный 103
- Накагами 62
- Поля 56
- Пуассона 54
- Райса 62
- Релея 62
- Симпсона 66
- Стьюдента 64
- унимодальный 103
- условный 70
- Фарри 56
- Фишера — Снедекора 64
- Эрланга 64
- Значность кода 541

И

- Избыточность 541, 550
- Импульсно-фазовая модуляция 217

Импульсная характеристика 272
Интеграл вероятности 49
— Дюамеля 270
Интегральная формула Муавра —
Лапласа 10
Интегральное уравнение Фред-
гольма 436
Интегральный закон распреде-
ления 47
Информация взаимная 536
— собственная 536
— условная 536

К

Канал связи без памяти 542
— — со стиранием 560
Квазимоментные функции 170
Квантиль 103
Квантование 231
Код Бодо 541
— Хаффмена 542
— Шеннона — Фано 542
Кодовая комбинация 541
Кодирование 541
Количество информации 536
Корреляционный момент 108
Корректирующие коды 543
Коэффициент асимметрии 105
— избыточности 544
— корреляции 53, 110, 443
— обнаружения 544
— сжатия текста 541
— эксцесса 105
Критерий Байсса 438
— идеального наблюдателя 438
— Неймана — Пирсона 438
Кумулянты 105

Л

Линейная фильтрация 487
Локальная формула Муавра —
Лапласа 10
Логарифмически нормальный за-
кон 58
Логарифм функции правдоподо-
бия 527

М

Математическое ожидание 49, 101
Медiana 102
Метод дельта-функции 334
— максимума функции правдопо-
добия 526
— квазилинейный 338
— линеаризации 336

— Прайса 334
— прямой 330
— характеристических функций
330
Минимальная среднеквадратич-
ная ошибка 489
Многоугольник распределения 47
Мода 102
Моментные функции 164
Момент связи 108
Моменты начальные 103
— факториальные 103
— центральные 103
m-распределение 62

Н

Надежность системы 8
— параллельного соединения 9
— последовательного соединения
9
Начальный момент 103
Нелинейное безынерционное пре-
образование 326
Неперекрывающиеся импульсы
205
Непрерывная случайная вели-
чина 47
Непрерывные системы связи 565
Несущественные параметры 435
Нормальный закон 58
— стандартный закон 58
Нормированный поток Эрланга
146

О

Обобщенный закон Релся 62
Обслуживающий аппарат СМО
143
Односторонняя модуляция дли-
тельности импульсов 218
Огибающая узкополосного про-
цесса 253
— суммы сигнала и шума 254
Оптимальный приемник 440
— фильтр 492
Основание кода 541
Отношение правдоподобия 433
Отрицательный биномиальный за-
кон 56
Оценка несмещенная 526
— эффективная 526

П

Параметры неэнергетические 527
— энергетические 527
Передаточная функция 272

Перекрывающиеся импульсы 205
 Плотность вероятности 48
 — — двумерная 51
 — — нормальная 49, 52
 — — огибающей 254
 — — произведения 328
 — — разности 328
 — — суммы 328
 — — условная 70
 — — фазы 254
 — — частного 328
 — потока заявок 144
 Показательный закон 66
 Показательно-степенной закон 66
 Полиномиальное распределение 12, 54
 Полная группа событий 6
 Полиномы Эрмита 170
 Поток восстановления 145
 — заявок 143
 — Пальма 145
 — Эрланга 145
 Преобразование кусочно-разрывное 330
 — нелинейное инерционное 335
 — полиномиальное 329
 — трансцендентное 330
 Помехоустойчивое кодирование 544
 Приведенная энтропия 566
 Произведение событий 6
 Производящая функция 12, 108
 Пропускная способность 543
 Простейший поток заявок 144

Р

Равномерный закон распределения 56
 — код 541
 Различение двух сигналов 433
 Распределительный закон 6
 Ряд Крамера 167
 — Лагерра 170
 — распределения 47
 — Эджворта 168

С

Сглаженный ограничитель 355, 384
 Семинварианты 105, 108
 Система массового обслуживания с отказами 143
 — — — с ожиданием 143
 — — — смешанная 144
 Скорость передачи 543
 Случайная величина 47

Случайный телеграфный сигнал 240, 321
 Смешанная случайная величина 47
 События независимые 8
 — несовместные 6
 — противоположные 6
 Согласованный фильтр 441, 492
 Спектральная плотность 166
 Среднее значение 49, 101
 — квадратичное отклонение 102
 — количество информации 537
 — значение огибающей 255, 270
 — число максимумов 410
 — — минимумов 410
 — — пересечений 408
 Средний интервал между выбросами 411
 Средняя длительность выброса 411
 Стандартное отклонение 49
 Структурные числа 337
 Сумма событий 5

Т

Теория соединений 7
 — Колмогорова — Винера 487
 — массового обслуживания 143
 — очередей 143
 Теорема гипотез 9
 — о повторении опытов 10
 — сложения вероятностей 7
 — умножения вероятностей 7
 t -распределение 64
 Треугольное распределение 66
 Трехлучный канал 562

У

Узкополосный случайный процесс 252
 Уравнение Винера — Хопфа 489
 — Фоккера — Планка 336
 Усеченный нормальный закон 58
 Условие нормировки 49, 51, 161
 — симметрии 161
 — согласованности 161
 Условная вероятность 8
 — плотность вероятности 70
 Условный закон распределения 70

Ф

Фаза узкополосного процесса 253
 Факториальный момент 103
 Формула Байеса 9
 — Винера — Хинчина 166
 — Бернулли 10
 — полной вероятности 9
 — Пуассона 10

— Стирлинга 7
— Шеннона 567
Функция автокорреляционная 165
— взаимокорреляционная 165
— корреляции огибающей 255, 270
— — узкополосного процесса 252
— правдоподобия 434
— производящая 12
— распределения 47
Функционал плотности вероятности 434
Функциональное представление Вольтерра 338

Х

Характеристическая функция 55, 71, 107
— — нормальная 163
 χ -распределение 60
 χ^2 -квадрат распределение 60

Ц

Центральный момент 103
Центрированная случайная величина 101

Ч

Число перестановок 14
— размещений 14
— сочетаний 14
Числовые характеристики 101

Ш

Шаг квантования 89

Э

Экспоненциальный односторонний закон 66
Эллипс рассеивания 53
Энтропия 538

Я

Якобиан преобразования 327

Оглавление

| | стр. |
|--|------|
| Предисловие | 3 |
| РАЗДЕЛ I. СОБЫТИЯ, ВЕРОЯТНОСТЬ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ | |
| 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ | 5 |
| § 1. Теоретические сведения | 5 |
| § 2. Примеры | 12 |
| § 3. Задачи и ответы | 24 |
| Литература | 46 |
| 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН | 47 |
| § 1. Теоретические сведения | 47 |
| § 2. Примеры | 71 |
| § 3. Задачи и ответы | 81 |
| Литература | 100 |
| 3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН | 101 |
| § 1. Теоретические сведения | 101 |
| § 2. Примеры | 117 |
| § 3. Задачи и ответы | 123 |
| Литература | 142 |
| 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ | 143 |
| § 1. Теоретические сведения | 143 |
| § 2. Примеры | 150 |
| § 3. Задачи и ответы | 153 |
| Литература | 160 |
| РАЗДЕЛ II. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ | |
| 5. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ | 161 |
| § 1. Теоретические сведения | 161 |
| § 2. Примеры | 172 |
| § 3. Задачи и ответы | 185 |
| Литература | 202 |
| 6. ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ | 204 |
| § 1. Теоретические сведения | 204 |
| § 2. Примеры | 228 |
| § 3. Задачи и ответы | 242 |
| Литература | 251 |

| | | |
|------|---|-----|
| 7. | УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ | 252 |
| § 1. | Теоретические сведения | 252 |
| § 2. | Примеры | 256 |
| § 3. | Задачи и ответы | 260 |
| | Литература | 267 |

РАЗДЕЛ III. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭЛЕМЕНТЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

| | | |
|------|---|-----|
| 8. | ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ | 268 |
| § 1. | Теоретические сведения | 268 |
| § 2. | Примеры | 272 |
| § 3. | Задачи и ответы | 293 |
| | Литература | 323 |
| 9. | ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ | 325 |
| § 1. | Теоретические сведения | 325 |
| § 2. | Примеры | 338 |
| § 3. | Задачи и ответы | 361 |
| | Литература | 402 |
| 10. | ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ | 405 |
| § 1. | Теоретические сведения | 405 |
| § 2. | Примеры | 413 |
| § 3. | Задачи и ответы | 418 |
| | Литература | 431 |

РАЗДЕЛ IV. ТЕОРИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ

| | | |
|------|---|-----|
| 11. | ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ | 432 |
| § 1. | Теоретические сведения | 432 |
| § 2. | Примеры | 439 |
| § 3. | Задачи и ответы | 459 |
| | Литература | 484 |
| 12. | ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ | 486 |
| § 1. | Теоретические сведения | 486 |
| § 2. | Примеры | 492 |
| § 3. | Задачи и ответы | 503 |
| | Литература | 524 |
| 13. | ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА | 526 |
| § 1. | Теоретические сведения | 526 |
| § 2. | Примеры | 529 |
| § 3. | Задачи и ответы | 531 |
| | Литература | 535 |

РАЗДЕЛ V. ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

| | | |
|------|------------------------------------|-----|
| 14. | ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ | 536 |
| § 1. | Теоретические сведения | 536 |
| § 2. | Примеры | 545 |

| | |
|--|-----|
| § 3. Задачи и ответы | 555 |
| Литература | 564 |
| 15. НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ | 565 |
| § 1. Теоретические сведения | 565 |
| § 2. Примеры | 569 |
| § 3. Задачи и ответы | 576 |
| Литература | 580 |
| ПРИЛОЖЕНИЯ | 582 |
| Приложение I. Значения функции $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ | 582 |
| Приложение II. Значения интеграла вероятности $\Phi(z)$ | 583 |
| Приложение III. Числа сочетаний (биномиальные коэффициенты) $C_n^k = C_n^{n-k}$ | 585 |
| Приложение IV. Значения функции $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ | 586 |
| Приложение V. Значения функции $\sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ | 587 |
| Приложение VI. Значения двоичных логарифмов целых чисел от 1 до 100 | 589 |
| Приложение VII. Значения функции $-p \log_2 p$ | 590 |
| Предметный указатель | 591 |

ВЛАДИМИР ТИМОФЕЕВИЧ ГОРЯИНОВ
АНДРЕЙ ГЕОРГИЕВИЧ ЖУРАВЛЕВ
ВАСИЛИЙ ИВАНОВИЧ ТИХОНОВ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКЕ

Редактор К. И. Кучумова
Художественный редактор В. Т. Сидоренко
Технический редактор Г. З. Шалимова
Корректоры Л. И. Кирильченко, Н. Н. Поспелова

Сдано в набор 19.IX-1969 г.
Подписано в печать 7/VII-1970 г. Т 08750
Формат 60x90/16. Бумага типографская № 2
Объем 37,5 усл. п. л. 32,8 уч.-изд. л.
Тираж 24 000 экз. Зак. 728
Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, п/я 693.
Цена 1 р. 35 к.

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Б. Переяславская, 46

ГОТОВЯТСЯ К ВЫПУСКУ В СВЕТ

в издательстве

«СОВЕТСКОЕ РАДИО»

Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи.

Книга содержит основные результаты применения теории передачи сообщения к радиолокации. Изложены способы, которыми в радиолокации извлекается информация о параметрах целей; обсуждаются схемы соответствующих устройств и проанализированы ошибки их работы. Рассматривается теория дискриминаторов и сглаживающих цепей измерителей координат, теория зондирующих сигналов, применяемых в радиолокации, характеристики обнаружения радиолокационных сигналов, элементы теории формирования диаграмм и управления диаграммами направленности.

Книга рассчитана на радиоинженеров, студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся по радиолокации.

Виглин С. И. Переходные процессы в системах с переменными параметрами.

Предлагается оригинальный интегральный метод, который позволяет сравнительно просто исследовать переходные процессы во многих параметрических системах. На основе этого метода изучаются общие свойства параметрических систем. Наибольшее внимание уделяется избирательным системам, для которых получены укороченные интегральные уравнения, позволяющие при помощи стандартных приемов найти форму колебаний в системе любого порядка. Подробно исследуются процессы нарастания колебаний в типовых системах второго порядка и их частотные характеристики. Результаты исследования доведены до простых расчетных соотношений.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся разработкой параметрических систем, а также для студентов старших курсов радиотехнических специальностей.

Замеченные опечатки

| Страница | Строка или формула | Напечатано | Должно быть |
|----------|--------------------|--|---|
| 178 | 10 снизу | $\int_{-\infty}^0 e^{[-\alpha - j(\omega - \omega_0)] \tau} d\tau \dots$ | $\int_{-\infty}^0 e^{[\alpha - j(\omega - \omega_0)] \tau} d\tau \dots$ |
| 183 | 5 сверху | $\alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \int_0^{\infty} = \dots$ | $\alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big _0^{\infty} = \dots$ |
| 202 | 9 сверху | $\frac{1}{4\sigma^2} e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{\xi_1}{2\sigma^2} \right) L_n \times$ $\times \left(\frac{\xi_2}{2\sigma^2} \right) R^{2n}(\tau).$ | $\frac{\xi_1 \xi_2}{\sigma^2} e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{\xi_1}{2\sigma^2} \right) L_n \times$ $\times \left(\frac{\xi_2}{2\sigma^2} \right) R^{2n}(\tau).$ |
| 216 | 2 снизу | $\frac{m_c^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2}{\eta_0}$ | $\frac{m_c^2 F_1(\omega, \tau_0) ^2}{\eta_0^2}$ |
| 217 | 4 сверху | $= \frac{m_c^2}{\eta_0} \dots$ | $= \frac{m_c^2}{\eta_0^2} \dots$ |

| Страница | Строка или формула | Напечатано | Должно быть |
|----------|-----------------------------|---|---|
| 253 | 16 сверху (числитель дроби) | $\dot{A}_s(t) A_c(t) - \dot{A}_c(t) \dot{A}_s(t)$ | $\dot{A}_s(t) A_c(t) - \dot{A}_c(t) A_s(t)$ |
| 294 | 9 снизу | $K_{xx1}(t, t_1)$ | $K_{y11}(t, t_1)$ |
| 317 | 1 снизу | $S_{\eta}(\omega)/S_{\xi}(\omega/2) = f(\theta\omega)$ | $S_{\eta}(\omega)/S_{\xi}(\omega) = f(\theta\omega)$ |
| 353 | 1 сверху | $\alpha_i \ll \xi \ll \alpha_{i+1}$, | $\alpha_{i-1} \ll \xi \ll \alpha_i$, |
| 409 | 12 снизу | $N_{\Gamma}^{-1}(C) = -W_{\Gamma}(C) \int_{\infty}^0 \dots$ | $N_{\Gamma}^{-1}(C) = -W_{\Gamma}(C) \int_{-\infty}^0 \dots$ |
| 472 | 7 снизу | $= \gamma c \sqrt{\dots}$ | $c = \gamma \sqrt{\dots}$ |
| 513 | 8 снизу (числитель дроби) | $1 - e^{-\gamma \omega T_{\Pi}}$ | $1 - e^{-\gamma \omega T_{\Pi}}$ |
| 516 | 10 снизу | $\Delta f_{\text{опт}} = \frac{1,37}{T_{\Pi}} a_{\text{max}} = \dots$ | $\Delta f_{\text{опт}} = \frac{1,37}{T_{\Pi}} a_{\text{max}} = \dots$ |
| 539 | 1 сверху | (14.32) | (14.23) |

No. 35

